ELEMENTOS
DE
MATEMATICA

TOM. III.

ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA.

POR D. BENITO BAILS,
Director de Matemáticas de la Real Academia de S. Fernando, Individuo de las Reales Academias Española, de la Historia, y de la de Ciencias naturales, y Artes de Barcelona.

TOMO III.

MADRID.
Por D. JOACHIN IBARRA, Impresor de Cámara de S. M.
M.DCC.LXXIX.

PRÓLOGO.

Una vez que nos propusimos incluir en los tres primeros Tomos de esta Obra toda la Matemática Pura, ó Especulativa que habia de llevar, era natural le tocasen al tercero los asuntos de mayor elevacion. Pero como no todos son ni pueden ser igualmente dificultosos, era preciso diésemos el primer lugar á los menos elevados, aun quando no sirvieran como de introduccion para la inteligencia de los demas.

Por este motivo declaramos desde luego, bien que con suma brevedad, los fundamentos de toda la teórica de las lineas curvas algebráicas, llamadas con este nombre porque se puede cifrar su naturaleza en expresiones que no llevan mas símbolos que los que usa el Algebra Cartesiana, sin incluir cantidad alguna infinitesimal, logarítmica, trigonométrica, &c. Lo poco que sobre este asunto publicamos está sacado de una obra del célebre Cramer, Ginebrino (1), que por su mucha claridad, tanto como por lo profundo de sus investigaciones, fue recibida con general aplauso. Estos primeros principios pudiéramos tambien haberlos sacado de la Introduccion de Leonardo Euler á la Analisis de los infinitos, en cuyo

(1) *Introduction a l'analyse des lignes courbes algebriques. Par Gabriel Cramer, Professeur de Philosophie & de Mathématiques, &c.* Un tomo en 4. Ginebra 1750.

tomo segundo trata con aquella maestría que es el caracter distintivo de todos sus escritos, la misma materia que Cramer; pero su tratado nos pareció, por mas conciso, mas dificultoso de extractar, y este fue el único motivo por que dimos la preferencia á la Obra del Matemático de Ginebra. A todo aficionado de buen talento, y bien radicado en los diferentes ramos del cálculo algebráico, le aconsejamos se la dé al tratado del Sr. Euler, leyendo primero, si quisiere (y acaso no le pesará), un extracto que de él hizo el Traductor Francés del Algebra de Maclaurin (2). Aunque de talento, doctrina y destreza iguales dos Escritores, pueden sin embargo escribir sobre una misma materia por rumbos muy distintos, sin que en sus obras se eche menos ninguna de las prendas que les merecen lugar á los escritos en la clase de cabales. Pero sobre que un lector, quanto mayor sea su penetracion, tanto mas gusta de tratados concisos, tiene tambien mas cuenta echar mano de ellos, como no equivocasen sus autores al tiempo de formarlos un escrito conciso con un escrito oscuro ó diminuto; porque al paso que se apropia la doctrina que declaran, se le pega tambien, digamoslo así, al que estudia la manera del autor: y nadie negará que en igualdad de circunstancias un libro, sea el que

(2) *Traité d'Algebre, & de la maniere de l'appliquer. Traduit de l'Anglois de M. Maclaurin, de la Societé Royale de Londres, Professeur de Mathématique à Edimbourg. Avec des augmentations tirées des Mathématiciens les plus célébres.* Un tomo en 4. Paris 1753.

que fuere su asunto, escrito con prudente laconismo lleve algunos quilates de ventaja á otro donde esté todo tan individualizado, y estén tan multiplicados los exemplos, que pueda ser algo molesto á un lector que guste de meditar. Los que buscaren acerca de estas curvas mucha doctrina en poco papel, podrán acudir al Tomo primero de las Instituciones analíticas de Ricati; bien que dudamos haya para contentarles obra tan buena como la que publicó un docto Magistrado del Parlamento de París (3) en un tomito en 12. pequeño de unas 200 planas. En esta Obrita tan apreciable como desconocida, hallarán muchísimo que aprender los principiantes, y los que estuvieren impuestos en estas materias un primoroso prontuario que les servirá para renovar á muy poca costa las especies, que en tratados muy voluminosos hubieren aprendido.

A continuacion de los principios generales de la doctrina de las curvas algebráicas, tratamos con alguna individualidad de las que se han hecho muy famosas con el nombre de secciones cónicas, copiando los tres primeros libros del tratado analítico que de ellas escribió el Marques del Hospital, Francés (4). A pesar de las tachas que algunos han querido poner á la Obra del Marques, es

a 4 sin

(3) *Traité des Courbes Algebriques.* Un tomo en 12. Paris 1756.

(4) *Traité analytique des sections coniques, & de leur usage pour la resolution des équations dans les problêmes tant déterminés qu'indéterminés. Ouvrage Posthume de M. le Marquis de l'Hospital, Academicien honoraire de l'Academie Royale des Sciences.* Un tomo en 4. Paris 1704.

sin duda alguna la mas cabal y perfecta que se ha publicado sobre este asunto, á lo menos por el método analítico (5); reparándose al mismo tiempo en ella, como en todo lo que salió de la misma mano, una elegancia de construcciones que enamora, y una claridad y despejo que no siempre se hallan en las Obras de los Escritores que intentaron deslucirla. No porque se note un leve descuido en una obra de considerable extension dexará de ser excelente, así como no dexarémos de graduar de insigne á un escritor, porque dé en sus escritos alguna muestra de que no fue un hombre infalible (6).

El

(5) Hay sobre las secciones cónicas otro tratado analytico con el título siguiente: *Traité analytique des sections coniques, fluxions & fluentes. Avec un essai sur les quadratures, & un traité du mouvement. Par M. Muller, Professeur de Mathématiques à l'Ecole Royale de Volwich, traduit de l'Angloie par l'Auteur.* Un tomo en 4. Paris 1760. No se puede comparar esta obra con la del Marques del Hospital por diminuta en lo que toca á las secciones cónicas, y obscura en todos los puntos que trata su autor.

(6) Del tratado del Marques hace Saunderson, Ingles, en el Tomo II. de sus Elementos de Algebra, plana 211, el juicio siguiente:

Au moyen des trois derniers articles le lecteur pourra se former quelque idée de cequ'il faut entendre par lieux géométriques, & de leur usage dans la solution & dans la construction des problêmes géométriques; mais il lui sera impossible de se mettre bien au fait de ces matiéres, s'il n'étudie avec soin les sections coniques, qui sont les lieux qu'on employe ordinairement dans la

"Por medio de los tres últimos artí»culos podrá el lector formar algun »concepto de lo que comunmente lla»mamos lugares geométricos, y de su »uso para resolver y construir los pro»blemas (cuestiones) geométricos; »pero no podrá enterarse bien de es»tos asuntos, á no ser que primero se »imponga en la teórica de las seccio»nes cónicas, que son los lugares de »que se hace uso por lo regular para »la

El haber declarado á nuestra satisfaccion las principales propiedades de las secciones cónicas, considerándolas como trazadas en un plano por un cuerpo que se mueve con movimiento ajustado á ciertas leyes determinadas, no

la construction de toutes les équations de plus de deux degrés. Je recomenderai pour cet effet la lecture du Traité des seccions coniques du Marquis de l'Hopital : ouvrage posthume à la vérité, mais néan moins très correct à un petit nombre d'endroits près, dont quelques uns, à mon avis, ont été censurés trop sévérement; surtout si l'on considére qu'ils peuvent être aisément corrigés, & qu'ils l'auroient été sansdoute si l'auteur avoit vécu assez longtems pour mettre la derniére main à cet ouvrage. Ce Traité me paroit plus clair, plus facilè à comprendre, & plus propre à enseigner bien des choses en peu de tems, qu'aucun autre qui me soit connu & je le recommande surtout à cedernier égard. Dans les quatre derniers livres de cet ouvrage on trouve la matiére des lieux géométriques, rélativement à leur construction & à leur usage, parfaitement bien approfondie, & èclaircie par un nombre suffisant d'exemples. En un mot, le plan de cet excel-

»la construccion de las equaciones que »pasan del segundo grado. Para cuyo »fin le aconsejo lea el tratado de las »secciones cónicas del Marques del »Hospital: obra pósthuma á la verdad, pero sin embargo de eso muy »correcta, á excepcion de unos pocos pasages, que algunos han sido »criticados, en mi juicio, con sobrado rigor; y particularmente si nos hacemos cargo de que son muy fáciles »de enmendar, y que los hubiera enmendado sin duda alguna su autor »si hubiera vivido bastante para dar »la última mano á esta obra. Este »Tratado me parece mas claro, mas »facil de entender, y mas apropósito para enseñar muchas cosas en »poco tiempo, que otro ninguno de »los que conozco; y por este último »motivo aconsejo particularmente su »lectura. En los quatro últimos libros »de dicha obra está la doctrina de los »lugares geométricos, por lo tocante »á sus usos y construccion, tratada »con toda profundidad, y aclarada »con bastantes exemplos. En una palabra, el plan de este excelente tra-

no podia de ningun modo dispensarnos la obligacion de considerarlas tambien en el cono, de donde traen su nombre y origen. Muchas investigaciones y obras matemáticas suponen el conocimiento de este origen, cuya declaracion va copiada del Curso de M. Bezout, porque le dá á conocer con mucha claridad, bien que con muy pocas palabras. Finalmente, como la aplicacion de la Especulativa á la Práctica, y tambien muchas cuestiones de Especulativa piden que se tracen secciones cónicas, proponemos para esta operacion un método generalísimo que sirve para todas tres, qual le hallamos en el tratado del Marques, de donde hemos copiado lo demas.

Entre varias estrañezas con que tropieza el entendimiento humano en el estudio de las Matemáticas, es muy notable la que manifestamos en el Tomo antecedente acerca de algunos números imposibles de averiguar, siendo así que es facilísimo hallar el producto de unos por otros, y tambien la razon que entre ellos hay. Pero otra singularidad hay enlazada con un punto que tratamos en este Tomo, quando declaramos como se sacan cabales por lineas las raices de las equaciones, aun quando es imposible de-

ter-

cellent Traité est, à tous égards, si bien fait, & executé avec tant de facilitè, de clartè & de jugement, que ce seroit une vanité inexcusable à moi de penser seulement pouvoir ajoûter quelque chose à une piéce aussi finie.

„tado es á todas luces bien hecho y „executado con tanto despejo, clari„dad y juicio, que sería de mi parte „vanidad muy culpable solo el pen„sar que pudiese añadir algo á una „obra tan acabada."

terminar por números sus valores. Esta que podrá parecer paradoxa, es una proposicion muy evidente para quien considerare que segun sean los valores numéricos de los lados de un triángulo rectángulo, no habrá camino alguno por donde hallar cabal por números el valor de su hipotenusa; siendo así que el determinarla por lineas será operacion facilísima. El método que han discurrido los Matemáticos para resolver por Geometría las equaciones determinadas superiores, consiste en suponer dos equaciones indeterminadas, ó con dos variables, que cada una pertenezca á una seccion cónica distinta, y en *trazar* despues estas curvas *por construccion*, tomando las abscisas de ambas en un ege comun: hecho esto, desde los puntos donde las dos secciones cónicas se intersecan se tiran ordenadas comunes al ege, cuyas porciones desde el origen hasta los puntos donde dichas aplicadas le encuentran, expresan los valores de las raices de la equacion determinada que se ha de resolver.

Hemos dicho que se han de trazar *por construccion* las curvas cifradas en las dos equaciones indeterminadas que se forman para la resolucion de la equacion fundamental; porque mediante una equacion indeterminada se puede trazar de dos distintos modos la curva que representa. El primero (7) consiste en dar succesivamente diferentes valores á la una de sus indeterminadas, pongo por caso, á la abscisa, con lo que la otra indeterminada se trans-

(7) Lo declaro en este Tomo pág. 12.

for-

forma en incógnita (8), y sacando sus valores con resolver la equacion puesta en estos términos, la curva trazada con mano suelta por los extremos de todas estas ordenadas, será la que iba cifrada en la equacion indeterminada propuesta. El otro modo de trazar las curvas, que llamamos por construccion, se reduce á hallar primero el valor y la posicion de algunas de sus lineas principales, y hallados estos, en trazar la curva por un método fundado en la naturaleza y destino de dichas lineas. Con un egemplo muy sencillo procurarémos darnos mejor á entender. Dada la equacion de una parábola, por egemplo, es constante que con señalar diferentes valores á la abscisa irémos sacando diferentes valores de la ordenada, ó distintas ordenadas, por cuyos extremos ha de pasar, y trazarémos la parábola. Pero si dada la misma equacion, determino primero el parámetro, la posicion de su ege ó diámetro, el ángulo que han de formar las coordenadas, y sujetándome á las condiciones que estas determinaciones me impongan, trazo la parábola por alguno de los métodos co-

no-

(8) De una cantidad incógnita á una cantidad indeterminada va la diferencia de que el número de los valores de la primera es muy limitado, siendo así que la otra puede tener infinitos valores. En una equacion con dos indeterminadas ó variables, pongo por caso, se sacarán para la una infinitos valores por razon de que puede la otra representar una infinidad de cantidades distintas; pero una vez que á la segunda variable se la señale un valor particular, ó determinado, la primera no podrá tener ya mas valores á lo sumo, que quantas unidades tuviere su exponente.

nocidos, fundados en la naturaleza de estas lineas, esto será trazarla por construccion.

Este es cabalmente el método peculiar á los lugares geométricos; de modo que hallar el lugar geométrico de una equacion indeterminada perteneciente á una seccion cónica, ó, lo que es todo uno, á una linea de segunda orden (9), es trazar por construccion la seccion cónica que en dicha equacion está cifrada. Y una vez que, segun decíamos poco ha, declaramos cómo se resuelven las equaciones determinadas de tercero y quarto grado por la interseccion de dos secciones cónicas cifradas en las equaciones indeterminadas auxîliares, el empeño está 1.º en formar estas equaciones auxîliares; 2.º en averiguar qué seccion cónica representa cada una de ellas; 3.º en trazarlas, señalando las abscisas de ambas en una misma recta. Esto es cabalmente lo que declaramos sin apartarnos un punto de la doctrina del Marques del Hospital.

Despues de formada la una de las dos equaciones indeterminadas auxîliares, se saca la otra con suma facilidad; pero la eleccion de la primera pide algun pulso, por el riesgo que se corre de que sea de tal índole que resulten imaginarias las intersecciones de las dos secciones, que determinan las raices de la propuesta. Nos tocaba, pues, enseñar cómo se precave este grave inconveniente, y no hallamos cosa mas adequada á nuestro intento que copiar las re-

(9) La razon de esto se hallará en este Tomo pág. 20.

reglas y los egemplos que con el mismo fin trae Gabriel Cramer en su obra citada.

Ultimamente, como no hay modo mas acertado de hacer perceptibles los preceptos teóricos que aplicarlos á casos prácticos, y egemplos bien escogidos; una vez satisfecho el reparo expresado, resolvemos algunas cuestiones, así determinadas, como indeterminadas, todas sacadas del Tratado Analítico del Marques, á excepcion de la que se dirige á hallar dos lineas medias proporcionales entre otras dos lineas dadas, que copiamos de las Instituciones de Vicente Ricati.

A pesar de lo mucho que nos mostramos preocupados á favor del tratado de las secciones cónicas del Marques del Hospital, de donde, segun queda dicho, hemos sacado tambien la doctrina de los lugares geométricos, y la construccion de las equaciones determinadas de tercero y quarto grado; hemos de confesar que toda esta doctrina está tratada por un término mucho mas sencillo y despejado en el Tomo IV. de los Elementos del P. Gherli, donde la aplicacion del Algebra á la Geometría está magistralmente declarada. Es tanto lo que nos ha dexado satisfechos, que si hubiéramos de formar hoy dia este Tomo tercero, sacaríamos gustosísimos todos los asuntos de que hemos dado hasta ahora individual razon de la Obra del Escritor Italiano. En ella está propuesta primorosamente la teórica de las curvas algebráicas, hermanando con tal destreza su autor el método de Euler con el de

Cra-

Cramer, que con extractar ambas Obras ha formado un tratado preciosísimo. Los entendimientos ansiosos de conocer diferentes caminos por donde llegar á un mismo paradero, hallarán en el tomo primero del Comentario de M. Castillon á la Arismética universal de Newton, otro modo de considerar los lugares geométricos, donde manifiesta, entre otras cosas, aquel diligente Comentador, siguiendo las huellas de Euler (10), como por la naturaleza de los factores del primer término de una equacion indeterminada, se averigua á qual de las tres secciones cónicas pertenece. Pero para trazar la seccion cónica cifrada en una equacion indeterminada, no hay método ninguno que en punto de elegancia y sencillez pueda competir con el de Herman, que con muchos, bien que muy merecidos elogios trae Vicente Ricati en sus Opúsculos.

Despues de todo lo declarado hasta aquí, solo nos faltaba para concluir este Tomo engolfarnos en el cálculo infinitesimal, cuyos dos ramos principales son el cálculo diferencial, y el cálculo integral. Solo el nombre de las cantidades que el cálculo diferencial considera, espanta á los principiantes; y hombres ha habido de mucho talento, y no menos doctrina, que le han mirado con desconfianza. Porque como el objeto del cálculo diferencial es, segun han dicho muchos, señalar la razon ó re-

la-

(10) *Introduct. in Analys. infin.* tom. 2.

lacion que hay entre los elementos infinitamente pequeños de las cantidades finitas, y una cantidad infinitamente pequeña parece incomprehensible; experimentó desde su nacimiento este cálculo no poca oposicion de parte de algunos Matemáticos, y no halló en los principiantes la acogida que tan justamente se merece, por no haber manifestado sus fundamentos como debieran sus promovedores. La primera obra que se escribió de intento sobre este cálculo, fue tambien parto del Marques del Hospital (11); y aunque se hallan en este escrito todas las circunstancias que hacen recomendable todo lo que publicó este ilustre Matemático; es á saber, claridad en la explicacion, elegancia en las construcciones, y tino en la eleccion de los egemplos, sin embargo no resuelve ninguna de las dudas que suelen ofrecerse acerca de los fundamentos de la doctrina que declara. Bien pudiera el Marques haberse tomado este trabajo á muy poca costa, pues tenia ya sentados estos fundamentos Newton, inventor de este cálculo (12) desde el año de 1687 por un término que no puede menos de dexar satisfecho á todo lector de bien organizado entendimiento (13).

El mismo descuido que el Marques del Hospital padeció, tambien le padecieron los mas de los Matemáticos, que

(11) *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes. Par M. le Marquis de l'Hospital.* Un tomo en 4. Paris 1699.

(12) Al mismo tiempo le inventó tambien Leibnitz en Alemania.

(13) Véase su grande Obra *Philosophiæ naturalis Principia Mathematica.*

que despues de él escribieron sobre este cálculo ; alentando su omision á algunos hombres poco afectos á este nuevo ramo de analysis , ó poco enterados de la gran conformidad de sus resultados con las ilaciones del método geométrico mas riguroso , para que escribieran contra su certeza. Cabalmente los mayores tiros se le hicieron en el mismo pais de su nacimiento , donde se publicó un libro con el título irónico de *el Analista* , cuyo autor se empeñó en desacreditar el cálculo diferencial. Pero salió allí mismo en su defensa el docto Maclaurin , Escocés (14), manifestando sus fundamentos por el método de los antiguos Matemáticos , y aplicándole de camino , igualmente que el cálculo integral , con suma felicidad y magisterio á muchísimos puntos de la Matemática mixta. Pocos escritos conocemos que acrediten tanto como la Obra de Maclaurin la profunda doctrina y penetracion de sus autores , y aconsejamos su estudio á todo aficionado que tuviere el noble deseo de ser matemático de provecho : no solamente conseguirá radicarse plenamente en los fundamentos del cálculo infinitesimal , mas tambien logrará acaso adiestrarse en la práctica del método sintético , y podrá celebrarlo por mucha fortuna.

Las dudas y contradicciones que se originaron de ha-

(14) *A Treatise of Fluxions in two Brooks. By Colin Maclaurin , Professor of Mathematics in the Universiti of Edinburgh , and Fellow of the Royal Soiety* : dos tomos en 4. Edimburg 1742.

ber andado tan descuidados los primeros matemáticos que escribieron sobre el cálculo diferencial en declarar sus fundamentos, ha obligado á los que han tratado despues el mismo asunto á manifestar quan seguro es el uso de este cálculo, probando que no es nada ageno del método geométrico mas riguroso. Así lo egecutó M. Euler en el cap. 3. del tomo primero de su Cálculo diferencial (15); M. D'Alembert en sus Miscelaneas (16); Ricati en el tomo segundo de sus Instituciones; y M. Cousin en sus Lecciones de cálculo diferencial é integral (17). Pero quasi todos estos escritores han seguido distintos rumbos en esta declaracion: Euler, de la consideracion de las diferencias finitas pasa á considerar las diferencias infinitamente pequeñas, que mira como un caso particular de las primeras; Ricati se empeña en hacer patente lo mucho que concuerda el modo de discurrir de los antiguos en la medicion de los espacios curvilineos con el que siguen los partidarios del nuevo cálculo, y tratando de la geometría del infinito, demuestra algunas proposiciones que son de muchísimo uso en la aplicacion de los métodos recientes; M. Cousin consi-

(15) *Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in Analysi finitorum ac doctrina serierum. Auctore Leonhardo Eulero &c.* Dos tomos en 4. Petersburgo 1755.

(16) *Melanges de Philosophie & Litterature.*

(17) *Leçons de Calcul différentiel & de Calcul integral, par M. Cousin, de l'Académie Royale des Sciences, & Lecteur Royal en Physique*: dos tomos en 8. Paris 1777.

sidera los infinitamente pequeños como el límite de la razon entre las diferencias finitas (18), y por último M. D'Alembert apea en pocas palabras, siguiendo y aclarando la doctrina de Newton, las dificultades que podrian molestar á los principiantes.

Por haber seguido M. D'Alembert las huellas de Newton, que considera el cálculo diferencial como el cálculo de los límites de las razones, y por la brevedad y magisterio con que le ilustra, copiamos en una introduccion lo que trae sobre este asunto en la citada Obra, sin mas alteracion que añadirle un pedacito sacado de Ricati (19), que tambien consideró este punto por el mismo lado que el Matemático Francés. Pero primero trasladamos del libro quinto del tratado Analítico del Marques del Hospital algunas proposiciones muy fundamentales para aplicar los nuevos cálculos á la geometría; por manera, que en lo que dexamos sentado de intento en el Tomo II. acerca del infinito, é infinitamente pequeño, y en lo que añadimos ahora en esta introduccion hay, si no nos halucinamos, quanto se necesita para proseguir con toda confianza, y sin tropiezo alguno, el estudio del cálculo infinitesimal. Y últimamente, si hubiere alguno que no se dé por satisfecho, ni con lo que aquí publicamos, ni con lo que se ha-

b 2 lla

(18) En el capítulo segundo de su Obra hace acerca de los límites de las cantidades algunas consideraciones sumamente luminosas en esta materia.

(19) *Instit. Analytic. tom.* 2.

lla en las Obras citadas, acaso le satisfará mejor el P. Escarela en el tomo primero de su Física general (20), donde propone y satisface por el método de los escolásticos los mas de los argumentos con que se ha procurado desacreditar el cálculo diferencial. En el tomo segundo de su Algebra resuelve Saunderson una cuestion de Geometría Elemental, y hace acerca de su resolucion algunas consideraciones muy fundamentales sobre este asunto, y muy dignas de leerse.

En lo que hemos dicho acerca del rumbo que han seguido algunos Matemáticos para aclarar con toda evidencia los fundamentos de este cálculo, insinuamos que para explicarse á su satisfaccion acerca de las diferencias infinitamente pequeñas, esperaron sacar alguna luz de la consideracion de las diferencias finitas. Este es el motivo por qué trata de estas con algun cuidado el Sr. Euler en su Cálculo diferencial, y es el único Matemático del continente de Europa que sepamos se haya exercitado en esta materia (21). Sobre el método de las diferencias finitas, que Taylor, Inglés, su inventor, llama método de los incrementos, hay de Emerson un tratado de propósito (22), donde hace de este método, muy enlazado con el

(20) *Physica generalis methodo mathematico tractata. Auctore Joanne Baptista Scarella, Clerico Regulari*: tres tomos en 4. Brescia 1754. 57.

(21) Los demas le han copiado, ó extractado.

(22) *The method of jncrements. Wherein the Principles are demonstrated; and the practice thereof shewn in the solution of problems.* Un tomo en 4. Londres 1763.

el de las fluxîones, aplicaciones muy curiosas, quexándose en su Prólogo de que ha tenido pocos partidarios (23).

Hechos patentes los fundamentos del cálculo diferencial, enseñamos cómo se diferencian las cantidades, sean las que fueren, racionales, irracionales, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, y despues le aplicamos, copiando á M. Bezout, á la declaracion de algunos puntos de la teórica de las curvas algebráicas, antes de dar á conocer la naturaleza de algunas curvas transcendentales

(23) Oigamos cómo da esta quexa el mismo Emerson.

The inventor of the method of increments *was the leanerd Dr.*Taylor, *who, in the year* 1717, *published a treatise of that method*; *and afterwards gave some farther explanation of the same in the* Philosophical Transactions, *as applied to the finding the sums of series. But as the Doctor's writings upon this subject, are all in latin, and have never been translated entire*; *and as his way of writing, is so very short and abstracted, as not to be obvious to common readers*; *it has happened, that this elegant method of computation has lain ever since in obscurity, has been read by few, and improved by none.*

"El inventor del *método de los incrementos* fue el docto *Taylor*, quien »publicó en el año de 1717 un tratado sobre este método, y despues le »aclaró mas en las *Transacciones Filosóficas*, aplicándole á la sumacion »de las series. Pero sobre que quanto »Taylor escribió en este asunto está »en latin, y jamas se ha traducido »enteramente; es por otra parte tan »sucinto y abstracto su modo de escribir, que no son fáciles de entender sus escritos para el comun de »los lectores, y esta ha sido la causa »de haberse quedado desde entonces »en la obscuridad este elegante método de calcular, habiendo tenido lectores pocos, y promovedor ninguno."

ó mecánicas, y particularmente de las espirales (24). Para representar su diferencial usamos la letra *d*, y no un punto, conforme estilan los Ingleses, que llaman la diferencial con el nombre de fluxíon, y fluente á la cantidad finita, cuyo elemento es la diferencial. Seguimos esta práctica por ser la de todos los Matemáticos del continente de Europa, y porque no está expuesta á los inconvenientes de la otra. "Porque llamamos (dice Euler (25)) ,, *diferenciales* las diferencias infinitamente pequeñas de que ,, aquí tratamos, suele llamarse *cálculo diferencial* aquel ,, cuyo obgeto es hallar las diferenciales, y aplicarlas á ,, los usos para que se consideran. Los Matemáticos In- ,, gleses, entre los quales Newton fue el primero que usó ,, este cálculo, así como Leibnitz lo fue en Alema- ,, nia, usan otros nombres y signos. Las diferencias in- ,, finitamente pequeñas, que nosotros llamamos *diferencia-* ,, *les*, ellos las llaman comunmente *fluxiones*, y algunas ve- ,, ces *incrementos*; cuyos nombres, por ser de un latin

,, mas

(24) De estas curvas espirales hay un buen tratado en el tomo segundo de la Fisica de Escarela.

(25) *Quoniam differentias infinite parvas, quas hic tractamus*, differentialia *vocamus, hinc totus calculus quo differentialia investigantur atque ad usum accommodantur, appellari solet* calculus differentialis. *Mathematici Angli, inter quos primum Newtonus æque ac Leibnizius inter Germanos hanc novam Analyseos partem excolere cœpit, aliis tam nominibus quam signis utuntur. Differentias enim infinite parvas, quas nos* differentialia *vocamus, potissimum* fluxiones *nominare solent, interdum quoque* incrementa : *quæ voces uti latino sermoni magis conveniunt, ita quoque res, quas denotant, satis commode*

ex-

„ mas castizo dan bastante á conocer las cosas que sig-
„ nifican. Porque una cantidad variable, que, al paso que
„ crece, va adquiriendo succesivamente distintos valores,
„ se puede considerar como que fluye ó corre, y de aquí
„ es, que el nombre de fluxîon, de que usó primero New-
„ ton para expresar la rapidez en el crecer, sirvió des-
„ pues por analogía para expresar el incremento infinita-
„ mente pequeño que la cantidad adquiere como flu-
„ yendo.

„ Y aunque es cierto que sería estraño el empeñar-
„ nos en disputar con los Ingleses acerca del uso y de la
„ significacion de las voces, y que perderíamos el pleyto en
„ el tribunal de todo juez que atendiese á la pureza del
„ latin, y á la propiedad de las expresiones; sin embar-
„ go no hay duda en que por lo tocante á los signos lle-
„ vamos ventaja á los Ingleses. Porque ellos suelen seña-
„ lar las diferenciales, á quien llaman fluxîones, con pun-
„ tos puestos encima de las letras, de modo que la pri-

 „ me-

exprimunt. Quantitas enim variabilis crescendo continuo alios atque alios valores recipiens tanquam fluens considerari potest, hincque vox fluxionis, quæ primum à Newtono ad celeritatem crescendi adhibebatur, ad incrementum infinite parvum, quod quantitas quasi fluendo accipit, designandum analogice est translata.

Quamvis autem circa vocum usum atque definitionem cum Anglis disceptare absonum foret, nosque coram judice puritatem latinæ linguæ, atque expressionum commoditatem spectante facile superaremur; tamen nullum est dubium, quin Anglis ratione signorum palmam præripiamus. Differentialia enim, quæ ipsi fluxiones appellant, punctis, quæ litteris superscribunt, denotare solent,

ita

„ mera fluxîon de y la pintan así $\dot{y}$, la segunda $\ddot{y}$, la ter-
„ cera $\dddot{y}$, y las demas á este tenor. Bien que este modo de
„ señalar, que es arbitrario, no se puede reprobar quan-
„ do sea tan corto el número de los puntos que sean fá-
„ ciles de contar; no obstante, siempre que se hayan de
„ escribir muchos, causarán no poca confusion, y mu-
„ chos inconvenientes. La diferencial ó fluxîon décima,
„ por egemplo, será muy molesta de señalar de esta ma-
„ nera y (con diez puntos), siendo así que señalada á nuestro modo $d^{10}y$,
„ se percibe inmediatamente. Y casos suelen ofrecerse don-
„ de es preciso expresar órdenes mucho mas elevados é
„ indefinitos de las diferenciales, para los quales de nada sir-
„ ve el método de los Ingleses.

„ Usarémos, pues, nuestros nombres y signos, por-
„ que aquellos se han connaturalizado con el uso en este
„ pais,

ita ut $\dot{y}$, *iis significet fluxionem primam ipsius* y; $\ddot{y}$ *fluxionem secundam*; $\dddot{y}$ *fluxionem tertiam, atque ita porro. Qui notandi modus, uti ab arbitrio pendens, etsi improbari nequit, si punctorum numerus fuerit parvus, ut numerando facile percipi queat; tamen si plura puncta inscribi debeant, maximam confusionem plurimaque incommoda affert. Differentiale enim seu fluxio decima perquam incommode hoc modo* y *representatur, cum nostro signandi modo* $d^{10}y$ *facillime comprehendatur. Oriuntur autem casus, quibus multo adhuc superiores differentialium ordines atque adeo indefiniti exprimi debent, ad quos Anglorum modus prorsus fit ineptus.*

Nostris igitur tam nominibus quam signis utemur, quippe quorum illa in nostris regionibus jam sunt usu recepta, atque plerisque familiaria, hæc vero com-

„ pais, y se han hecho familiares á los mas, y estos son „ mas acomodados. Pero no por eso ha sido impertinente „ hacer memoria de los nombres y signos que usan los In- „ gleses, pues con esto facilitamos la inteligencia de sus „ obras á los que las manejaren. Porque tampoco están „ los Ingleses tan arrimados á su estilo, que desechen y „ se desdeñen de leer las obras escritas por nuestro mé- „ todo. Nosotros confesamos que hemos leido sus escritos „ con sumo gusto, y muchísimo fruto; y se nos han ofre- „ cido repetidas ocasiones de reparar que ellos tambien han „ leido con aprovechamiento las obras de nuestros escri- „ tores. Por lo que, aunque sería muy del caso que unos „ y otros usásemos un mismo modo de expresar nuestros „ pensamientos; sin embargo no es muy dificultoso el que „ nos enteremos todos de uno y otro, lo que basta por lo „ menos para la inteligencia de las obras escritas por el „ método ageno."

Por lo que mira al modo de diferenciar, y á las muchas

commodiora. Interim tamen non abs re erat Anglorum demonstrationes & signationes hic commemorare, ut qui eorum libros evolvunt, eos quoque intelligere queant. Neque enim Angli suo mori tam pertinaciter adhærent, ut quæ nostro more sunt scripta, prorsus repudient, nec legere dignentur. Nos quidem ipsorum opera maxima cum aviditate perlegimus, ex iisque summum fructum percipimus; sæpe numero vero etiam animadvertimus, ipsos nostratium scripta non sine utilitate legisse. Quamobrem etsi idem ubique atque æquabilis modus cogitata sua exprimendi maxime esset optandus, tamen non admodum est difficile, ut utrique assuescamus, quantum quidem intelligentia librorum alieno more scriptorum postulat.

chas aplicaciones que hacemos del cálculo diferencial, hemos disfrutado tantas obras, que sin nota de pesadez no podríamos detenernos á especificar lo que de cada una hemos aprovechado. Bastará decir por mayor que todo está sacado del Marques del Hospital, de Bougainville (26), Thomas Simpson (27), Emerson (28), Ricati (29), Bezout (30), el Abate Marie (31), y otros escritores que luego nombraremos.

Para la cabal resolucion de la mayor parte de las cuestiones á que se aplican los nuevos cálculos, no basta considerar los límites de las razones de las cantidades finitas, es tambien preciso determinar estas cantidades, sacando su valor de las expresiones en que van cifrados dichos límites. Esta última operacion es de la incumbencia del

(26) *Traité du Calcul intégral, pour servir de suite à l'Analyse des infiniment petits de M. le Marquis de l'Hospital. Par M. Bougainville le jeune:* Dos tomos en 4. Paris 1754.

(27) *The doctrine and application of fluxions. Containing (Besides what is common on the subject) A number of new improvements in the theory. And the solution of a variety of new, and very interesting problems in different branches of the Mathematicks. By Thomas Sympson.* Dos tomos en 8. Londres 1750.

(28) *The doctrine of fluxions: not only explaining the elements thereof, but also its application and use in the several parts of Matematics and natural Philosophy. By Williams Emerson.* Un tomo en 8. Londres 1757.

(29) *Institutiones Analyticæ.*

(30) Tomo IV. de su Curso para los Caballeros Guardias Marinas.

(31) De sus Lecciones, cuyo título copiamos en una nota del Prólogo del Tomo antecedente.

del cálculo integral, el ramo mas dificultoso de toda la Matemática Especulativa. El que atendiere á la importancia de este cálculo, echará de ver que nos hemos quedado muy cortos: nos conformamos sin quexa alguna con este juicio, pues segun el plan que desde los principios habiamos formado de todo este Curso, quisimos destinar un tomo, y era el quarto, para tratar con la competente individualidad muchísimos puntos de tan árduo asunto. Al tiempo de poner por obra este pensamiento nos acobardaron algunos recelos que hemos manifestado en el Prólogo del Tomo primero, y nos ceñimos en asunto de cálculo integral á los puntos mas precisos.

Sin embargo, sobre que nuestro tratadito de cálculo integral, bien que diminuto, basta para la inteligencia de todos los tratados siguientes, tambien incluye la resolucion de las principales cuestiones á que suele y debe aplicarse en toda obra elemental como la nuestra. Nos lisongeamos con que atendidas estas circunstancias, no desdiga de los tratados á que se sigue. Un autor que considera un objeto por el enlace que tiene con otros, dexa cumplidamente concluida su tarea siempre que toca todos los puntos en que estriba la trabazon de su asunto con los demas: solo al que escribe de propósito sobre una materia le toca incluir en su escrito quanto sobre ella hay que saber.

Es tan varia la índole de las cantidades cuya integracion se ofrece egecutar quando se aplica la Matemática Pura á la Mixta, que ha sido preciso apelar á recur-

sos muy varios para integrar las cantidades diferenciales, empeñándose los mayores calculadores de este siglo en buscar diferentes métodos de integracion, con la esperanza de que suplan unos lo que otros no alcanzan. Aunque desde la invencion del cálculo diferencial se manifestó la necesidad del integral, y le adelantaron no poco los Matemáticos de fines del siglo pasado, y principios del presente, es constante que sus mayores progresos los ha hecho de unos treinta años á esta parte. En Inglaterra Cotes (32), Maulaurin, y Thomas Simpson; en Francia M.Clairaut, D'Alembert, Bougainville, Fontaine, el Marques de Condorcet, y los PP. Leseur, y Jacquier; en Alemania el Sr. Euler; en Italia la Señora Agnesi, Mr. de la Grange, la familia de los Ricatis, y otros matemáticos se han dedicado con mucha fortuna á promover este ramo de Analisis. De algunos de estos escritores hemos aprovechado lo que permitia nuestro intento; pero á ninguno te-

(32) La Obra de Cotes salió en latin con este título: *Harmonia mensurarum*, pero tan dificultosa, que un Monge Benedictino, Inglés, se dedicó á aclararla, publicando de ella una traduccion francesa con este título: *Analyse des mesures des rapports & des angles; ou reduction des intégrales aux logarithmes, & aux arcs de cercle. Par Don Charles Walmesley, Benedictin Anglais.* Paris 1749. un tomo en 4. Está escrita con suma claridad esta obra, y algo la hemos disfrutado. El autor del original, Cotes, murió de edad muy temprana, dexando frustradas las grandes esperanzas que en su extraordinaria penetracion y tino matemático tenia fundadas el gran Newton, quien manifestando su sentimiento decia, que si Cotes hubiera vivido, hubiéramos sabido algo.

tenemos tanto que agradecer como á M. Bezout, de cuyo curso hemos copiado lo mejor y mas dificultoso que sobre este asunto publicamos, por lo bien digerido que trae lo que nos hacia al caso, y porque en punto de elegancia y claridad no conocemos autor ninguno elemental que le pueda competir.

En el cálculo integral se hace patente la necesidad de los métodos que propusimos en el Tomo II. para resolver las equaciones superiores; porque la integracion de las fracciones racionales, por egemplo, no se puede alcanzar en muchos casos, conforme lo insinuamos, sin hallar los factores de su denominador, ó, lo que es lo propio, sin sacar todas sus raices, sean iguales, desiguales, todas reales, ó imaginarias algunas de ellas.

Tambien manifiesta el mismo cálculo la precision de acudir á la doctrina de las lineas curvas, y esto sucede siempre que tropezamos con aquellas diferenciales que no sufren una integracion cabal, pudiéndose integrar todas ellas con suponer la quadratura de una curva algebráica, si la diferencial no llevare mas que un signo de integracion, ó de una curva mecánica, siempre que llevare muchos. Y porque entre las curvas algebráicas las mas familiares son las secciones cónicas, á su quadratura procuró Newton reducir quanto pudo las integraciones de esta naturaleza, que se deben reducir particularmente á la quadratura del círculo y de la hipérbola, por lo mucho que las tablas trigonométricas y logarítmicas abrevian los cálculos.

Sin

Sin embargo, como la rectificacion de muchas curvas es mas facil de conseguir que su quadratura, aunque sea envolviéndolas con un hilo, cuyo método mecánico puede bastar en muchos casos; tiene mas cuenta valerse de este recurso para la integracion de las diferenciales que no caben en la regla fundamental. Pero el reducir una integral á la rectificacion de una curva algebráica es operacion sumamente trabajosa. Juan Bernouli abrió para esto el camino que otros Matemáticos han procurado allanar, haciendo general la proposicion de Newton, y dando á conocer los tropiezos que lejos de abreviar las integraciones, las harian mas trabajosas todavia siguiendo el mismo camino.

Con motivo de enseñar cómo se integran por aproximacion algunas diferenciales, volvemos á hablar de las series, declarando cómo se levanta á una potencia qualquiera una serie, ó un infinitinomio, cuya operacion es sumamente dificultosa sin el auxîlio del cálculo diferencial (33). Los que hubieren llegado hasta esta parte de nuestro Curso, podrán acudir á una obra de Stirling, Inglés (34), donde trata por un término nuevo algunos puntos muy importantes de la doctrina de las series. Entre otras

(33) Tambien enseñamos cómo se halla el radical, de dónde se deriva una serie propuesta, cuya operacion declaran poquísimos autores.

(34) Es obra original, y salió á luz con este título: *Methodus differentialis: sive tractatus de Summatione & interpolatione serierum infinitarum. Auctore Jacobo Stirling.* Londres 1764. un tomo en 4.

otras cosas enseña cómo se transforma una serie que converge muy lentamente en otra que converge con rapidez, cómo se suman las series que se derivan de la quadratura de las curvas, y otras muchas, que, sin que lo prevengamos, se conoce que son de muchísima importancia para la integracion de las cantidades. Pero como las series no dan mas que valores aproxîmados, no hemos de apelar á este recurso, sino despues de muy experimentada la insuficiencia de todos los demas; y aun entonces conviene sacarlas tan convergentes como sea posible, por no enredarnos en cálculos capaces de aburrir al mas infatigable calculador, á no ser que nos queramos contentar con valores que se aparten mucho del verdadero.

Incluimos en este Tomo la Trigonometría Esférica con la mira de que nos quedara mas lugar en el séptimo, que trata de Astronomía, en cuyas investigaciones hace esta Trigonometría mucho papel; y por no separarla de las analogías diferenciales que la completan, nos apartamos de la práctica general de todos los escritores, que suelen juntarla á continuacion de la Geometría Elemental con la Trigonometría Plana. A excepcion de algunas proposiciones del Curso de M. Bezout, todo lo que pertenece á la resolucion númerica y gráfica de los triángulos esféricos es de M. Mauduit (35). De su obra hubiéramos copiado tam-

(35) El título de esta obra está copiado en una nota del Prólogo del Tomo antecedente.

tambien las analogías diferenciales, á no ser que habiendo hecho el ánimo de que fuese nuestra Astronomía un extracto de la de M. de la Lande, nos estaba mas á cuenta apropiarnos todo lo que este insigne Astrónomo trae sobre el mismo asunto en el tomo tercero de su Astronomía. Las proporciones que resuelven los triángulos, así rectilineos, como esféricos, no pueden dar cabal el valor de la cantidad que se busca, si en el cálculo se desentiende el calculador de la variacion que padece alguno de los datos; pero saldrá verdadero su valor siempre que se llevare en cuenta esta variacion, sea incremento, ó decremento. Con todo eso, habia sido general el descuido de todos los Matemáticos en esta parte hasta que el célebre Cotes publicó un escrito (36) con el fin de manifestar los errores que de aquí se seguian en la Matemática Mixta, el qual se halla traducida en la Obra citada de M. Mauduit. Desde entonces salen mucho mas ajustados á la verdad los cálculos astronómicos, y todos los autores de Astronomía suponen conocida, ya que no la declaren, la doctrina de las analogías diferenciales.

Finalizaríamos aquí nuestro Prólogo, si no tuviéramos por indispensable satisfacer á muchísimos lectores, que no contentos con lo que publicamos de Matemática Especulativa, desearen saber en qué libros hallarán doctrina que mas quadre con sus fines ó su gusto. Ya hemos insinuado

mu-

(36) Con este título: *De Erroribus in mixta Mathesi.*

muchas veces que no conocemos para el caso obra ninguna que pueda compararse con los Elementos del P. Gherli, no solo por su claridad, mas tambien por la extension con que trata los asuntos. El estudio de esta Obra le aconsejamos á los que quisieren saber mucho, y mucho mas sabrán todavía si se alentaren á seguir otro camino, bien que no tan corto, ni tan llano. Despues de estudiado el Curso del P.Gherli, empéñense en estudiar la introduccion, el cálculo diferencial, y el cálculo integral de Euler (37);

(37) *Institutiones calculi integralis. Auctore Leonhardo Eulero.* Tres tomos en 4. Petersburgo 1768, 69 y 70.

De los elogios que he dado á las Obras de este gran Matemático siempre que se me ha ofrecido hacer mencion de alguna de ellas, se indicia el sumo aprecio en que las tengo. No conozco otras mas apropósito para el que deseare hacer sólidos progresos en el estudio de las Matemáticas; la inventiva de su autor, su extraordinaria destreza en todos los ramos de la Analisis, la multitud de los asuntos que ha tratado, y la profundidad con que los desentraña, preocupan á favor de los escritos que no se ha desdeñado de componer para los principiantes, de los quales han sacado no poco, muchas veces callándolo, los autores de algunas obras que he tenido presentes. Advirtiendo este docto varon estar errada la resolucion de una cuestion que trae al tomo segundo de su cálculo integral, pág. 426, dice allí mismo pág. 429.

Correctionem horum errorum petere licet ex seq. probl. 154. dum factores æquales in equationem peculiarem conjiciuntur. Malui autem hunc correctionis laborem industriæ lectorum relinquere, quam hoc opus à tali er-

" La enmienda de estos errores se saca »de la cuestion 54. que está mas adelante, »para quando se consideran los factores »iguales en una equacion particular. He te»nido por mas conveniente dexar al cui»dado de los lectores hacer esta enmienda, »que no quitar de mi tratado este descuido; »por

y como tengan constancia hasta llegar al término de esta carrera, podrán lisongearse con que ya no habrá para ellos especie nueva en la Matemática Pura, ni tratado alguno que pueda molestarlos. Pero antes de estudiar el cálculo in-

errore liberare; sæpe enim plus prodest errores, in quos etiam exercitatis incidere contingit, conservari, quo melius harum rerum studiosi addiscant quanta circumspectione cavendum sit, ne in ratiocinando hallucinemur .... Quod ad factores imaginarios attinet, integralium inde natorum reductio facilius in genere instituetur, unde in his differentialium gradibus determinatis, non amplius immorabor. Factores autem æquales hic data opera pro singulis gradibus accuratius persequi est visum, quia supra nimis cito ad evolutionem generalem properanti in insignem errorem illabi contigit, quem statim feliciter evitassem, si eadem methodo ibi essem usus. Hujusmodi autem vitium circa factores imaginarios hic non est pertimescendum, cum in hoc negotio nihil sub specie infinite parvi negligendum occurrat. Ex hoc autem fonte errores illi, quos supra commisi sunt nati, quod vi-

»por lo muy provechoso que suele ser de»xar en las obras los yerros que cometen »sus autores, aunque muy exercitados, »á fin de que los aficionados á estos estu»dios vean con quánta circunspeccion debe »proceder el que no quiera halucinarse al »tiempo de discurrir." Y hablando de lo mismo, pág. 503. añade: "Por lo que mi»ra á los factores imaginarios, la reduc»cion de las integrales que de aquí se deri»van, será mas facil de egecutar en gene»ral, por lo que no me detendré mas tiem»po en considerar los casos particulares. »Pero en quanto á los casos en que hay fac»tores iguales, me ha parecido convenien»te recorrerlos de propósito con mas cui»dado respecto de cada grado, porque por »haberme apresurado demasiado antes á »sacar la evolucion general, caí en un error »muy grande, lo que no me hubiera suce»dido, si me hubiese valido entonces del »mismo método que ahora. Aquí no es de »temer este tropiezo acerca de los factores »imaginarios, porque no hay que despre»ciar cantidad ninguna en forma de in»finitamente pequeño. De esto se origi»nó el descuido que padecí antes, des»cuido que pide sutileza el advertirlo, y »pa-

integral del Matemático Suizo, les tendrá muchísima cuenta estudiar el de los PP. Leseur, y Jacquier (38); cuyo tratado, sobre estar escrito con admirable método, y suma claridad, trae algunos modos de integrar, que no se hallan en la Obra de Euler, y tambien podrán leer las Lecciones de M. Cousin. Ha seguido este último autor en su tratado, para el qual ha disfrutado mucho las Obras de Euler, un rumbo del qual aseguramos que se agradarán no pocos lectores; porque antes de enseñar cómo se consigue la integracion de algunas clases de diferenciales, propone las cuestiones de Matemática Mixta de las quales se originan, con cuyo artificio quita á varios métodos de integrar los visos de abstractos, que tienen en los mas de los escritores.

Los aficionados que no llevaren miras tan sublimes, podrán contentarse con el tomo III. del Curso de Hennert,

 que

vitium subtile quo clarius sub oculos ponatur, una cum necessaria evolutione hic evolvam. »para hacerlo mas patente manifestaré »ahora en qué consiste, y cómo se en»mienda."

¡Quán rara es esta ingenuidad en los semisabios! El que mucho sabe, sabe que le queda mucho que aprender, ó que está ceñida dentro de límites muy angostos toda la sabiduría del hombre! Dichosos aquellos literatos qué en pocos años, en pocos meses, y solo con leer un prólogo se imponen en una facultad, señalan á su antojo el lugar que correspondia á cada facultativo y á sus escritos, y hablan y deciden confiados de que mirándolos con especial prediléccion los dotó naturaleza del don de nunca errar, ni en lo poco que saben, ni en lo mucho que ignoran.

(38) *Elemens du calcul integral. Par les PP. Leseur & Jacquier.* Dos omos en 4. Parma 1768.

que compone un tratadito muy precioso de cálculo infinitesimal por el estilo Euleriano, que sigue el autor en todos sus tratados. En Emerson hallarán unas tablas muy socorridas para integrar, y muchísimas aplicaciones á varios asuntos. Simpson, no solo trae mas doctrina todavía, sino que en punto de claridad lleva tambien notabilísima ventaja á Emerson; y finalmente, en el Curso del Abate Sauri (39), que se distingue poco de una traduccion de las Instituciones de Ricati, están extractadas algunas obras de cálculo integral, que por su gran dificultad han tenido hasta ahora pocos lectores. En el tomo quinto de esta última obra ván resueltas muchas cuestiones de Matemática Mixta, y algunas de ellas por el principio de la accion mínima, que abrevia mucho el camino de la verdad, cuyo principio es invencion de M. Euler, y aplica M. Cousin en sus Lecciones á la resolucion de una cuestion de Dinámica muy sonada en este siglo, cuyo empeño á su tiempo dirémos en qué consiste.

Ya que nos hemos detenido tanto en especificar los principales asuntos que incluye este tomo, razon será que ha-

(39) Se hallan extractadas en el Curso del Abate Sauri las obras que sobre el cálculo integral han publicado en Francia M. Fontaine, y el Marques de Condorcet, ambos individuos de la Real Academia de las Ciencias. Pero se remontan tan alto estos insignes Matemáticos, que para muchos ha de ser penoso el estudio de sus escritos, y por lo mismo es de agradar el trabajo de los que como el Abate Sauri, y los PP. Leseur y Jacquier han procurado facilitar su inteligencia á los principiantes.

hablemos tambien de los que hemos omitido, ó de intento, ó por olvido, y son la teórica de las curvas de doble curvatura, el método inverso de las tangentes, y la doctrina de las variaciones. Ninguna de estas omisiones tiene disculpa, pues aun quando no nos tocara internarnos en ninguno de los puntos omitidos, era indispensable manifestar por lo menos sus fundamentos, una vez que era mira y obligacion nuestra dar á la Nacion en su lengua una obra que pudiese enterarla de los principales descubrimientos que ha hecho la Matemática de un siglo á esta parte. No dexamos de conocer que si nos empeñáramos en cavilar, acaso no le faltarian á nuestro amor propio razones ó sofisterías con que disculpar estos descuidos; pero quédese el hacer tan honrado uso de la dialéctica para aquellos escritores que tienen la particular fortuna de contemplarse infalibles ó irreprehensibles. A nosotros, cuyas pretensiones no pueden ser tan sublimadas, no nos queda otro recurso que enmendar, en lo que cabe, nuestro yerro antes de rematar este Prólogo.

Las curvas de doble curvatura son aquellas que ademas de la curvatura particular á su contorno ó perímetro, tienen la de la superficie sobre que están trazadas; tal sería, por egemplo, un círculo trazado en la superficie de un cono. Sobre estas lineas publicó Clairaut á los diez y seis años de su edad una obra (40), por la qual

(40) *Recherches sur les courbes a double courbure.* Paris 1731 un tomo en 4.

todos los hombres grandes que habia entonces pronosticaron, y se verificó su pronóstico, que aquel muchacho llegaría á ser uno de los mayores Matemáticos de este siglo.

El método inverso de las tangentes consiste en hallar la equacion de una curva por medio de la expresion de su subtangente, normal, quadratura, &c. echándose de ver que estas operaciones son las inversas de las que proponemos en este Tomo núm. 371 y 564. Supongamos que $\frac{2y^2}{a}$ sea la expresion de la subtangente de una curva; por ser $\frac{ydx}{dy}$ la fórmula general de la subtangente, será $\frac{2y^2}{a} = \frac{ydx}{dy}$, de donde saldrá $2y^2dy = aydx$, $2ydy = adx$, é integrando sacarémos $\frac{2y^2}{2} = ax$, ó $yy = ax$, que es la equacion de una parábola cuyo parámetro es a.

El cálculo de las variaciones, invencion del célebre M. de la Grange, consiste en hallar las variaciones que padecen cantidades compuestas, como se quiera, de dos variables x é y, siempre que la equacion ó relacion primitiva entre dichas dos variables llega á padecer una mudanza qualquiera infinitamente pequeña. Sea, por egemplo, la equacion $ax = yy$, que corresponde á una parábola, cuyo parámetro es a, la abscisa x, y la ordenada y, y expresa la relacion entre a é y; si en esta equacion hacemos una alteracion infinitamente pequeña (y esto se puede egecutar de mil modos distintos) si añadimos, pongo por caso, al parámetro una cantidad infinitamente pequeña δa, por manera que dicho parámetro llegue á ser $a + \delta a$, es evidente que á fin de que sea $yy =$ el producto $(a + \delta a)x$, se-

será preciso añadir tambien á la variable y un incremento infinitamente pequeño δy, para sacar la equacion variada $(a + \delta a)x = (y + \delta y)^2$, la qual discrepa infinitamente poco de la primitiva $yy = ax$. Dicha equacion variada corresponde á otra parábola, cuyo parámetro es $a + \delta a$, la abscisa x, la misma que antes, y la ordenada $y + \delta y$ que solo discrepa de la ordenada y correspondiente á la abscisa x de la primer parábola, una cantidad δy infinitamente pequeña.

"Se considera, pues, dice Leonardo Euler (41), ,, en el cálculo de las variaciones la relacion que hay, sea ,, la que fuere, entre dos variables qualesquiera, expre- ,, sada con una equacion qualquiera, por cuyo medio se ,, determinan en virtud de cada valor particular que se la ,, dá á x, los valores correspondientes de y, suponiendo ,, entonces que á cada uno de los valores de y se le aña- ,, den, sea como fuere, unos incrementos infinitamente ,, pequeños, de modo que sus valores variados discrepen ,, infinitamente poco de los verdaderos que se deducen de ,, la equacion primitiva; en este sentido se dice que va- ,, ría la relacion entre x é y, y dichas partículas infini- ,, tamente pequeñas se llaman añadidas á los valores de y. ,, Pero es de suma importancia tener presente que las va- ,, riaciones ó incrementos que se conciben añadidos á ca- ,, da valor de y, ni son iguales entre sí, ni dependientes

(41) En el tom. III. de su cálculo integral, pág. 161, y sig.

„ unos de otros ; pendiendo tanto de nuestro arbitrio , que „ todos ellos , excepto uno ó algunos correspondientes á „ ciertos valores de *y*, se pueden considerar como nulos. „ Estas variaciones no guardan ley ninguna , ni la rela- „ cion primitiva entre *x* é *y* influye en la determinacion „ de estas variaciones , que hemos de considerar como en- „ teramente arbitrarias.

„ De aquí se evidencia que las variaciones son to- „ talmente distintas de las diferenciales , aunque ambas son „ infinitamente pequeñas , y se desvanecen del todo ; por- „ que la variacion de *y* pertenece al mismo valor de *x*, „ siendo así que la diferencial de la misma *y* ó *dy* , cor- „ responde al valor de *x* aumentado , ó á $x + dx$.

„ Por la idea que hemos dado en general del cálculo „ de las variaciones , prosigue el citado autor , queda du- „ doso de que sea de mucha utilidad , y así nos detendremos „ á manifestar su origen, refiriendo con qué motivo se ha „ inventado. Ha dado principalmente ocasion á este inven- „ to la resolucion de las cuestiones, cuyo objeto es deter- „ minar las curvas que gozan cierta propiedad de máxîmo „ ó mínimo ; y por no obscurecer este punto proponiéndole „ con mucha generalidad , nos pararémos á considerar la „ cuestion , que se dirige á hallar la linea curva , por la „ qual cae un cuerpo , con la circunstancia de que en el „ menor tiempo posible baxe desde un punto dado á otro „ punto dado. La naturaleza de los máxîmos y mínimos „ está manifestando desde luego que la curva ha de ser

„ de

„ de tal naturaleza, que si en su lugar se substituyere „ otra que discrepe infinitamente poco de ella, el tiempo „ de la baxada será de todo punto el mismo. Por consi- „ guiente la cuestion se debe resolver de manera que mi- „ rando como dada la curva pedida, el cálculo quadre „ tambien con otra curva que se diferencie infinitamente „ poco de ella, con el fin de calcular por este medio la „ diferencia que resulta en la expresion del tiempo; por- „ que haciendo despues igual con cero esta diferencia, se „ inferirá la naturaleza de la curva pedida. Pero estas cur- „ vas que discrepan infinitamente poco de la que se bus- „ ca se determinan comodísimamente con suponer que á „ las aplicadas correspondientes á cada abscisa se las aña- „ den ó quitan porciones infinitamente pequeñas, ó con „ considerar que padecen variaciones. Por lo comun „ basta considerar esta variacion en sola una aplicada, „ bien que no tiene inconveniente alguno considerarla en „ muchas, ó en todas ellas, siendo siempre indefectible „ llegar á una misma resolucion. Por este medio, no solo „ se hace mas patente la excelencia del método, sino tam- „ bien se consiguen mas completas las resoluciones de las „ cuestiones á que se aplica, de modo que se extiende „ igualmente á cuestiones propuestas con otras circuns- „ tancias."

ER-

ERRATAS.

Página.	*Linea.*	*Dice.*	*Léase.*
13	19	a, ó $-a$	a, o, $-a$.
24	22	del origen.	al origen.
35	17	el punto p.	el punto P.
35	ult.	de su ege, ...	respecto de su ege.
40	23	al otro lado del	al mismo lado que el.
67	13	qualquiera de	qualquiera M de.
71	18	CA ó CA.	CA ó Ca.
71	25	$\frac{ccxx}{tt}$.	$\frac{ccxx}{tt}$.
94	8	$(BC)^2$ ó Pr, con. . .	$(BC)^2$, con.
110	ult.	$\frac{yy-cc}{r} : \frac{cc}{r}$.	$\frac{yy-cc}{y} : \frac{cc}{y}$.
115	18	bc.	bs.
124	18	segundo aplica	se aplica.
136	10	$x^3 = aay$.	$x^3 = ayy$.
139	8	$y^n = x^m a^{m-n}$	$y^n = x^m a^{n-m}$.
140	8	restando esta equacion de la	restando de esta equacion la.
152	11	de la segunda.	de la primera.
164	25	$\frac{1}{2}xx$.	$\frac{1}{4}xx$.
171	10	$KH(CG)^2$.	$KH :: (CG)^2$.
194	11	CKH.	GKH.
215	20	porque como.	porque quando.
216	19	al otro del punto. . .	al otro lado del punto.
222	22	$AB = ab$.	$AB = b$.
224	12	$-2nn$.	$+2nn$.

Página.	*Linea.*	*Dice.*	*Léase.*
234	19	MD, MF.	MF, MD.
254	7	$\frac{(dy)^2}{2y} + \frac{(dy)^3}{3y^4}$.	$\frac{(dy)^2}{2y^2} + \frac{(dy)^3}{3y^3}$.
258	20	$\sqrt{(rr + xx)}$.	$\sqrt{(rr - xx)}$.
259	12	son semejantes. . . .	son iguales.
161	1	de un arco.	de la cotangente de un arco.
261	23	diferencial.	diferencial, ni transcendental.
267	1	$y = \frac{a}{x}$.	$y = \frac{ab}{x}$.
277	27	*su*.	*Su*.
283	al marg.	263.	163.
284	16	$\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x}$	$= \frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x}$.
285	16	$b^2 - ay^2$.	$b^2y - ay^2$.
285	24	$\frac{2ax - 2xx}{3a - 3x}$.	$\frac{2ax - 2xx}{3a - 2x}$.
286	1	MH.	MK.
287	1	BN, AB.	$BNAB$.
287	22	CAH.	GAH.
289	15	$\frac{ydx}{y} - x$.	$\frac{ydx}{dy} - x$.
290	17	$\frac{ax^2}{3x\sqrt[3]{[(a+x)^2]}}$	$\frac{ax^2}{3x\sqrt[3]{[x(a+x)^2]}}$
303	22	$2ax + 2ay = cc$. . . .	$2ax + 2ay + 2xy = cc$.
305	9	$\frac{(a-x) \times dx + ydy}{\sqrt{[(a-x)^2 + yy]}}$.	$\frac{(a-x) \times -dx + ydy}{\sqrt{[(a-x)^2 + yy]}}$.
305	20	centro C.	centro B.
305	22	en c.	en C.
306	11	$a(cc - 2ac)$.	$a\sqrt{(cc - 2ac)}$.

Página.	*Linea.*	*Dice.*	*Léase.*
312	10	$ax^{m-2}dx$.	$ax^{m-2}dx^2$.
337	15	MRM.	MRm.
337	ult.	Mm.	MR.
351	9	$y+dy:dy$.	$y+dy:y$.
351	10	(324).	(304).
357	14	(424).	(II. 424).
363	4	zdz.	$z^p dz$.
367	6	$-(c^3+ba)^{\frac{3}{2}}$	$-(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}$.
370	18	denomin. $(\frac{4}{5}+1)2b$. . .	$(\frac{4}{5}+1)2b^2$.
383	18	$\frac{5x^4}{128r^6}$.	$\frac{5x^3}{128r^6}$.
386	15	$+\frac{a^{12}}{11x^{11}}$.	$+\frac{a^9}{8x^8}+\frac{a^{12}}{11x^{11}}$.
392	16	esto es $ax-xx$. . .	esto es $\sqrt{(ax-xx)}$.
394	20	el arco M'.	el arco AM'.
403	8	$x=z$.	$x^y=z$.
410	21	en $=a^3x^{-2}$.	en $y=a^3x^{-2}$.
411	8	mas.	mas rápidamente.
413	23	$\sqrt[p]{(z^p a^{p-q})}$.	$\sqrt[p]{(z^q a^{p-q})}$.
415	18	de a.	de a y x.
416	8	$\frac{5x^9}{1252b^7}$.	$\frac{5x^9}{1152b^7}$.
419	5	$-1=$.	$-\frac{1}{2}=$.
419	16	segmento.	semisegmento.
434	21	abscisa.	altura.
434	23	diferencia.	grueso.
439	27	es $\frac{pbbxx}{2aa}$.	es $\frac{pabbxx}{2aa}$.
441	1	x, y será.	a, y será.

Página.	Linea.	Dice.	Léase.
441	6	$x = 0$.	$x = a$.
444	15	$\sqrt{(ax - xx)}$.	$\sqrt{(2ax - xx)}$.
447	25	APD.	APM.
448	14	$2cy$.	$2my$.
449	1	$\frac{m}{r}$.	$\frac{mz}{r}$.
457	3	si llamamos p.	si llamamos $1 : p$.
457	13	AB.	AP.
459	21	$\sqrt{(\frac{a^4}{bc} -}$	$\sqrt{(\frac{n^4}{bb} -}$.
461	10	$- pc$.	$- pc^2$.
466	4	$- 3Ax$.	$- 3Ax^2$.
468	2	$x^m dx(a + bx^n)^{-r}$. . .	$x^m dx(a + bx^n)^{p-r}$.
475	11	$\frac{Qdx}{p}$.	$\frac{Qdx}{P}$.
481	15	$\frac{x^{15}dx + adx}{x^{26} + x^{18}}$.	$\frac{x^{15}dx + adx}{x^{20} + x^{18}}$,
487	14	$= \frac{dy}{y}$.	$= \frac{bdy}{y}$.
487	20	$\frac{ax^p}{Le^p}$.	$Le^{\frac{ax^p}{p}}$.
487	21	$\frac{ax^p}{e^p}$.	$e^{\frac{ax^p}{p}}$.
488	25	arco	grado.
489	15	multiplicados uno por otro.	múltiplos uno de otro.
489	26	$\mp(y\sqrt{-1}\sqrt{(1-yy)})$	$\mp(y\sqrt{-1}-\sqrt{(1-yy)})$
491	10	$= e^{-x\sqrt{-1}}$.	$= -e^{-x\sqrt{-1}}$.
491	18	$+ e^{-x\sqrt{1}}$.	$+ e^{-x\sqrt{-1}}$.
493	20	$\frac{dP}{p}$.	$\frac{dP}{P}$.

Pàgina.	*Linea.*	*Dice.*	*Léase.*
495	17	$P = e^{\frac{gb+b'}{g+K}}$.......	$P = e^{\frac{gb+b'}{g+K}t}$
499	4	$(a + by)$........	$(a + by^q)$.
499	15	$z - b^2$.........	$z - by^2$.
500	21	$+ yzdz$.........	$- yzdz$.
511	enfrente del n. 684 póngase á la margen 265.		
528	2	recíprocamente....	respectivamente.
535	1	$\cos(\frac{1}{2} - c)$.......	$\cos(\frac{1}{2}s - c)$.
539	2	BAC..........	ABC.
544	17	MM..........	Mm.

IN-

INDICE

De lo que contiene este Tomo III.

De

ELE-

ELEMENTOS DE SECCIONES CÓNICAS.

INTRODUCCION.

1 LA teórica de las lineas curvas compone un ramo de las Matemáticas muy dilatado, cuya importancia corre parejas con su estension. Si la mira principal con que escribimos esta Obra no señalára límites muy angostos á los tratados de que debe tegerse, nos empeñaríamos gustosísimos en las investigaciones peculiares á este asunto; pero á pesar de la obligacion que nos corre de ceñirnos, no podemos dejar de tocar como de paso los fundamentos de la doctrina de las *curvas algebraicas* : lo que en orden á estas digéremos servirá como de introduccion á lo que llevamos ánimo de probar acerca de las curvas llamadas *secciones cónicas.*

2 Las lineas curvas han de ser regulares para poder servir de egercicio á una geometría rigurosa : quiero decir, que han de ser de tal naturaleza que se puedan trazar en virtud de una ley constante , que determine la situacion ó posicion de todos sus puntos. Toda linea regular tiene alguna propiedad uniforme que conviene igualmente á todos sus puntos, y que no conviene sino á ellos , y esta propiedad constituye la naturaleza ó esencia de dicha linea. La naturaleza del círculo, por egemplo , consiste en la igual-

Fig. dad de sus radios, cuya igualdad distingue la circunferencia del círculo de otra qualquiera linea curva, y determina la posicion de todos los puntos de la linea circular, fijándolos todos á la misma distancia del centro.

3 El principio fundamental de quanto han escrito los modernos acerca de las curvas consiste en espresar su esencia por una equacion algebraica. En el plano en que está

1. trazada una linea curva MM', se toma á arbitrio un punto fijo A llamado *el origen*, por el qual se tiran á discrecion dos rectas AB, AD. Desde cada punto M de la linea MM', se tiran rectas MP, MQ, paralelas á las rectas AB, AD hasta que las encuentren. La una, como MP ó su igual AQ, se llama la *Ordenada* ó *Aplicada*: la otra, como MQ ó su igual AP, se llama *la Abscisa.* Por lo que, la recta AB se llama *la Linea ó el Ege de las abcisas*, y la recta AD *la Linea ó el Ege de las ordenadas*, y el nombre de *Coordenadas* se dá á la abscisa y ordenada juntas pertenecientes á un mismo punto; MP y MQ, ó MP y PA, ó finalmente MQ y QA son las coordenadas del punto M.

4 La propiedad peculiar á cada punto de una linea regular (2) que constituye su caracter y distingue los puntos que la pertenecen de los que no son suyos, se reduce á cierta relacion entre las coordenadas que se cifra en una equacion algebraica indeterminada, cuya equacion se llama *la Equacion de la curva*, cuya naturaleza espresa.

5 Supongamos que siendo dado, por egemplo, el círcu-

lo

lo $mMm'm''M'$ trazado desde el centro C con el radio CM, se nos pida la equacion que espresa su naturaleza. Señalo á arbitrio el origen en el punto A, tomo AB por la linea de las abscisas, y AD perpendicular á AB por la linea de las ordenadas, y si desde un punto M tomado á arbitrio en la circunferencia, se tiran MP, MQ paralelas á AD, AB, serán MP, MQ las coordenadas del punto M. Se me pide, pues, la equacion indeterminada que esprese su relacion de un modo general; esto es, que esprese no la relacion particular de las rectas MP, MQ trazadas en la figura, sino la razon general que hay entre la ordenada y la abscisa de un punto qualquiera de la circunferencia. Se ha de sacar esta equacion de la propiedad que tiene cada punto de la circunferencia $mMm'm''M'$ de estar á una distancia fija CM del centro C. Fig. 2.

Pende, pues, esta propiedad de la longitud dada del radio CM, y de la situacion dada del centro C. La situacion del centro C respecto de las rectas AB, AD, á las quales se ha de referir todo, está determinada con tirar las rectas CF, CE paralelas á AB, AD. Porque siendo dada la posicion del centro C, y de las rectas AB, AD, será tambien conocida la cantidad de las rectas CF, CE; y recíprocamente, siendo dadas de posicion las rectas CE y CF, estará determinada la posicion del centro C.

Representemos por letras estas rectas dadas, y llamemos CE, a; CF, b; y el radio CM, r. Representan, pues, las letras a, b, r cantidades constantes, que son siempre

Fig. unas mismas en qualquiera punto de la circunferencia que
2. esté el punto M, por ser independiente su cantidad de la eleccion del punto M. Pero si representamos la abscisa AP ó MQ por la letra x, y la ordenada MP ó AQ por la letra y: estas dos letras x é y espresarán cantidades variables. Porque como busco una equacion que convenga igualmente á todos los puntos de la circunferencia, esto es, una equacion, que del mismo modo que espresa la relacion entre las coordenadas AP, PM del punto M, esprese tambien la relacion de las coordenadas AP', $P'm'$ de otro punto qualquiera m' de la circunferencia; es preciso que esprese indistintamente la letra x la abscisa AP, y la abscisa AP', y en general una abscisa qualquiera, y ha de espresar tambien la letra y la ordenada PM, y la ordenada $P'm'$, y en general una ordenada qualquiera: teniendo presente que x é y espresan en la equacion las coordenadas de un mismo punto, bien que de un punto qualquiera.

Para darnos mejor á entender ciñámonos al punto M. Si su ordenada PM corta la recta CF en G, tendremos $GM = MP - PG = MP - CE = y - a$, y $CG = CF - FG = CF - AP = b - x$. Pero por ser rectángulo el triángulo CGM, los quadrados de GM y CG juntos valdrán el quadrado de la hypotenusa CM. Luego $(y-a)^2 + (b-x)^2 = rr$, ó $yy - 2ay + aa + bb - 2bx + xx = rr$. Esta equacion no es privativa del punto M: conviene igualmente á otro punto qualquiera de la circunferencia, pongo

por

por caso, al punto m'. Porque respecto de este punto m', Fig.
tenemos $m'G' = m'P' - P'G' = m'P' - CE = y - a$, y 2.
$CG' = FG' - FC = AP' - FC = x - b$. A mas de esto $Cm' = CM = r$. Luego la equacion $(m'G')^2 + (CG')^2 = (Cm')^2$ que se saca del triángulo rectángulo $CG'm'$, espresada analyticamente será $(y - a)^2 + (x - b)^2 = rr$, ó $yy - 2ay + aa + xx - 2bx + bb = rr$, la misma cabalmente que nos dió el punto M.

Representa, pues, analyticamente esta equacion la naturaleza del círculo. Es de aquellas á quien los Analystas llaman indeterminadas, porque contienen dos incógnitas, ó por mejor decir dos variables, cada una de las quales tiene una infinidad de valores, pero que estan con tal dependencia la una de la otra en virtud del enlace que entre ellas representa la equacion, que determinada la una de las dos variables, queda tambien determinada la otra. Si queremos que en la equacion $yy - 2ay + aa + xx - 2bx + bb = rr$, represente la variable x la abscisa determinada AP que llamaremos c, la equacion indeterminada se transformará en estotra igualdad determinada $yy - 2ay + aa + cc - 2bc + bb = rr$, en la qual y, que ya no es variable, sino incógnita, espresa el valor de la ordenada determinada PM. Y si le diéramos á x el valor d, que supondremos ser el de la abscisa AP', la equacion indeterminada se transformaria en estotra determinada $yy - 2ay + aa + dd - 2bd + bb = rr$, donde y, que yá es determinada, representa la ordenada $P'm'$.

Fig. 6 Podríamos representar por una equacion mas sencilla la naturaleza del círculo, fijando en otro punto el origen. Si le señaláramos en el centro, siendo siempre las coor-
3. denadas perpendiculares entre sí, la abscisa x seria CP, y la ordenada y, seria PM; y como en el triángulo rectángulo CPM, los quadrados de las coordenadas son iguales al quadrado del radio, sacaríamos para el círculo la equacion $xx + yy = rr$, ó $yy = rr - xx$.

7 Sacaríamos tambien para representar la naturaleza del círculo una equacion mas sencilla que la prime-
4. ra (5), si la sacásemos de otra propiedad de la misma curva. Consiste en que la perpendicular PM baxada desde un punto M (I. 474) del círculo á la linea AB, es media proporcional entre las dos partes AP y PB. Llamarémos, pues, AB, a; AP, x; PM, y; será $PB = AB - AP = a - x$; y pues suponemos $AP : PM :: PM : PB$, será, substituyendo en lugar de estas lineas las letras que las representan, $x : y :: y : a - x$; de donde saldrá multiplicando estremos y medios $yy = ax - xx$, que tambien espresará la naturaleza del círculo.

8 Puede, pues, ser representada una misma linea por equaciones diferentes, cada una de las quales la representa, digamoslo así, con distinto respecto. Consiste en gran parte la Analysis de las curvas en determinar de tal modo la posicion de los eges, que resulte para espresar una curva, la equacion mas sencilla, ó la mas adequada al intento que lleva el calculador.

An-

9 Antes de pasar adelante conviene prevenir que Fig.
hay curvas regulares, cuya naturaleza no se puede espresar por una equacion analytica.

Supongamos, por egemplo, que sobre el diámetro *AB* 5.
se trace un círculo *ADB*, y que bajando desde cada punto de la circunferencia una perpendicular *DP* al diámetro *AB*, se la prolongue hasta *M* de modo que sea *PM* igual al arco correspondiente *AD* : la curva *AMC* que pasare por todos los puntos *M*, será regular por ser trazada en virtud de una ley constante. Sin embargo no es posible cifrar su naturaleza en una equacion algebraica, porque considerando como abscisas los senos versos *AP*, no se conoce medio alguno algebraico para espresar su relacion con los arcos *AD*, ó con las ordenadas *PM* que son iguales á estos arcos, cuyo valor no se puede hallar exactamente.

A esta especie de curvas las llamamos *Curvas transcendentes*, *mecanicas* ó *irracionales* : para distinguirlas de aquellas que podemos representar por equaciones algebraicas, por cuya causa las llamamos *curvas algebraicas*, *geométricas* ó *racionales*. Para las curvas transcendentes es indispensable una especie de analysis conocida con los nombres de *cálculo infinitesimal*, *diferencial* ; *cálculo fluxionario* ó *cálculo de las fluxiones* ; de que trataremos mas adelante.

10 La diferencia esencial que hay entre las curvas geométricas y mecánicas, se percibirá mucho mejor quando hubiéremos tratado de unas y otras ; por ahora nos

Fig. ceñirémos á especificar algo mas, aunque sea á costa de una repeticion, las señales características de las curvas algebraicas. Es algebraica una curva 1.° Quando las dos co-
2. ordenadas *AP*, *PM* son dos lineas rectas finitas que concurren en un punto *P* donde forman un ángulo dado *APM*. 2.° Quando la una de las coordenadas *AP* empieza constantemente en un punto fijo *A*, y se toma en una sola linea *APP'*, y la otra ordenada *PM*, *P'm* es siempre paralela á sí misma. 3.° Quando su equacion puede no llevar mas que dos incógnitas x é y, que representan las coordenadas, y no contener sino especies que representen cantidades finitas. 4.° Su equacion ha de espresar la relacion entre cada punto de la curva cuya equacion es, y cada punto de la linea recta á la qual se refiere la curva: de modo que para cada punto de la curva sea siempre una misma la equacion.

11 Quanto declaramos en esta introduccion debe solo entenderse de las curvas algebraicas que distinguimos en finitas, infinitas, y mixtas. Una curva es *Infinita* quando tiene ramos que se estienden al infinito, como las curvas
6. *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Es *Finita* una curva quando estando ceñida en un espacio limitado vuelve sobre sí, ora no dé
7. mas que una vuelta, como el círculo ú como el óvalo *G*, ora se anude, y vuelva á anudar muchas veces como un 8, ó como las figuras *H*, *I*, *K*, *L*, *M*. Finalmente, la llamamos *Mixta* quando despues de haber dado algunas vueltas en un espacio finito donde se dobla, arroja por fin

fin ramos al infinito, como *N*, *O*, *P*, *Q*. Fig.

12 Todas estas inflexiones y curvaturas, y en general todas las singularidades de las curvas algebraicas, están tan fielmente cifradas en la equacion que espresa su naturaleza, que la curva trazada en el papel nada ofrece á la vista que no pueda leer en su equacion el que supiere descifrarla. Sucede aún que halla la Analysis en una curva calculando su equacion, singularidades que nunca podrian averiguar los sentidos por otro camino. 8.

Para enterarse del modo con que representa una equacion el contorno de una linea, es menester considerar que la abscisa que es cero en el origen, vá creciendo por todos los grados imaginables hasta el infinito, asi positivo, como negativo. La letra x que representa la abscisa, tiene pues succesivamente una infinidad de valores diferentes positivos y negativos. Substituidos estos valores unos despues de otros en la equacion indeterminada de la curva, la transformarán en otras tantas equaciones determinadas en que no habrá mas incógnita que y, cuyos valores serán las raices de dichas equaciones. Estos valores ó raices espresan las ordenadas que corresponden á cada abscisa. Por lo que, tiene cada abscisa en su estremo una ó muchas ordenadas, segun tiene una ó muchas raices la igualdad en que se transforma la equacion de la curva, quando se substituye en lugar de x el valor de la abscisa. Como la linea curva pasa por todos los estremos de estas ordenadas, tendrá tantos ramos quantos fueren los valores de y en la equacion. Y quando pue-

de

Fig. de el Álgebra hallar estos valores, por ellos se conoce si los ramos á que pertenecen son finitos ó infinitos, qual es su direccion y posicion: en una palabra, quanto tienen de notable.

Así la equacion del círculo dada arriba (5) $yy - 2ay + aa + xx - 2bx + bb = rr$, ó $yy - 2ay + aa = rr - bb + 2bx - xx$, ó $(y-a)^2 = rr - bb + 2bx - xx$, tiene dos raices ó valores diferentes; es á saber $a + \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}$, y $a - \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}$. Por lo que, cada abscisa $AP = x$ tiene dos
2. ordenadas $y = PM$ ó PM'. Tiene pues la curva dos ramos que son las dos semicircunferencias, la superior $mMm'm''$, y la inferior $mM'm''$. La primera pasa por los vértices de todas las ordenadas $PM = y$ iguales á $a + \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}$, y la segunda por los estremos de todas las ordenadas $PM' = y$ iguales á $a - \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}$.

Pero en estotra equacion indeterminada $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$, y no tiene mas que un valor $\frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$. Por consiguiente cada abscisa de la curva que representa esta equacion no tiene mas que una ordenada. Hablando con propiedad no tiene la curva mas que un ramo; pero este ramo se cuenta por dos, porque se estiende al infinito á la parte positiva y á la parte negativa.

13 No solo indica la equacion de una curva el número de sus ramos, sino que señala tambien su posicion. Los valores positivos de x representan abscisas positivas, y los

los valores negativos de x representan abscisas negativas. Fig.
Asimismo los valores positivos de y representan ordenadas positivas, y los valores negativos de y representan ordenadas negativas. Es uso comun, aunque arbitrario y libre, tomar las abscisas positivas ácia la derecha, y las negativas á la izquierda; las ordenadas positivas encima del ege de las abscisas, las negativas debajo. El ángulo
BAD se llama *el Ángulo de las abscisas y ordenadas posi-* 1.
tivas ó *el Ángulo de las coordenadas positivas*, porque qualquiera de los puntos de la curva que se hallare en este ángulo, tendrá positiva su abscisa y su ordenada. Por la misma razon *BAd* es *el Ángulo de las abscisas positivas y de las ordenadas negativas*; DAb *el Ángulo de las abscisas negativas y de las ordenadas positivas*; y finalmente *dAb* se llama *el Ángulo de las abscisas y ordenadas negativas*, ó *el ángulo de las coordenadas negativas.*

14 Quando puede resolver la analysis la equacion de una linea curva, sus raices manifiestan la posicion de los ramos de dicha curva, y señalan en qué ángulo ó en qué ángulos caen estos ramos. Quando en una raiz siendo positivas las x, lo son tambien las y, el ramo que dicha raiz representa, está en el ángulo de las coordenadas positivas; pero si las x positivas dán y negativas, está el ramo en el ángulo de las abscisas positivas, y de las ordenadas negativas. Si las x negativas hacen positivas las y, está el ramo en el ángulo de las abscisas negativas y de las ordenadas positivas; pero si á las x negativas corresponden y negativas, está el ramo

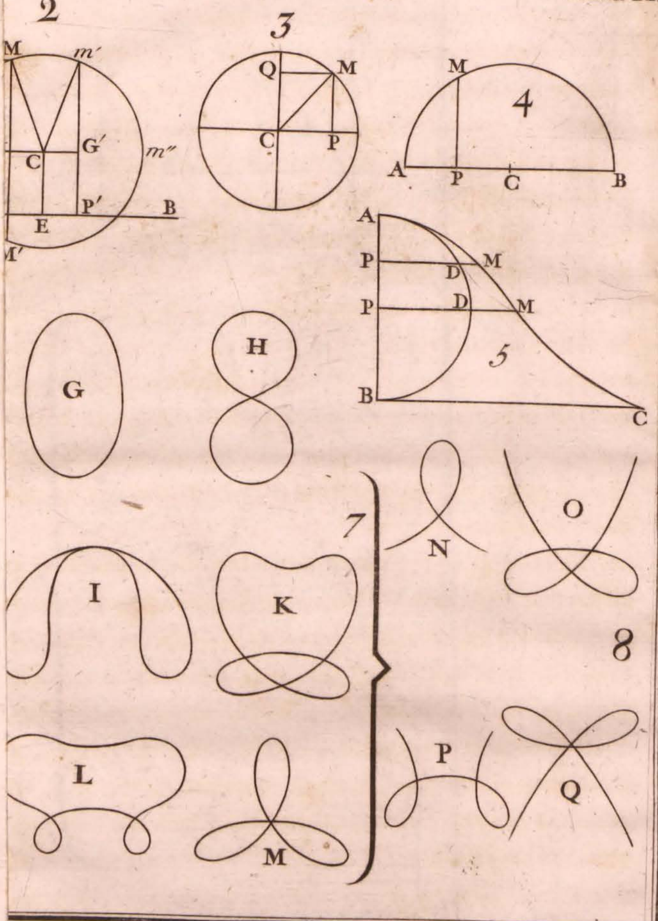
en

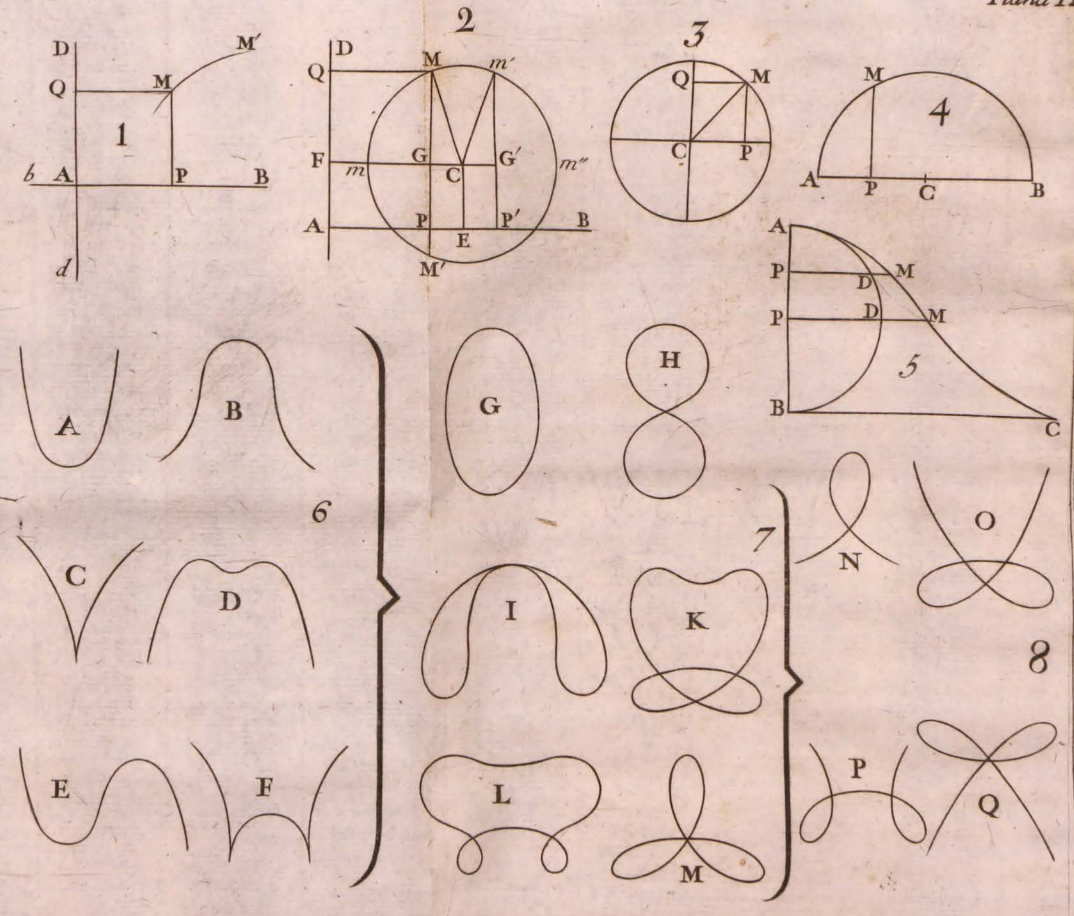
Fig. en el ángulo de las coordenadas negativas.

Así, en la curva representada por la equacion $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$, ó $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$, manifiesta la equacion que en el origen donde x es cero, el valor de y
9. es $\frac{5}{6}a$. Es pues $Aa = \frac{5}{6}a$ el valor de la primera ordenada. Suponiendo despues x positiva, se echa de ver que á medida que vá creciendo, los términos $\frac{xx}{6a}$ y x crecen tambien sin que disminuya el término constante $\frac{5}{6}a$; de donde resulta, que creciendo la abscisa x, la ordenada $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$ que es positiva, crece tambien. Luego del lado de las abscisas positivas no tiene la curva mas que un ramo *ad*, que está todo entero en el ángulo de las coordenadas positivas, y que saliendo del estremo *a* de la primera ordenada *Aa*, se aparta al infinito del ege de las abscisas, y del ege de las ordenadas.

Para conocer el curso de esta misma linea ácia el lado de las abscisas negativas, haremos x negativa, cuyo supuesto transforma la equacion $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$ en $y = \frac{xx}{6a} - x + \frac{5}{6}a$. Donde se ve que mientras fuere x menor que $6a$, $\frac{xx}{6a}$ no aumentará tanto el término constante $\frac{5}{6}a$, como le disminuirá el término negativo $-x$. Vá, pues, menguando al principio la ordenada y, á medida que crece x negativa, de modo que y, que en el origen era $\frac{5}{6}a$, disminuye hasta ser cero, en llegando á ser x igual á a. Porque entonces y es $\frac{aa}{6a} - a + \frac{5}{6}a = 0$. Si se toma pues la abscisa negativa *AE* igual á a, la ordenada de esta abscisa será cero, esto es la curva *aE* pasará por el punto *E* del ege de las abscisas.

Plana 12.




1
2
3
4
5
6
7
8
D
Q
M
M'
b
A
P
B
d
m'
m''
F
G
G'
C
P'
E
m
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q

sas. Si prosiguiere creciendo la abscisa x ácia la parte nega- Fig.
tiva, llegarán á ser negativas las ordenadas, y lo son hasta
que llegue á ser $x = 5a = AI$. Entonces vuelve á ser la
ordenada igual á cero, $y = \frac{25aa}{6a} - 5a + \frac{5}{6}a = 0$. La 9.
curva, despues de haber pasado por debajo del ege de las
abscisas hasta cierto término, vuelve á subir, y corta dicho ege en el punto I distante $5a$ del origen A. Prosiguiendo en crecer la abscisa x, siempre del lado negativo, vuelve á ser positiva la ordenada y, y llega á ser igual á la primera ordenada $Aa = \frac{5}{6}a$, quando x vale $6a$. Creciendo despues siempre x, el término positivo $\frac{xx}{6a}$ es mayor que el término negativo $-x$, y vá siempre creciendo la ordenada y á medida que crece la abscisa, de donde resulta el ramo infinito Im que se aparta al infinito del uno y otro ege.

Se hará facilmente cargo de todo esto, y verá patentemente el curso de la linea, el que substituyese succesivamente en la equacion $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$, diferentes valores en lugar de x, como $3a$, $2a$, a, ó $-a$, $-2a$, $-3a$, $-4a$, $-5a$, $-6a$, $-7a$ &c. y verá que á estas abscisas corresponden las ordenadas $5\frac{1}{3}a$, $3\frac{1}{2}a$, $2a$, $\frac{5}{6}a$, 0, $-\frac{1}{2}a$, $-\frac{2}{3}a$, $-\frac{1}{2}a$, 0, $\frac{5}{6}a$, $2a$. Hecho este cálculo, podrá trazar por puntos la porcion de la curva que coge desde la abscisa $3a$ hasta la abscisa $-7a$, quiero decir, que podrá determinar once puntos de la curva, bastante inmediatos los unos á los otros, para que sea facil trazarla con alguna exactitud, tirando con mano suelta una linea cur-

Fig. curva por estos once puntos. Para cuyo fin, despues de tiradas dos rectas AP, AQ que se corten, si se quiere, á ángulos
9. rectos, en el punto A donde estará el origen, se tomarán en el ege de las abscisas AP, á mano derecha, tres partes AB, BC, CD iguales á la recta dada a, para sacar las tres abscisas positivas $AB = a$, $AC = 2a$, y $AD = 3a$, y á mano izquierda siete partes tambien iguales, para determinar las siete abscisas negativas $AE = -a$, $AF = -2a$, $AG = -3a$, $AH = -4a$, $AI = -5a$, $AL = -6a$, $AM = -7a$. Por los puntos D, C, B, E, F, G, H, I, L, M se tirarán paralelas á AQ, que serán las ordenadas de dichas abscisas, y se las dará la longitud calculada haciendo $Dd = 5\frac{1}{3}a$, $Cc = 3\frac{1}{2}a$, $Bb = 2a$, $Aa = \frac{5}{6}a$, $Ff = -\frac{1}{2}a$, $Gg = -\frac{2}{3}a$, $Hh = -\frac{1}{2}a$, $Ll = -\frac{5}{6}a$, $Mm = 2a$. Los puntos d, c, b, a, E, f, g, h, I, l, m determinados de este modo, son otros tantos puntos de la curva, que representa la equacion $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$, ó $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$; y como están bastante próximos los unos á los otros, si fuere muy corta la recta a, se manifestará bastante la forma de la curva, trazando una linea por todos estos puntos.

15 Si consideramos la curva cuya equacion es $xxy + 2axy - axx + aay = 0$, ó $y = \frac{axx}{x^2+2ax+a^2} = a\left(\frac{x}{a+x}\right)^2$, hallarémos que $x = 0$ dá tambien $y = 0$, de
10. donde se infiere que pasa la curva por el punto A. Si tomamos despues succesivamente varias abscisas, todas positivas, mayores las unas que las otras, esto es, si x vá siempre

pre creciendo, el numerador y el denominador del quebrado $\frac{x}{a+x}$ crecerán tambien; pero crecerá el numerador á proporcion mas que el denominador. Por lo que, el quebrado $\frac{x}{a+x}$ y el valor $a\left(\frac{x}{a+x}\right)^2$ de la ordenada y irán creciendo de suerte que el ramo AB que está á la parte de las abscisas positivas, se halla entero en su parte superior respecto de la linea de las abscisas, de la qual se vá apartando mas y mas. No se aparta sin embargo al infinito, sino solo de un intervalo igual á la linea recta dada a. Porque aun quando fuese x infinita, se debería, considerar como igual á $a+x$ (II. 1 8 3), y y, que es siempre $a\left(\frac{x}{a+x}\right)^2$, sería igual á $a\left(\frac{x}{x}\right)^2 = a$. Fig.

Del lado de las abscisas negativas es mas singular el curso de esta curva. Para señalarle, supondremos x negativa en la equacion $xxy + 2axy - axx + aay = 0$ de la curva, con lo que se transformará en $xxy - 2axy - axx + aay = 0$ que se reduce á $y = a\left(\frac{x}{a-x}\right)^2$ ó $a\left(\frac{x}{x-a}\right)^2$ segun fuere x menor ó mayor que a. Veamos desde luego que ordenadas corresponden á las abscisas menores que a. Se echa de ver que quanto mas creciere x, tanto mas crecerá el numerador del quebrado $\frac{x}{a-x}$, y menguará el denominador. El aumento del uno y la diminucion del otro contribuyen para que aumente el quebrado. Por consiguiente la ordenada $y = a\left(\frac{x}{a-x}\right)^2$ crecerá con la abscisa, pero con tal rapidez que llegará á ser infinita quando la abscisa $x = AC$ llegare á ser igual á a. Porque entónces $y = CD$ es $= a\left(\frac{a}{a-a}\right)^2 = \frac{a^3}{0}$: pero una cantidad fini-

Fig. ta a^3 dividida por o representa el infinito (II. 180), porque el cero ó por mejor decir una cantidad infinitamente pequeña cabe una infinidad de veces en una cantidad finita. Siendo despues la abscisa x mayor que a, la ordenada $y = a\left(\frac{x}{x-a}\right)^2$ será al principio excesivamente grande, por ser excesivamente pequeño el denominador $x - a$. Pero á medida que creciere x, crecerá tambien el denominador y aun con mayor proporcion que el numerador, de suerte que menguará la fraccion y con ella la ordenada y. Sin embargo no llegará sino hasta cierto punto esta diminucion; porque en llegando á ser infinita la abscisa, el denominador $x - a$ se deberá considerar como (II. 183) igual al numerador x. Es, pues, entónces $y = a\left(\frac{x}{x}\right)^2 = a$. Este ramo EF de la curva que corresponde á las abscisas negativas mayores que a, viene pues desde el infinito acercándose al ege de las abscisas: pero no se acerca mas que de la cantidad a. Todo el curso de la linea es, con poca diferencia
10. qual se representa en $BADEF$ que ha sido trazada por puntos en virtud del cálculo de las ordenadas cuyo resultado es el siguiente.

$x =$ *inf.* $3a,\ 2a,\ a,\ 0, -\frac{1}{4}a, -\frac{1}{2}a, -\frac{3}{4}a, -a, -1\frac{1}{2}a, -2a, -3a, -$ *inf.*
$y = a.\ \frac{9}{16}a,\ \frac{4}{9}a,\ \frac{1}{4}a,\ 0,\ \frac{1}{9}a,\ a,\ 9a,$ *inf.* $9a,\ 4a,\ \frac{9}{4}a,\ a,$

16 Aunque los dos últimos egemplos están ceñidos á casos particulares, nos autorizan sin embargo para inferir dos consecuencias cuya generalidad se viene á los ojos.

1.° Una linea algebraica pasa por el origen, quando es tal su equacion, que el supuesto de $x = 0$ dá $y = 0$,

ó

ó es $y = o$ una de sus raices; ó quando en el supuesto de $y = o$, es $x = o$ una de sus raices. Fig.

Por egemplo, si en la segunda equacion (15) $xxy + 2axy - axx + aay = o$ hacemos $x = o$, se reducirá á $aay = o$, cuya raiz es $y = o$. Luego á la abscisa cero, quiero decir en el origen, corresponde la ordenada cero. Es, pues, ninguno el tamaño de la primera ordenada, se reduce á un punto, y la curva que por precision ha de pasar por el vértice de todas las ordenadas, pasa por el origen.

Pero $x = o$ dá $y = o$, siempre que la equacion de una linea no lleva término alguno constante, en que no esté ninguna de las indeterminadas x é y. Porque si en dicha equacion hacemos $x = o$, todos los términos que llevaren x desaparecerán, y todos los términos que quedaren estarán multiplicados por y, pues suponemos que no tiene término ninguno que no lleve ó x ó y. Por consiguiente todos los términos que quedaren desaparecerán en el supuesto de $y = o$. Forman, pues, una equacion que tiene una raiz $y = o$. Luego á la abscisa $x = o$ corresponde por lo menos una ordenada $y = o$. Luego finalmente toda linea, en cuya equacion no hay término alguno constante, pasa por el origen.

17 2.° Para *hallar en que puntos una linea algebráica corta el ege de las ordenadas*, no hay sino suponer en su equacion $x = o$. Los valores de y que se sacaren de la equacion que diere este supuesto, determinarán los puntos don-

Fig. de la línea corta el ege de las ordenadas.

Así, en el egemplo propuesto (14) con hacer $x = o$ en la equacion $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$, resulta $y = \frac{5}{6}a$. Por
9. cuya razon no pasa la curva por el origen A, pues $x = o$ no dá $y = o$; pero pasa por el punto a de la linea de las ordenadas que está á la distancia $Aa = \frac{5}{6}a$ del origen, porque $x = o$ dá $y = \frac{5}{6}a$.

Del mismo modo para *averiguar en que puntos una linea algebráica corta el ege de las abscisas*, se buscarán los valores de x en la equacion despues de transformada en otra con suponer $y = o$.

En la misma equacion $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$ ó $xx + 6ax + 5aa - 6ay = o$, si hacemos $y = o$, saldrá $xx + 6ax + 5aa$, que tiene dos raices, es á saber $x = -a$, y $x = -5a$; por donde se echa de ver que encuentra
9. la curva el ege de las abscisas en dos puntos E, I; esto es en los estremos de las abscisas $AE = -a$, y $AI = -5a$.

18 *Pende pues la posicion de los ramos de una linea curva de sus abscisas y ordenadas*, segun fueren positivas ó negativas, y manifiestan en qual de los quatro ángulos de las coordenadas están. Pero merecen tambien ser atendidas estas ordenadas aun quando las suministra imaginarias la equacion, y señala que son imposibles. En este caso desaparece la curva en todo el espacio á que corresponden las ordenadas imaginarias. Desaparece enteramente ó, por mejor decir, no representa la equacion curva algu-

na,

na, quando son imaginarias todas sus raices. Fig.

19 *Una sola equacion puede representar el conjunto ó sistema de muchas lineas trazadas sobre un plano.* Esto sucede quando la equacion es el producto de muchas equaciones racionales que representan diferentes lineas que tienen un mismo origen y unos mismos eges. Porque si ordenamos muchas equaciones de modo que su segundo miembro sea cero, y las multiplicamos unas por otras; su producto formará una equacion que tendrá por raices las raices de todas las equaciones de cuya multiplicacion resultare. Luego ya que cada raiz de una equacion indeterminada espresa un ramo de la linea que representa dicha equacion (12), el producto de muchas equaciones representará la curva que tendrá todos los ramos de las lineas particulares cuyas equaciones hubieren formado el producto. Representará, pues, el sistema de todas las espresadas lineas.

20 Por consiguiente quando pudiere resolverse una equacion en otras equaciones racionales, será la linea que representa, el sistéma de diferentes lineas. Pero quando fuere irreductible una equacion, quando no tubiere divisor alguno racional, la linea que espresare deberá considerarse como una sola linea, aun quando tubiese ramos separados los unos de los otros.

21 Las lineas algebraicas consideradas analyticamente se dividen en varias ordenes, segun varían los grados de sus equaciones, cuyos grados penden, del mismo modo

Fig. que en las equaciones determinadas, del grado á que asciende el término mayor de la equacion. Pero como en las equaciones de las lineas algebráicas hay dos indeterminadas x é y, el grado de cada término se regula por la suma de los esponentes de las potencias de x é y. Los términos que no tienen sino constantes en que no hay ni x ni y, son del grado cero. Los que no tienen sino una x sin y, ó una y sin x, pero en los quales esta indeterminada puede estar multiplicada por un coeficiente ó una cantidad constante qualquiera, como by ó cx, son términos del primer grado. Los términos del segundo grado son aquellos en que está xx, xy ó yy. Pero x^3, xxy, xyy, y^3 son los términos del tercer grado &c.

22 Se puede pues formar respecto de cada orden de lineas una equacion general que represente todas las lineas posibles de dicha orden, las quales se dividen y subdividen despues en géneros y especies segun varían los coeficientes que multiplican los términos de dichas equaciones. La equacion $a + by + cx = 0$ espresa la naturaleza de las lineas de primera orden, porque no hay en ella término alguno que pase del primer grado. La equacion $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$ representa las equaciones de segunda orden, porque no contiene término alguno que pase del segundo grado.

23 Una cosa muy particular hay que considerar acerca de esta division en órdenes de las lineas algebráicas, y es que es tan fija y constante la orden de cada curva, que

no

no se muda, aunque se represente por la equacion que se quisiere. Quiero decir, que aunque se pueda espresar una linea curva por una infinidad de equaciones diferentes, segun se mudan el origen y la situacion de los eges; no obstante, son siempre de un mismo grado estas diferentes equaciones, y debe por consiguiente ser siempre de una misma orden la curva. Fig.

24 Porque como es arbitraria (3) la posicion y el origen de la linea de las abscisas, se puede mudar siempre que se quiere esta posicion; de donde resultan (8) diferentes equaciones, que representan todas una misma curva. En muchísimos casos es de suma importancia transformar, segun los fines que lleva el calculador, la equacion de una curva en otra equacion que esprese la relacion de otras coordenadas de la misma curva. Declararémos en general como esto se puede egecutar.

Supongamos que siendo *MN* una linea algebráica cuya naturaleza está cifrada en una equacion qualquiera, que señala la razon que hay entre las coordenadas *AP* y *PM*, se pida una equacion que esprese la razon entre otras coordenadas, como *BQ* y *QM*, en el supuesto de ser dados de posicion los orígenes *A* y *B*, igualmente que los eges *AP*, *AH*; *BQ*, *BI*. Por los puntos *BQ* estremos de la abscisa *BQ*, se tirarán las rectas *BC*, *QE* paralelas á *AH*, y que rematen en *AP*; y las rectas *BD*, *QF* paralelas á *AP* y que rematen en *PM*. Llamemos *AP*, x; *PM*, y; *BQ*, z; *QM*, u; *AC*, m; *BC*, n. Fuera de esto, como to- 11.

Fig. dos los ángulos de los triángulos BQG y MQF son dados, es tambien dada la razon de sus lados, porque una vez que son dados los ángulos, son conocidos sus senos, cuya razon es la misma que hay (I. 671) entre los lados opuestos á dichos ángulos. Espresemos la razon entre BQ y BG por la razon de 1 á p. Luego $BG = pz$, porque $1 : p :: BQ : BG = pz$. Espresemos la razon de BQ á QG por $1 : q$, en cuyo supuesto será $QG = qz$. Si espresamos la razon de QM á QF por $1 : r$, y la de QM á MF por $1 : s$, QF será $= ru$, y $MF = su$. Luego por ser $AP = AC + CE + EP = AC + BG + QF$, y por ser $PM = PD + DF + FM = BC + QG + MF$, tendrémos $x = m + pz + ru$, é $y = n + qz + su$. Donde sucede que segun fuere la posicion de los orígenes A, B, y de los eges AP, AH; BQ, BI, algunas de las cantidades representadas por las letras m, n; p, q; r, s pueden ser negativas. Pero sea como fuere, si en la equacion que espresa la razon de las coordenadas x, y, se substituye $m + pz + ru$ en lugar de x, y $n + qz + su$ en lugar de y, la transformada que espresará la razon entre z y u, será del mismo grado que la propuesta, y será siempre de la misma orden la curva que representáre.

El que hiciese estas substituciones en la equacion del círculo $xx + yy = rr$ (6), sacará una equacion del mismo grado que esta, que representará por consiguiente una curva de segunda orden, qual es el círculo.

25. Resulta, pues, de todo lo dicho (24) que pu-

pudiendo variar de infinitos modos, conforme quisiéremos, la posicion del ege y el origen de las abscisas A, *se podrá representar una misma curva por una infinidad de equaciones*; por lo que, no se puede inferir que pertenezcan á distintas curvas dos ó muchas equaciones propuestas, porque tengan distinta forma, bien que las curvas distintas tienen siempre equaciones diferentes. Pero suministra la analysis medios infalibles para decidir si pertenecen á una misma curva ó á distintas, equaciones diferentes que espresan la razon que hubiere entre unas coordenadas. Fig.

26 Por lo mismo que no muda de grado (23) la equacion de una linea algebraica, aunque se les dé á sus coordenadas la posicion que se quisiere, se sigue que *una linea no puede ser cortada por una recta, sino en tantos puntos á lo mas, quantas unidades hay en el esponente de su orden*; *esto es, en un número de puntos igual al que expresa la orden de la curva*: que una recta no puede cortar, por egemplo, una linea de primera orden sino en un punto, una linea de segunda orden sino en dos puntos &c.

Porque siempre podemos tomar dicha recta por ege de las abscisas ó de las ordenadas si no lo fuere ya; y por esta transposicion de las coordenadas no muda de orden la curva. Hecho esto, para hallar todos los puntos donde la curva encuentra la recta, que supondremos ser el ege de las ordenadas, se ha de suponer la abscisa x igual á cero (17), y las raices y de la equacion que proviniere de este supuesto determinarán todos los puntos donde la recta encuentra

Fig. la curva; pero el número de estas raices no puede ser mayor que el número de las unidades que espresa el mayor esponente de y, y este mayor esponente no puede ser mayor que el esponente de la orden de la curva (21 y 22): luego no puede la recta encontrar la curva sino en tantos puntos á lo mas quantas unidades hay en el esponente de la orden de la curva.

27 Es muy posible que la encuentre en menos puntos, y tambien que no la encuentre en ninguno. Porque en el supuesto de ser $x = 0$, puede muy bien suceder que y tenga su mas alto esponente inferior al de la orden de la curva: puede suceder que esta equacion tenga algunas ó todas sus raices imaginarias; de donde resultan intersecciones imaginarias que no existen: puede suceder que dos ó muchas raices reales de la equacion sean iguales; en cuyo caso dos ó muchos puntos de interseccion se confunden en solo uno.

12. Sea, por egemplo, el círculo MEF trazado desde el centro C con un radio $CM = r$, y cuya equacion llamando z la abscisa CP, y u la ordenada PM es $zz + uu = rr$. Se pregunta ¿en quántos puntos encuentra su circunferencia la recta AB que pasa por los puntos A y B de los eges CA, CB, cuyas distancias del origen son $CA = a$, y $CB = b$? Llamemos AB, c, y por causa del triángulo rectángulo ACB, tendrémos $cc = aa + bb$. Si tomamos AB por ege de las ordenadas, considerando $AQ = x$ como la abscisa del punto M, y $QM = y$, paralela á AB, como su ordenada, tendremos (24) $u = \frac{by}{c}$, y $z = x - a + \frac{ay}{c}$:

La

La substitucion de estos valores de z y u en la equacion $zz + uu = rr$, la transforma en $xx - 2ax + aa + \frac{2axy}{c} - \frac{2aay}{c} + \frac{aayy}{cc} + \frac{bbyy}{cc} = rr$, ó (porque $aa + bb = cc$) en $xx - 2ax + aa + \frac{2axy}{c} - \frac{2aay}{c} + yy = rr$, que espresa la naturaleza del círculo respecto de las coordenadas AQ y QM, ó x é y. Si en esta equacion suponemos $x = 0$, se reducirá á $aa - \frac{2aay}{c} + yy = rr$, cuyas raices determinan las intersecciones del círculo MEF, y de la recta AB. Fig.

Esta equacion es de igual grado que la orden de la curva. Puede, pues, un círculo cortar una recta en tantos puntos quantas unidades hay en el esponente de su orden, esto es en dos puntos: esto se verifica quando las dos raices $y = \frac{aa \pm \sqrt{(a^4 - aacc + rrcc)}}{c}$, ó $y = \frac{aa \pm \sqrt{(rrcc - aabb)}}{c}$ de la equacion $aa - \frac{2aay}{c} + yy = rr$ son reales; porque estas raices espresan las dos ordenadas primitivas AE, AF, por cuyos estremos pasa la circunferencia. Pero quando son imaginarias estas raices, lo son tambien las intersecciones. Esto sucede quando $rrcc < aabb$, ó $rr < \frac{aabb}{cc}$, ó $r < \frac{ab}{c}$; esto es quando el radio $r = CM$ es menor que $\frac{ab}{c}$, que es la perpendicular CD'' tirada desde el punto C á la recta $A''B''$. (El signo $<$ puesto entre dos cantidades significa que la que está del lado de la punta es menor, y la otra mayor). Entonces las intersecciones F y E desaparecen: la recta no corta mas el círculo. Si estas dos raices llegan á ser iguales, como quando $rrcc = aabb$, ó $r = \frac{ab}{c}$, quando el radio CM es igual á la perpendicular CD'; entonces los dos puntos

de

Fig. de interseccion se confunden solo en uno, y el círculo no encuentra la recta $A'B'$ sino en solo el punto D'.

28 Ya que una recta no puede cortar una linea de primera orden, sino en solo un punto (26), la linea algebraica de primera orden no puede ser curva; porque una curva puede siempre ser cortada por una recta en mas de un punto. Luego *no hay mas linea algebraica de primera orden que la recta.*

Todo esto se confirma considerando las equaciones de esta orden que no pueden tener mas de tres términos, a, by, y cx. Pero pueden tenerlos ó todos tres, ó solos dos, ó solo uno, de donde nacen tres casos distintos.

29 CASO I. Quando es completa la equacion de primera orden, esto es, quando tiene sus tres términos, se puede siempre suponer que el término constante a es positivo, y está solo en el primer miembro. Los otros dos términos
13. by y cx componen el segundo miembro, en el qual pueden ser ó positivos ó negativos. Sea AB la linea de las abscisas, y AD la de las ordenadas, formando una con otra un ángulo qualquiera DAB.

1.° Si en la equacion reducida á la forma que acabamos de decir b y c son positivas, y fuere la equacion $a = by + cx$, representará una recta. Para determinar su posicion basta hallar dos de sus puntos (I. 264), aquellos, por egemplo, donde corta los dos eges. Hallaremos el uno haciendo $x = 0$, y el otro haciendo $y = 0$. Si hacemos $x = 0$, la equacion $a = by + cx$ se reduce á $a = by$, ó

y

$y = \frac{a}{b}$. Se tomará, pues, en el ege de las ordenadas AD, Fig.
á la parte positiva AE igual á $\frac{a}{b}$, que es una quarta pro- 13.
porcional á la linea b, á la linea a, y á la linea que se toma por unidad, y estará determinado el punto E, donde la recta que se busca corta el ege de las ordenadas (17). Si suponemos $y = 0$, la equacion $a = by + cx$ se reduce á $a = cx$, ó $x = \frac{a}{c}$: de suerte, que tomando en AB ege de las abscisas á la parte positiva, la AC igual á $\frac{a}{c}$, que es quarta proporcional á c, a y 1, quedará determinado el punto C donde la recta que se busca corta el ege de las abscisas. Solo falta tirar la recta CE, y será la linea que representa la equacion $a = by + cx$.

Porque si desde un punto qualquiera de dicha recta se tira una paralela á AD, se determinará una abscisa x y una ordenada y. Dicho punto se puede tomar ó en la parte EC, ó mas allá de C, ó mas allá de E. 1.° Si fuere M el punto entre E y C, la abscisa $AP = x$, y la ordenada $PM = y$ son ambas positivas. Los triángulos semejantes CAE, CPM dán $CA : AE :: CP : PM$, esto es $\frac{a}{c} : \frac{a}{b} :: \frac{a}{c} - x : y$. Luego $\frac{aa}{bc} - \frac{ax}{b} = \frac{ay}{c}$, ó transponiendo $\frac{ax}{b}$, multiplicando por bc, y dividiendo por a, $a = by + cx$. 2.° Si se tomare el punto m mas allá de C, la abscisa $Ap = x$ es positiva, y la ordenada $pm = -y$ negativa. Los triángulos semejantes CAE, Cpm dán siempre $CA : AE :: Cp : pm$, ó $\frac{a}{c} : \frac{a}{b} :: x - \frac{a}{c} : -y$. Luego $\frac{ax}{b} - \frac{aa}{bc} = -\frac{ay}{c}$, que se reduce tambien á $a = by + cx$. 3.° Si se toma el punto m' mas allá de E, la abscisa $Ap' = -x$ es negativa, y la ordenada $p'm' = y$

es

Fig. es positiva. Los triángulos semejantes CAE, $Cp'm'$ dan tambien $CA : AE :: Cp' : p'm'$, esto es, $\frac{a}{c} : \frac{a}{b} :: -x+\frac{a}{c} : y$, ó $-\frac{ax}{b}+\frac{aa}{bc}=\frac{ay}{c}$, que tambien se reduce á $a=by+cx$.

14. 2.° Si b y c fueren negativas, la equacion será $a= -by-cx$; y suponiendo $x=0$, tendremos $a=-by$, ó $y=-\frac{a}{b}=AE$ negativa; y haciendo $y=0$, tendremos $a=-cx$, ó $x=-\frac{a}{c}=AC$ tambien negativa. Y probaríamos como en el caso antecedente que EC es la recta que representa la equacion $a=-by-cx$.

3° Si fuere b positiva y c negativa, la equacion será $a=by-cx$. Haciendo $x=0$, tendrémos $a=by$,

15. ó $y=\frac{a}{b}=AE$ positiva; pero haciendo $y=0$, tendrémos $a=-cx$, ó $x=-\frac{a}{c}=AC$ negativa.

4° Finalmente, si fuere b negativa, y c positiva, la equacion será $a=-by+cx$, y hallarémos que el su-

16. puesto de ser $x=0$ dá $y=-\frac{a}{b}=AE$ negativa, y que del supuesto $y=0$ sale $x=\frac{a}{c}=AC$ positiva.

Luego en general, si fuere completa la equacion de primera orden, y se la diese esta forma $a=\pm by\pm cx$, suponiendo a positiva, se verificará que:

13. Si b y c fueren ambas positivas, la recta EC subtenderá el ángulo de las coordenadas positivas: si b y c fue-

14. ren ambas negativas, subtenderá EC el ángulo de las coordenadas negativas: si b, coeficiente de y, fuere positiva,

15. y c, coeficiente de x, fuere negativa, EC subtenderá el ángulo de las ordenadas positivas y de las abscisas negativas: si b, coeficiente de y, fuere negativa, y c, coeficiente

de

de x, positiva, EC subtenderá el ángulo de las abscisas po- Fig.
sitivas y de las ordenadas negativas. 16.

30 *Caso II.* Si no tubiere la equacion de primera orden mas que dos términos, será preciso que alguna de las cantidades a, ó b, ó c sea cero.

1° Si a fuese cero, $\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{c}$ serán cero: serán nulas 13.
las partes AC, AE tomadas en los dos eges, y la recta 14.
EC pasará por el origen (16). Sin embargo estas par- 15.
tes AC, AE guardan aun quando se desvanecen, su razon 16.
de $\frac{a}{b}$ á $\frac{a}{c}$, ó de c á b: cuya circunstancia determina la posicion de la recta representada por la equacion $\pm by \pm cx$
$= 0$. Porque si tomamos $Ac = c$ en el ege de las absci- 17.
sas, y $Ae = b$ en el ege de las ordenadas, ambas positivas ó ambas negativas, si tubieren b y c distintos signos: pero la una positiva y la otra negativa, si tubieren b y c
un mismo signo, y se tira la recta ec; AM tirada parale- 18.
lamente á ec por el origen A, será la recta cifrada en la equacion $\pm by \pm cx = 0$. Porque si bajamos la ordenada PM, los triángulos semejantes APM, Aec darán siempre $AP : PM :: Ac : Ae$, ó $x : y :: \pm b : \mp c$: de donde resulta $\pm by = \mp cx$ ó $\pm by \pm cx = 0$.

2° Si $b = 0$, será $\frac{a}{b}$ infinita. En el caso de ser in-
finita la recta AD, está el punto D á una distancia infi- 19.
nita de A, y la recta CE que saliendo del punto C vá á encontrarse con AD en el infinito, será (I. 326) paralela á AD. Será pues la recta que se busca CE paralela al ege de las ordenadas. Con efecto, qualquiera punto M que se tome

de

Fig. de dicha recta, la abscisa MQ es siempre una misma, igual á $AC = \pm \frac{a}{b}$. Esto mismo está diciendo la equacion $x = \pm \frac{a}{c}$, ó $a = \pm cx$, á cuya forma se reduce la equacion general en virtud del supuesto $b = o$.

20. 3° Del mismo modo $c = o$ hace que $\frac{a}{c}$, esto es AB, sea infinita. Está, pues, á una distancia infinita del punto B, y la recta que saliendo desde E encuentra AB en el infinito, la es paralela. Se tomará, pues, en el ege de las ordenadas $AE = \pm \frac{a}{b}$, y se tirará EC paralela al ege de las abscisas. Cada punto M de dicha recta tiene su ordenada PM igual á $AE = \pm \frac{a}{b}$, y es representada por la equacion $y = \pm \frac{a}{b}$, ó $a = \pm by$, en la qual se transforma la equacion general $a = \pm by \pm cx$, en virtud del supuesto $c = o$.

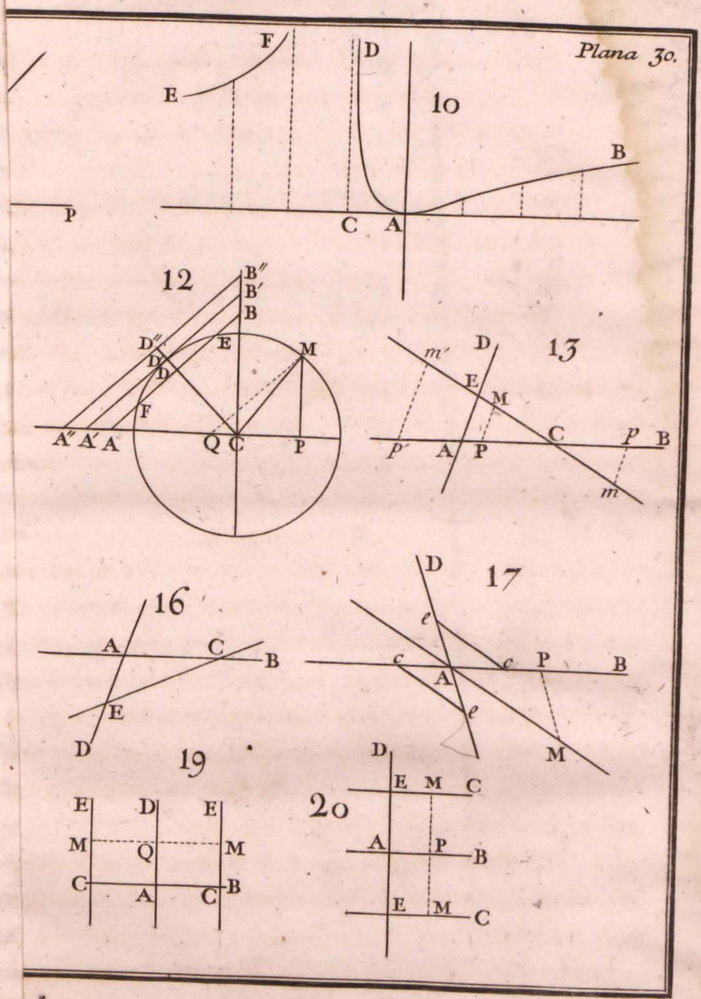
31 *Caso III.* Si la equacion de primera orden no tubiese mas que un término, no será á buen seguro, el término a, porque tendríamos $a = o$, equacion imposible, por ser a una cantidad dada; será pues el término by ó cx.

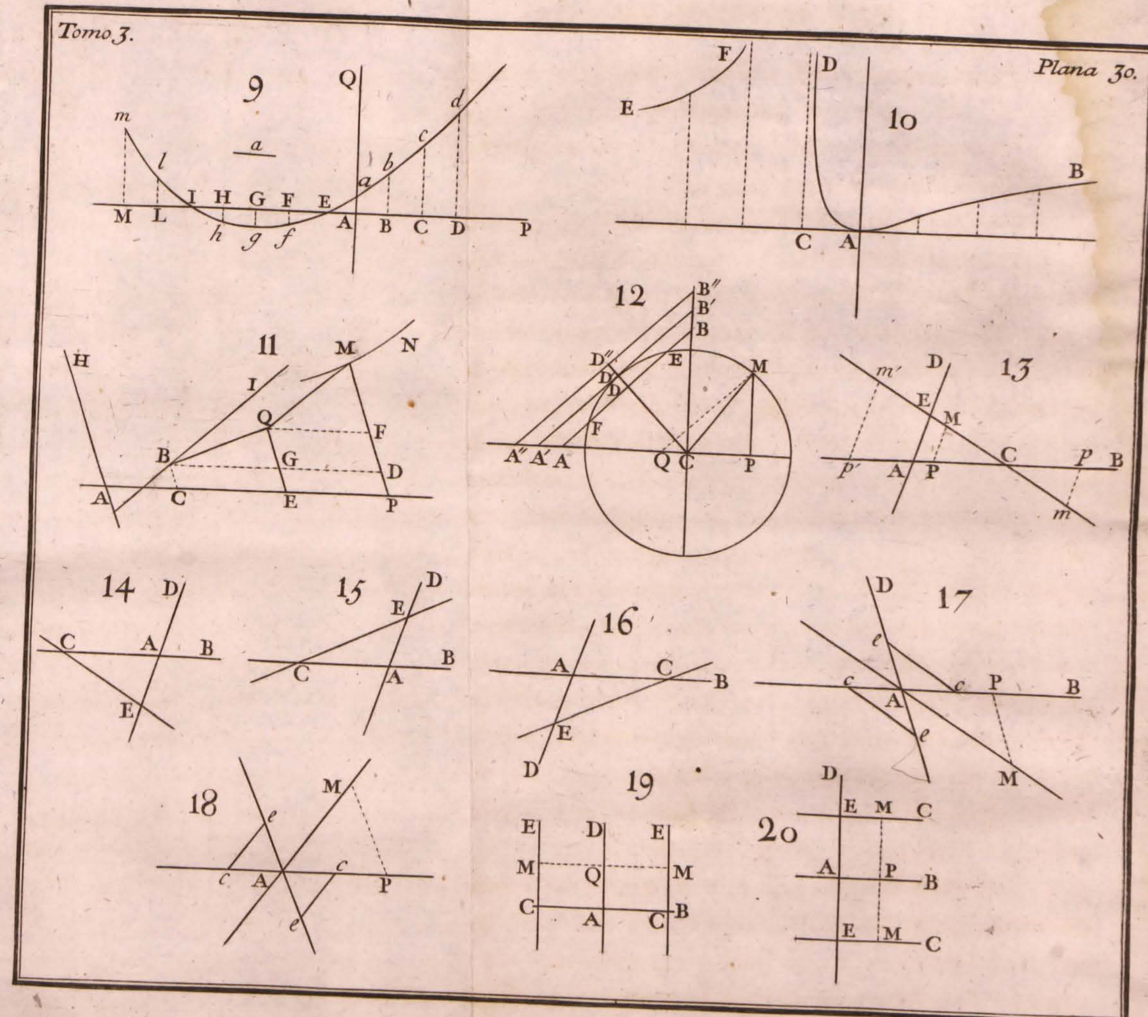
1° Si fuese $by = o$ la equacion, tendrémos $y = o$ que representa no mas que el ege de las abscisas. Las ordenadas á este ege serán cero, tómese en él la abscisa que se quisiere.

2° Si fuere la equacion $cx = o$, tendrémos $x = o$, que representa el ege de las ordenadas, á cada punto del qual corresponde una abscisa nula ó igual á cero.

32 Todo el empeño de los Analystas en la teórica así de las curvas algebráicas como de las demas, se di-

rí-


10
E
F
D
B
C
A
P
12
B″
B′
B
D″
D′
D
E
M
F
A″
A′
A
Q
C
P
13
m′
D
E
M
C
p′
A
P
p
B
m
16
A
C
B
E
D
17
D
e
c
A
c
P
B
e
M
19
E
D
E
M
Q
M
C
A
C
B
20
D
E
M
C
A
P
B
E
M
C


9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

rige á conseguir su descripcion, porque este suele ser el paradero de todo problema geométrico. Pero como son muchos los puntos á que debe atender indispensablemente el que desea trazar una curva, ó los que le pueden manifestar su figura, este es el motivo de ser tan vasto este ramo de la aplicacion del Álgebra á la Geometría. Para la descripcion de las curvas coadyuva infinito 1°. saberlas tirar una tangente. 2°. saber en que parte de su curso tienen la mayor ó menor ordenada. 3° qué variedades padece su curvatura. 4° el número y especies de sus ramos &c. Bien que todos estos puntos se pueden declarar por los métodos analyticos que hemos propuesto, se aclaran sin embargo con mucha mas brevedad estos y otros de no menor importancia por métodos fundados en principios que propondremos en otro lugar. Sobreseéremos, pues, por ahora en estas discusiones, y solo indagaremos con el socorro de la Analysis cartesiana las propiedades de las curvas algebráicas conocidas con el nombre de secciones cónicas.

Son estas curvas las que resultan en la superficie de un cono recto cortándole con un plano; y aunque pueden resultar varias secciones, segun varía la direccion del plano secante, por *Secciones cónicas* entendemos particularmente las que se originan en la superficie del cono cortado con un plano que ni pasa por el vértice, ni es paralelo á la base del cono. Las que así se forman no son mas que tres, es á saber la *Parábola*, la *Elipse* y la *Hypérbola*, cuyas propiedades podriamos demostrar ó consideran-

Fig. rándolas en el sólido del qual traen su orígen, ó sacando de una propiedad conocida ó supuesta de cada una de ellas una equacion que nos guiára para inferir todas las demás. Pero tomarémos otro rumbo, que sobre ser igualmente seguro, quadra mejor en nuestro entender con las miras que llevamos.

De la Parábola.

33 Si le aplicamos á un plano una regla *BC*, y una escuadra *GDO*, de modo que la una *GD* de sus piernas se mantenga arrimada á dicha regla, y atamos el un cabo de un hilo *FMO* del mismo largo que la otra pierna *DO*
21. de la escuadra, al estremo *O* de dicha pierna *DO*, y afianzamos el otro cabo en un punto qualquiera *F* de dicho plano, que esté al mismo lado de la escuadra respecto de la regla; y si despues hacemos que el lado *DG* de la escuadra corra á lo largo de la regla *BC*, teniendo siempre tirante el hilo con un lapiz *M*, y su parte *MO* arrimada, y como pegada á la otra pierna *OD* de la escuadra; la curva *AMX* que trazare el lapiz en virtud de este movimiento, será una porcion de parábola.

Si se pasa la escuadra al otro lado del punto fijo *F*, se describirá del mismo modo la otra porcion *AMZ* de la misma parábola: de suerte que la linea *XAZ* será toda una misma curva, que llamarémos *Parábola.*

34 La linea *BC*, en la qual el borde inferior de la regla inmobil *BC* toca al plano y al lado *DG* de la escuadra *GDO*, se llama la *Directriz.*

El

35 El punto fijo *F* del plano se llama el *Focus* de la parábola. Fig. 21.

36 Si desde el punto fijo *F* se le tira á la directriz *BC* una perpendicular *FE* que encuentre la parábola en el punto *A*, la linea *AF* prolongada indefinitamente ácia *F*, se llama el *Ege* de la parábola.

37 Llámase *Parámetro* del ege una linea *p* quádrupla de *AF*.

38 Se llaman *Ordenadas* al ege todas las líneas tiradas como *MP*, desde los puntos de la parábola perpendicularmente al ege, y se llaman *Diámetros* todas las lineas como *MO* tiradas paralelamente al ege desde los puntos de la parábola.

39 Se llama *Tangente* en un punto de la parábola una recta que no la encuentra sino en dicho punto, y que continuada ácia ambos lados jamás corta la curva, y cae á la parte de afuera.

40 De la definicion de la parábola se sigue 1.° que si por uno qualquiera *M* de sus puntos se tira al focus *F* una linea *FM*, y se la tira á la directriz *BC* una perpendicular *MD*, siempre serán iguales una con otra las rectas *MF*, *MD*. Porque si del lado *OD* de la escuadra, y del hilo *OMF* que le es (33) igual, se resta la parte comun *OM*, es evidente que siempre serán iguales una con otra las restas *MD*, *MF*.

41 2.° Que si tiramos una linea recta qualquiera *KK* paralela á la directriz *BC*, y desde un punto qualquiera *M*

Fig. 21. de la parábola la MK perpendicular á KK, y la recta MF al focus, siempre será una misma la diferencia ó la suma KD de las dos lineas MF, MK; esto es, la diferencia quando el punto M cayere debajo de KK, y la suma quando cayere encima.

42 3.° Que la parábola divide en A á la FE en dos partes iguales. Porque si suponemos que el punto M coincida con el punto A, la MF coincidirá con AF, y la MD con AE, cuyas lineas serán por consiguiente iguales, una vez que siempre es $MF = MD$ (40), esté donde estuviere en la parábola el punto M.

43 4.° De aquí se saca un método para trazar una parábola XAZ en el supuesto de ser dados su ege AP, su origen A, y su parámetro p. Porque si tomamos en el ege AP ácia ambos lados del punto A las partes AF, AE cada una igual á la quarta parte de su parámetro p, y por el punto E tiramos la indefinita BC perpendicular á EF; si aplicamos el borde inferior de una regla á dicha linea BC que hace oficios de directriz, y trazamos una parábola XAZ conforme hemos dicho (33) por medio de una escuadra ODG, y de un hilo FMO igual á la pierna OD, de manera que el uno de sus cabos esté afianzado en el focus F, y el otro en el estremo O de la misma pierna, se viene á los ojos que dicha parábola será la que se pide.

Se viene tambien á los ojos, que quanto mas larga fuere la pierna OD de la escuadra, y el hilo $OMF = OD$ (33); mas grande será tambien la porcion de la pará-

rábola que se trazare ; por manera que se podrá trazar tan grande como se quisiere , haciendo que la pierna OD de la escuadra , y el hilo OMF sean mas largos. Fig.

44 5.° Si desde un punto qualquiera M de la parábola se tiran una ordenada MP al ege , y una recta MF al focus F , es evidente que dicha linea $MF = AP + AF$, una vez que $MF = MD = AP + AE$, y que (42) $AF = AE$.

45 *El quadrado de una ordenada qualquiera* MP *al ege* AP *es igual al producto del parámetro* p *multiplicado por la parte* AP *del ege que está entre su origen* A, *y el punto* P *donde la ordenada encuentra dicho ege: quiero decir que* $(MP)^2 = p \times AP$. 21.

Llamaremos m la linea conocida AF; x , la indeterminada AP ; é y , la indeterminada PM ; tendremos , pues, $MF =$ (44) $m + x$, y $PF = x - m$, ó $m - x$, segun cayese el punto p debajo ó encima del focus F. En ambos casos el triángulo rectángulo MPF dá $(MF)^2 = (MP)^2 + (PF)^2$, esto es $mm + 2mx + xx = yy + mm - 2mx + xx$, de donde sacaremos $4mx = yy$. Luego ya que por lo dicho (37) $p = 4m$, tendremos tambien $yy = px$.

46 Es , pues , evidente 1.° que si llamamos p el parámetro del ege AP ; x , cada una de sus abscisas AP ; é y cada una de sus ordenadas correspondientes PM, siempre será $yy = px$. Y como esta propiedad conviene á todos los puntos de la parábola , y fija la posicion de dichos puntos de su ege AP ; se sigue que la equacion $yy = px$ espresa

 per-

Fig. perfectamente la naturaleza de la parábola comparada con su ege.

22. 47 2.° Si tiramos dos ordenadas qualesquiera MP, NQ al ege AP, sus quadrados serán unos con otros, como las partes AP, AQ del ege que cogen desde su origen A á los puntos P y Q donde estas mismas ordenadas encuentran el ege. Porque (45 y 46) $(PM)^2 : (QN)^2 :: p \times AP : p \times AQ :: AP : AQ$.

48 3.° Si por un punto qualquiera P del ege AP, tiramos una paralela MPM á sus ordenadas, esta paralela encontrará la parábola en dos puntos M y M igualmente distantes por ambos lados del punto P, y no la encontrará en mas puntos. Porque para que los puntos M y M pertenezcan á la parábola, es preciso (46) que cada uno de los quadrados de cada $PM = y$ que está al uno y otro lado del punto P, sean iguales al mismo rectángulo px.

22. 49 4.° De la equacion (46) $yy = px$, se sigue con evidencia que quanto mayor fuere $AP = x$, tanto mayor será tambien la ordenada $PM = y$ al uno y otro lado del ege AP; y por el contrario, que quanto menor fuere $AP = x$, tanto menor será tambien la ordenada $PM = y$: de manera que quando AP fuere nula ó cero, cada PM al uno y otro lado del ege AP, tambien será nula: quiero decir, que quando el punto P coincidiere con A, los dos puntos de concurso M y M se confundirán con dicho punto. De donde se sigue

1.° Que si por el origen A del ege se tira una linea

LL

LL paralela á sus ordenadas, dicha linea será tangente Fig.
en *A*.

2.° Que por ambos lados vá la parábola alejándose 22.
mas y mas al infinito de su ege *AP*, empezando desde su origen *A*; y que de este modo toda paralela como *LM* al ege *AP* no encuentra la parábola sino en solo un punto *M*, y pasa por dentro de ella, una vez que dicha paralela se mantiene constantemente á una misma distancia del ege.

50 5.° Si desde un punto qualquiera *M* de la parábola se tira una paralela *ML* al ege *AP*, que encuentre 22.
en *L* la *AL* paralela á sus ordenadas; es evidente que, tirando *MP*, $AL = PM = y$, y que $ML = AP = x = \frac{yy}{p}$, por ser $px = yy$. De donde se sigue que las rectas *ML*, *ML* ó $\frac{yy}{p}$, $\frac{yy}{p}$ tomadas al uno y otro lado del ege *AP* son iguales una con otra, quando los puntos *L* y *L* están igualmente distantes del punto *A*; y por lo mismo, que si una linea qualquiera *MM* que remata en la parábola está dividida en dos partes iguales por el ege en *P*, será paralela á la linea *LL*, esto es que será ordenada al uno y otro lado del ege. Porque si tiramos las paralelas *ML*, *ML* al ege *AP*, es evidente que *LL* estará dividida por el medio en *A*, una vez que *MM* lo está en *P*; luego las rectas *ML*, *ML* serán iguales una con otra, segun acabamos de probar, y por consiguiente *MM* será paralela á *LL*.

51 6.° Una vez que todas las perpendiculares *MPM* al ege *AP*, que por ambos lados rematan en la parábola, están divididas (48) por el medio en *P*, se sigue que

 el

Fig. el ege divide la parábola en dos porciones enteramente iguales, y colocadas del mismo modo cada una á un lado distinto del ege. Porque si dobláramos á lo largo del ege el plano en que está trazada, de forma que se juntasen sus dos partes, es evidente que coincidirian exactamente una con otra las dos porciones de la parábola.

52 *Si por el origen* A *del ege* AP *se tira una linea*
23. *recta qualquiera* AM *en qualquiera de los dos ángulos que forman el ege* AP *y la linea* LL *paralela á sus ordenadas; dicha recta* AM *encontrará la parábola* MAM *en otro punto* M.

Tomemos en la *AL* á qualquiera lado del punto *A* la parte *AG* igual al parámetro *p* del ege, y tirémos *GF* paralela al ege *AP*, que encuentre la *AM*, prolongada si fuere menester, en el punto *F*; tomemos en la *AL* al mismo lado donde cae la *AM* respecto del ege *AP*, la parte *AL* igual á *GF*, y tiremos *LM* paralela al ege; el punto *M* donde *LM* encuentra la *AM*, será uno de los puntos de la parábola *MAM*.

Porque si tiramos *MP* paralela á *AL*, los triángulos semejantes (I. 460) *FGA*, *APM* darán *FG* ó *AL* ó $PM : GA :: AP : PM$, y por consiguiente $(PM)^2 = AP \times GA = AP \times p$; luego la linea *PM* será (46) una ordenada al ege *AP*.

53 En virtud de esto se echa de ver 1° que si en el supuesto de ser dado el ege *AP* de una parábola *MAM* con su parámetro *p*, tiramos por el origen *A* del ege en

qual-

qualquiera de los dos ángulos *PAL*, *PAL* que forman el Fig.
ege *AP* y la linea *LL* paralela á sus ordenadas, una rec- 23.
ta qualquiera *AM*; se echa de ver, digo, como se podrá hallar el punto *M* donde la recta *AM* encontrará la parábola *MAM*.

54 2.° Que no hay mas linea (49 y 52) que la *LAL* paralela á las ordenadas al ege *AP* que pueda ser tangente de la parábola *MAM* en el punto *A* origen del ege; porque no hay mas linea que esta que junte las dos circunstancias de pasar por el punto *A*, y de mantenerse fuera de la parábola, aunque se lo prolongue infinitamente.

55 Si por un punto qualquiera *M* de la parábola 24.
se tiran un diámetro *MO*, una ordenada *MP* al ege *AP*, 25.
y una recta *MT* que corte en el ege *AP*, prolongado mas alla de su origen, la parte $AT = AP$; todas las rectas como *NO*, tiradas desde los puntos de la parábola paralelamente á *MT*, que rematan en el diámetro *MO*, se llaman *Ordenadas* á dicho diámetro.

56 Una linea q tercera proporcional á *AT* y *MT*, se llama el *Parámetro* del diámetro *MO*.

57 De aquí se sigue 1.° que si llamamos x la indeterminada *AP* ó *AT*, será $(MT)^2 = qx$, por ser $AT = x : MT :: MT : q$.

58 2.° Por razon del triángulo rectángulo *MPT* será $(MT)^2 = (PT)^2 + (MP)^2$ ó $qx = 4xx + px$; de donde sacaremos, dividiendo por x, $q = 4x + p$; quiero decir que el parámetro q de un diámetro qualquiera *MO* es mayor que el

 pa-

Fig. parámetro p del ege, del quadruplo de $AP = x$.

59 3.° Si desde el punto M se le tira al focus F la
24. recta MF, resultará MF (44) $= AP + AF$. Pero
25. siendo (37) el parámetro del ege, $p = 4AF$, el parámetro del diámetro MO será (58) $q = 4AP + 4AF$; luego el parámetro q de un diámetro qualquiera MO, vale quatro veces la linea MF tirada desde su origen M al focus F.

24. 60 *El quadrado de una ordenada qualquiera* ON *al*
25. *diámetro* MO *es igual al rectángulo del parámetro* q *por la parte* MO *de dicho diámetro, que está entre su origen* M *y el punto* O *donde le encuentra la ordenada; quiero decir que* $(ON)^2 = q \times MO$.

Tirarémos la ordenada NQ al ege AP, que encuentre en R al diámetro MO, y tiraremos la OH paralela á MP; llamaremos AP ó AT, x; PM ó RQ, y; OR ó HQ, a; MO ó PH, b; los triángulos semejantes (I. 461) TPM, ORN darán esta proporcion $TP : PM :: OR : RN$, ó substituyendo en lugar de estas lineas sus valores, $2x : y :: a : RN = \frac{ay}{2x}$. Sentado esto,

24. Ya que $NQ = RQ - RN = y - \frac{ay}{2x}$, ó $NQ = RN - RQ = \frac{ay}{2x} - y$, y $AQ = AH - HQ = x + b - a$, quando el punto N cae al otro lado del ege AP respecto del diámetro MO; y por el contrario $NQ = RQ + RN$
25. $= y + \frac{ay}{2x}$, y $AQ = AH + HQ = x + b + a$, quando cae al lado opuesto: tendremos $(QN)^2 = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$, y $AQ = x + b \pm a$, esto es, $-$ en el primer caso,

y

y $+$ en el segundo. Pero (47) $AP : AQ :: (PM)^2 ;$ Fig.
$(QN)^2$, ó substituyendo sus valores, $x : x + b \pm a ::$ $yy : (QN)^2 = yy + \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x}$. Luego comparando uno con otro estos dos valores de $(QN)^2$, saldrá la equacion $yy + \frac{byy}{x} \pm \frac{ayy}{x} = yy \pm \frac{ayy}{x} + \frac{aayy}{4xx}$, de donde se sacará, borrando en ambos miembros $yy \pm \frac{ayy}{x}$, dividiendo por yy, y multiplicando por $4xx$, $(OR)^2 = aa = 4bx$; pero los triángulos semejantes MPT, NRO dan $(PT)^2 : (OR)^2 ::$ $(MT)^2 : (ON)^2$ ó $4xx : 4bx :: qx : (ON)^2 = bq = q \times MO$; luego &c.

61 De aquí resulta visiblemente 1.º que quanto probamos (45) respecto del ege AP, sus ordenadas y su parámetro, se verifica igualmente en un diámetro qualquiera MO, sus ordenadas ON, y su parámetro q. Pero como de lo probado (45) se infiere todo lo que digimos (46......54) y subsiste del mismo modo, sean ó no rectos los ángulos APM; se sigue que si en lo que allí digimos imaginamos que en lugar de ser el ege la linea AP, sea un diámetro qualquiera cuyas ordenadas sean las rectas PM, QN, y su parámetro sea la linea p, será tambien cierto en este supuesto; se demostrará del mismo modo.

62 2.º Como son tambien verdaderas las dos propo- 24.
siciones demostradas (49 y 54) quando la linea AP en 25.
vez de ser el ege es un diámetro qualquiera, como MO; se infiere que la linea MT paralela á las ordenadas ON á dicho diámetro, es tangente en M, y que no hay mas linea que esta que pueda tocar la parábola en el punto M. De

don-

Fig. donde resulta que por un punto dado de una parábola no puede pasar mas que una tangente.

24\. 63 3° Infiérese de aquí, y de lo dicho (55) que
25\. si por un punto qualquiera *M* de una parábola tiramos una ordenada *MP* al ege *AP*, y una recta *MT* que corte en el ege prolongado mas allá de su origen *A* la parte *AT* $=$ *AP*; la linea *MT* será tangente en *M*. Y recíprocamente, si la linea *MT* fuere tangente en *M*, y tiramos la ordenada *MP* al ege, será *AT* $=$ *AP*.

64 4° Si en lo dicho (55 y 56) suponemos que la linea *AP* en vez de ser el ege sea un diámetro qualquiera, cuyas ordenadas sean las rectas *PM*, *QN*; echaremos de ver que todo será tambien verdadero en este supuesto, y se demostrará del mismo modo, y basta para percibirlo
26\. considerar la figura, en la qual los triángulos semejantes dan las mismas proporciones que en el caso de ser *AP* el ege.

Por consiguiente es tambien verdad lo que deciamos poco ha (63) quando *AP* es un diámetro y no el ege, y podemos considerar el ege como un diámetro que forma ángulos rectos con sus ordenadas.

65 *Si por un punto qualquiera* M *de una parábola*
27\. *se tira una ordenada* MP *al ege, y una perpendicular* MG *á la tangente* MT *que pasa por el punto* M; *la parte* PG *del ege será constantemente igual á la mitad de su parámetro* p, *quiero decir que* PG $= \frac{1}{2}$p.

Porque de los triángulos semejantes *TPM*, *PMG* sa-

ca-

caremos $TP : PM :: PM : PG$, esto es $2x : y :: y : PG$ Fig.
$= \frac{yy}{2x} = \frac{1}{2} p$, despues de substituido px en lugar de yy (46).

66 *Si por un punto qualquiera* M *de una parábola, tiramos al focus* F *la recta* MF, *un diámetro* MO, *y la tangente* TMS; *los ángulos* FMT, OMS *que forma la tangente* TMS *respectivamente con la recta* MF, *y con el diámetro* MO, *serán iguales.* 27.

Porque si tiramos el ege *AP* que encuentre en *T* la tangente *TMS*, y la ordenada *MP* al ege; será (63) $TA + AF = TF = AP + AF = MF$ (44). Por consiguiente el triángulo *TFM* será isósceles, y por lo mismo el ángulo *FTM*, ó su igual *OMS* será igual al ángulo *FMT*.

67 De aquí se infiere que la tangente *TMS* prolongada al uno y otro lado del punto de contacto *M*, se aparta de la parábola por la parte de su focus *F*; y como sucede lo mismo esté donde estuviere el punto de contacto *M*, se sigue que esta curva es toda cóncava al rededor de su focus *F*.

68 Cuestion I. *Dado un diámetro* AP *con la tangente* LAL *que pasa por su origen* A, *y su parámetro; hallar un diámetro* BQ *que forme con sus ordenadas un ángulo igual al ángulo dado* K, *su origen* B, *y su parámetro.* 28. 29.

Tiremos por el origen *A* del diámetro dado la linea *AE* que forme con dicho diámetro al uno ó al otro lado, el ángulo *PAE* igual al ángulo dado *K*, y busquemos (53 y 61)

en

Fig. en dicha linea (prolongada al otro lado de A, quando no está dentro de alguno de los dos ángulos PAL, PAL) el punto M donde encuentra la parábola, tiraremos por el punto del medio Q de la linea AM, una paralela QD al diámetro AP, que encuentre la tangente AL en el punto D; y partiremos QD por el medio en B. La linea BQ será el diámetro que buscamos, cuyo origen será el punto B, y el parámetro una tercera proporcional á BQ y QA.

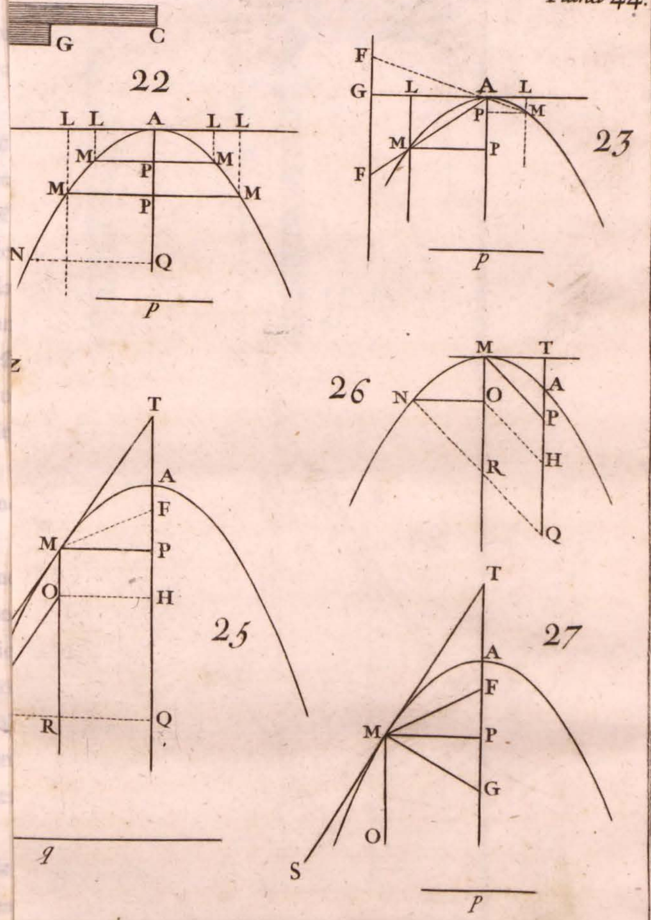
Porque 1.° Una vez que la linea AM está dividida por el medio en el punto Q por el diámetro BQ, será ordenada (50 y 61) al uno y otro lado de dicho diámetro; y por ser paralelas las lineas BQ, AP, el ángulo BQA que forma el diámetro BQ con su ordenada QA será igual al ángulo PAM igual al ángulo dado K, ó su suplemento. 2.° El punto del medio B de la linea QD será el origen (63 y 64) de dicho diámetro, por ser AQ su ordenada. 3.° El parámetro del diámetro BQ es la tercera proporcional (60) á BQ y QA.

28. Si el ángulo dado K no fuese recto, se podrian tirar al uno y otro lado del diámetro AP dos distintas lineas AE, que formasen con el diámetro dado ángulos iguales al ángulo K; se podria, pues, resolver de dos modos la cuestion propuesta, advirtiendo que si la una de las dos lineas AE se confundiese con la tangente AL, el mismo diámetro AP resolverá la cuestion. Pero si el ángulo K fuese rec-

29. to, como no se puede tirar mas que una linea AE que forme con el diámetro AP un ángulo recto, no admitiria la

cues-

Plana 44.



G C
22
L L A L L
M M P
M P M
N Q
p
F
G L A L
P M
M P
F
23
p
M T
26 N O A
P
R H
Q
T
A
F
M P
O H
25
R Q
q
T
27
A
F
M P
G
O
S
p

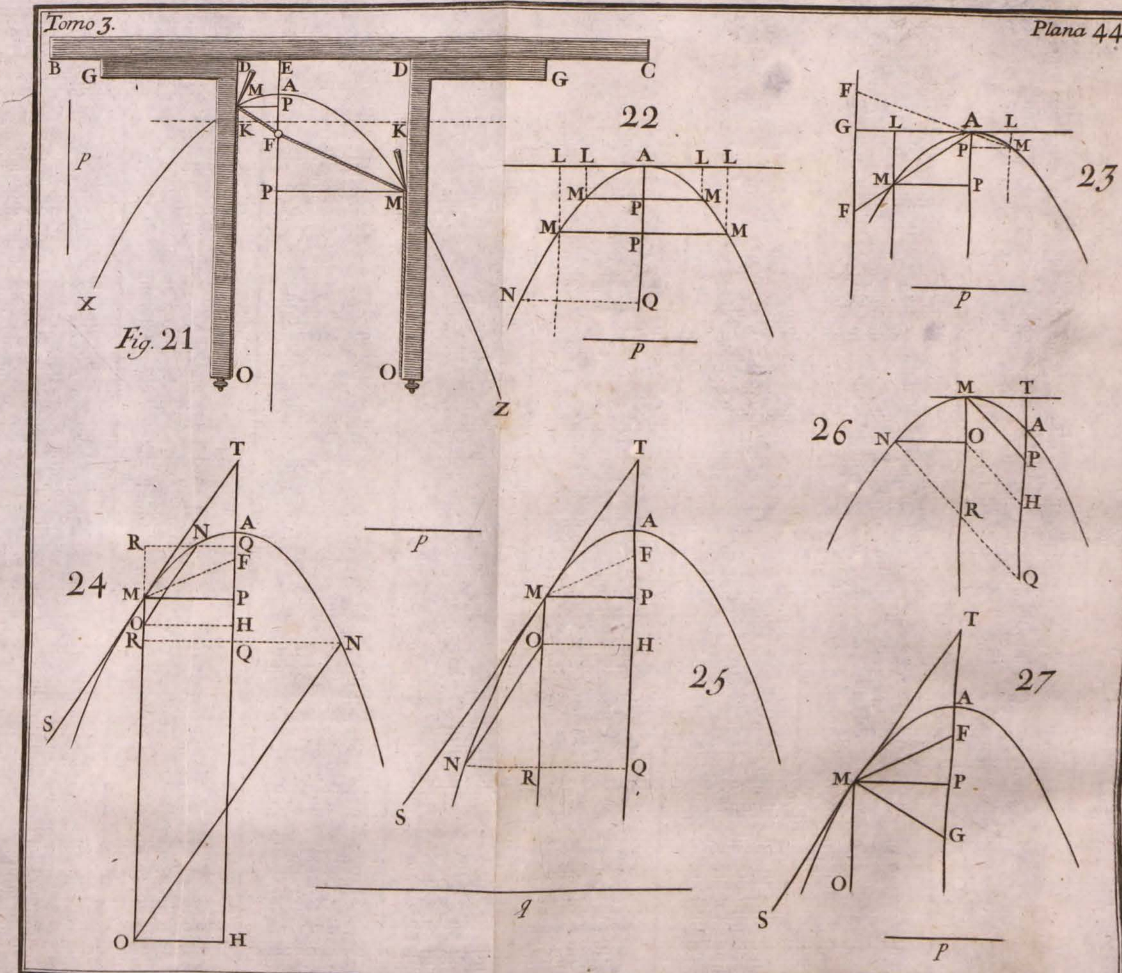


Fig. 21
22
23
24
25
26
27

cuestion mas que una resolucion, y el diámetro que se busca seria el ege (*64*). Fig.

Es de reparar que los dos diámetros *BQ*, *BQ* que resuelven la cuestion quando el ángulo *K* no es recto, están colocados de un mismo modo al uno y otro lado del ege *AP*, y que sus parámetros son iguales: esto ya lo manifiesta la misma construccion, suponiendo que el diámetro dado *AP* sea el ege, y tirando dos lineas *AE*, *AE* al uno y otro lado. Porque los triángulos rectángulos *ALM*, *ALM*, y *ADQ*, *ADQ* son iguales y semejantes; por consiguiente las lineas *AD*, *AD*; *DQ*, *DQ*; sus mitades *BQ*, *BQ*; y las ordenadas *QA*, *QA* serán iguales; y (*60*) por lo mismo serán tambien iguales los parámetros. 30.

69 Resulta, pues, 1.° que no hay mas que un diámetro que forme con sus ordenadas ángulos rectos, y que por lo mismo no puede haber mas que un ege. 2.° Que siempre se podrán hallar dos diámetros distintos que formen con sus ordenadas ángulos iguales á un ángulo dado, con tal que este no sea recto; y que estos dos diámetros estarán en situacion semejante al uno y otro lado del ege, y que serán iguales sus parámetros.

70 Cuestion II. *Dado un diámetro, su parámetro, y la tangente que pasa por su origen, trazar la parábola por un movimiento continuo.*

Resolveremos esta cuestion de dos modos.

I. Si el diámetro dado fuese el ege, trazaríamos la pará- 31.

rá-

Fig. rábola en virtud de lo dicho (43); pero si no lo fuere,
31. supondremos que sea *MO* el diámetro dado, y *TMS* la tangente que pasa por su origen *M*.

Sentado esto, en el diámetro *MO* prolongado mas allá de su origen *M*, tomaremos la parte *MD* igual á la quarta parte de su parámetro, y tiraremos una perpendicular indefinita *DE* á *MD*. Tiraremos *MF* que forme con la tangente *TMS* un ángulo *FMT* igual al ángulo *OMS*; y tomando *MF* igual á *MD*, trazaremos en virtud de lo dicho (33) una parábola, cuya directriz sea la linea *DE*, y el focus el punto *F*, y será la que corresponde.

Porque 1.° Por ser la linea *MO* perpendicular á la directriz *DE*, será paralela al ege, y será por consiguiente un diámetro (38). 2.° La linea *TMS* será (66) tangente en *M*. 3.° El parámetro del diámetro *MO* será (59) quadruplo de *MF*.

32. II. Sea *AP* el diámetro dado, y *LAL* la tangente que pasa por su origen *A*. Esto supuesto, en el diámetro *AP* prolongado mas allá de su origen *A*, tomaremos la parte *AG* igual á su parámetro, y tiraremos la recta indefinita *DGD* que forme con *AG* el ángulo *AGD* igual al ángulo *GAL*, y del mismo lado; haremos correr la recta indefinita *DM* á lo largo de *GD*, manteniéndose constantemente paralela á *AG*, de modo que con su estremo *D* se lleve el lado *DA* del ángulo *DAM* igual al ángulo *GAL*, y mobil en su vértice al rededor del punto fijo *A*. La interseccion continua *M* de la linea *DM* y del lado *AM* trazará en virtud del es-

espresado movimiento la parábola que se pide. Fig.

Porque si tiramos MP paralela á AL, las lineas MP, GD serán iguales, pues ya que el ángulo APM ó GAL es igual al ángulo AGD, estarán igualmente inclinadas entre las paralelas GP, DM. Pero los triángulos AGD, MPA son semejantes, porque el ángulo MPA ó GAL es igual al ángulo AGD, y el ángulo PMA ó MAL es igual al ángulo GAD, pues si de los ángulos iguales GAL, DAM restamos el mismo ángulo DAL, los residuos serán iguales. Tendremos, pues, $AG : GD = PM :: PM : AP$, y por lo mismo $GA \times AP = (PM)^2$: luego MP es (60 y 62) una ordenada al diámetro AP, cuyo origen está en A, el parámetro es la linea AG, y LAL la tangente. 32.

Si el diámetro AP fuese el ege, las lineas GD, AL serian paralelas, y seria mas facil demostrar la operacion; porque se viene á los ojos que GD será entonces igual á PM, y que los triángulos rectángulos AGD, MPA son semejantes; luego $AG : GD = PM :: PM : AP$, y $AG \times AP = (PM)^2$. 33.

71 Cuestion III. *Dado un diámetro* AP *con su parámetro, y la tangente* AL *que pasa por el origen* A *del diámetro; trazar la parábola, ó, lo que es lo propio, hallar quantos puntos se quisieren de dicha curva.*

I. En el diámetro AP prolongado mas allá de su origen A, tomaremos la parte AG igual á su parámetro, dividiremos AG en dos partes iguales en el punto D, y tiraremos una recta indefinita AF perpendicular á AG; desde 34.

el

Fig. el punto C tomándole donde se quisiere en la DA inde-
34. finitamente prolongada ácia A, como centro, y con el radio CG trazaremos un arco de círculo PF que corte el diámetro AP y su perpendicular AF en los puntos P, F. Por el punto P tiraremos una paralela MPM á la tangente AL, en la qual tomaremos al uno y otro lado las PM, PM iguales cada una á AF. Practicando lo propio hallaremos tantos pares de puntos M quantos quisiéremos; la linea curva MAM que por ellos trazáremos será la parábola que se pide.

Porque como todos los arcos PF pasan por el mismo punto G, y tienen sus centros en la linea GA, prolongada si fuere menester ácia A, tendrán por diámetros las lineas GP; y de la propiedad del círculo (I.474) sacaremos $(AF)^2 = GA \times AP$. Pero, segun suponemos, cada PM es igual á su correspondiente AF, y tambien paralela á la tangente AL que pasa por el origen A del diámetro AP; luego será ordenada (60 y 62) á dicho diámetro. Por consiguiente la parábola que se pide ha de pasar por todos los puntos M que la operacion determina.

Se echa de ver que se puede tropezar al trazar las porciones de la parábola que cogen desde uno de los puntos hallados al otro; pero tambien es cierto que será de muy poca consecuencia la equivocacion, si fueren muy inmediatos los unos á los otros los espresados puntos.

35. II. Por un punto qualquiera L de la tangente AL tiraremos una paralela indefinita LE al diámetro AP; en cu-

cuya paralela y en el diámetro AP prolongado mas allá de su origen A, tomaremos las partes LE, EE, EE &c. AF, FF, FF &c. todas iguales unas con otras, y del tamaño que quisiéremos. Determinaremos en LE el punto M, tal que LM sea tercera proporcional al parámetro dado del diámetro AP, y á la porcion AL de la tangente. Desde los puntos A, M tirarémos finalmente las lineas AE, AE, AE &c. MF, MF, MF &c. y los puntos de interseccion N, N, N &c. de cada AE con su correspondiente MF, estarán en la parábola que se ha de trazar. Fig. 35.

Porque si por el punto M y por uno de los puntos N tiramos las lineas MP, NQ paralelas á la tangente AL, y llamamos AP, x; $PM = AL$, y; AQ, u; QN, z; de los triángulos semejantes NQA, ALE, y MPF, NQF inferiremos las dos proporciones siguientes $QN : QA :: AL : LE$, esto es $z : u :: y : LE = AF = \frac{uy}{z}$; y $MP : PF = PA + AF :: NQ : QF = QA + AF$, ó $y : x + \frac{uy}{z} :: z : u + \frac{uy}{z}$; multiplicando los estremos y los medios, sacaremos $uy + \frac{uyy}{z} = xz + uy$, que con borrar uy en cada miembro, y multiplicar por z, se reduce á $uyy = xzz$, que dá esta proporcion $x : u :: yy : zz$ ó $AP : AQ :: (MP)^2 : (NQ)^2$. Pero como en virtud de la construccion el quadrado de AL ó PM es igual al rectángulo de la porcion AP del diámetro dado por su parámetro, será por consiguiente PM (60 y 62) una ordenada al diámetro AP, y QN será otra (47 y 61). Luego el punto N será uno de los de la parábola que están al un lado del diámetro AP; los que están al otro lado

Fig. se determinarán tomando en las rectas indefinitas LE, AF, las partes iguales LE, EE &c. AF, FF &c. al otro lado de los puntos L, A.

Si en lugar de ser uno de los datos el parámetro del diámetro AP, lo fuese uno de los puntos M de la parábola; bastaria tirar por dicho punto una paralela indefinita LE al diámetro AP, y concluir la operacion del mismo modo que antes.

De la Elipse.

72 Si aseguramos en un plano los dos cabos de un
36. hilo FMf en dos puntos F, f que estén menos distantes el uno del otro que lo que coge el hilo de largo, y mantenemos siempre tirante este hilo con un lapiz M; haciendole dar al lapiz una vuelta al rededor de dichos dos puntos, de modo que vuelva á parar al mismo punto desde el qual empezó á moverse, trazaremos en virtud de este movimiento del lapiz una linea curva que llamaremos *Elipse.*

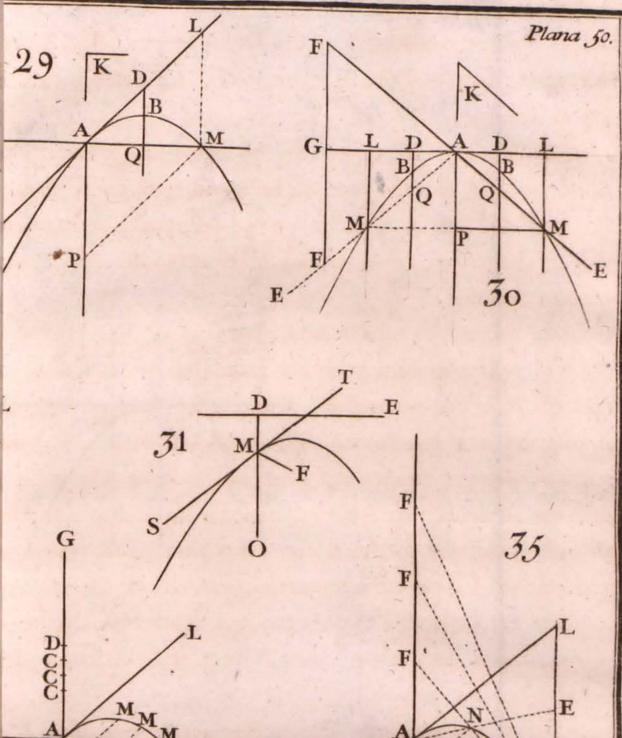
73 Los dos puntos fijos F y f se llaman los dos *Focus.*

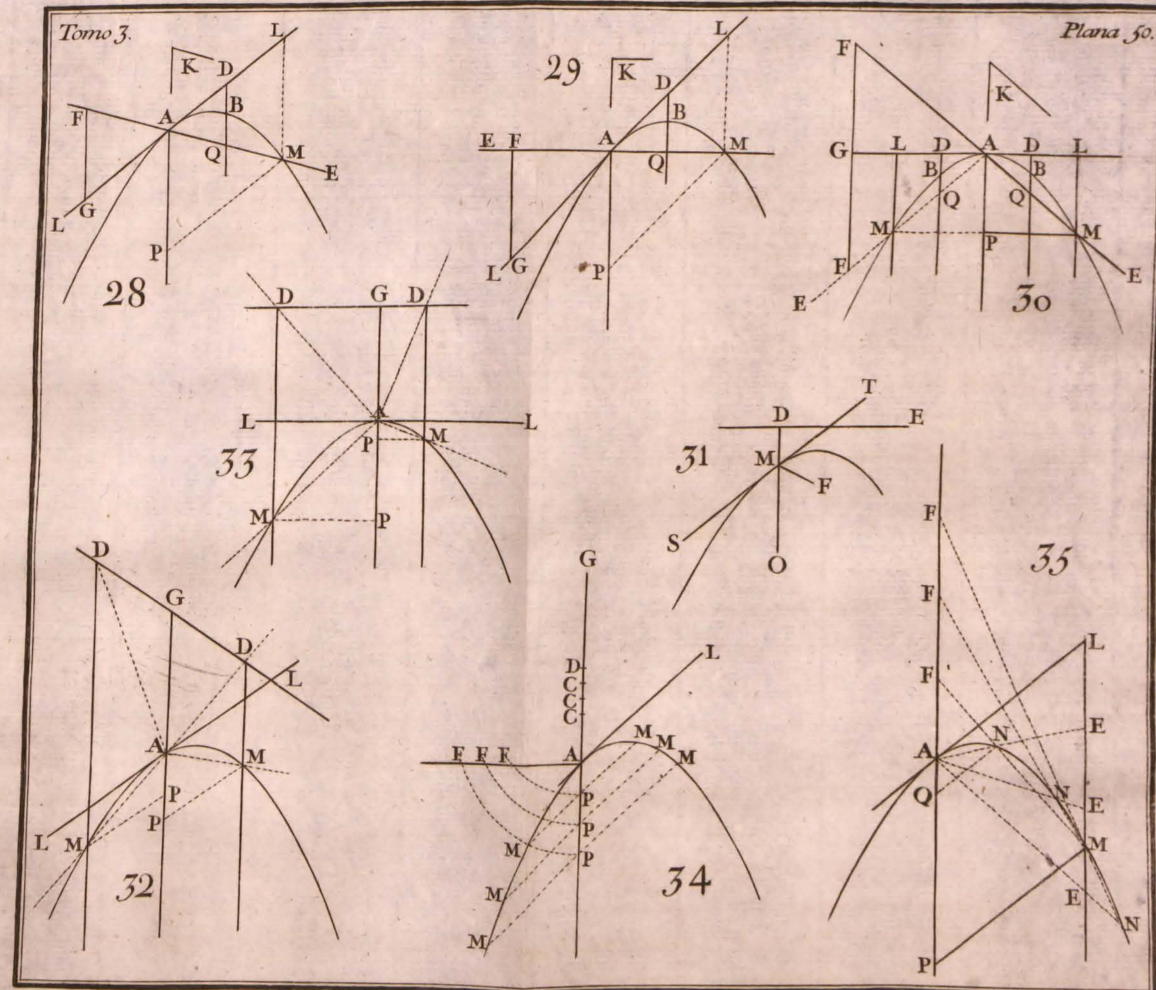
74 Llámase *primer Ege* ó *Ege mayor* una linea Aa que pasa por los dos focus F y f, y remata por ambos lados en la elipse.

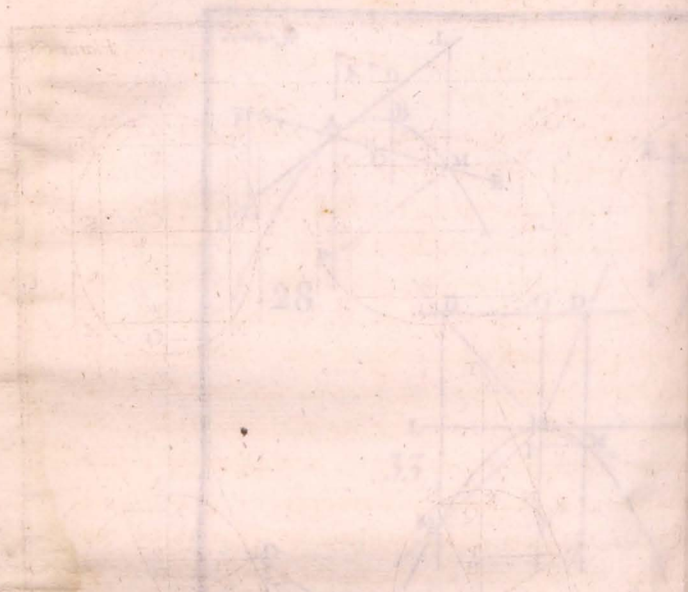
75 El *Centro* de la elipse es un punto C, que divide por el medio el primer ege Aa.

76 Llamamos *segundo Ege*, ó *Ege menor* una linea Bb, tirada por el centro C perpendicularmente al primer ege Aa, que remata por ambos lados en la elipse.

Los


29
K
L
D
B
A
M
Q
P
30
F
K
G L D A D L
B B
Q Q
M M
P
F
E
E
31
T
D E
M
F
S
O
34
G
D
C
C
C
L
A
M M M
P
P
P
35
F
F
F
L
E
N
A
Q
N
E
M
E
N
P


28
29
30
31
32
33
34
35


28

77 Los dos eges juntos *Aa*, *Bb* se llaman *Conjugados*; de modo que decimos del primer ege *Aa* que es conjugado al segundo *Bb*; y recíprocamente del segundo *Bb* decimos que es conjugado al primero *Aa*. Fig. 36.

78 Las lineas como *MP*, *MK*, tiradas desde los puntos *M* de la elipse, paralelamente á uno de los eges, y que rematan en el otro ege, se llaman *Ordenadas* á este último ege. *MP* es una ordenada al ege *Aa*, y *MK* al ege *Bb*.

79 Una linea tercera proporcional á los dos eges, se llama *Parámetro* del ege, que es el primer término de la proporcion. Así, si el primer ege *Aa* es al segundo *Bb*, como este mismo *Bb* es á una tercera proporcional *p*, esta linea *p* será el parámetro del primer ege.

80 Llámanse *Diámetros* todas las lineas rectas que pasando por el centro *C* rematan por ambos lados en la elipse.

81 La *Tangente* en un punto de la elipse es una recta que no la encuentra mas que en dicho punto, y que continuada por ambos lados, jamás entra dentro, antes sí cae de la parte de afuera.

82 Si imaginamos que los dos focus *F* y *f*, y el centro *C* se junten en solo un punto, se transformará la elipse en un círculo cuyo radio será la recta *CM* igual á la mitad del hilo *CMC* atado por ambos cabos en el punto *C* que será el centro. Luego podremos considerar que el círculo es una especie particular de elipse, cuyos dos focus se confunden con el centro; por manera que todo quanto 37.

Fig. demostraremos en adelante acerca de la elipse, haya entre sus focus la distancia que hubiere, se podrá tambien aplicar al círculo en el supuesto de ser nula la expresada distancia.

36. 83 De lo dicho (72) se sigue 1.° que si desde un punto qualquiera M de la elipse se tiran á los dos focus F, f las rectas MF, Mf; siempre será una misma su suma, porque esta será siempre igual á lo que coge de largo el hilo. Las dos lineas MF, Mf se llaman *Radios vectores*.

84 2.° Quando el punto M cae en A, se viene á los ojos que MF se confunde con AF, y Mf con Af; del mismo modo quando el punto M cae en a, tambien se viene á los ojos que MF se confunde con aF, y Mf con af. Tendremos, pues, $AF + Af$, ó $2AF + Ff = aF + af$, ó $2af + fF$; y por consiguiente $AF = af$; de donde se infiere

1.° Que la suma de las dos rectas MF, Mf siempre es igual al primer ege Aa, por ser $Mf + MF = Af + AF = Af + fa$.

2.° Que el centro C divide por el medio la distancia Ff que separa los focus, porque $CA - AF$ ó $CF = Ca - af$ ó Cf.

85 3.° Si desde el estremo B del segundo ege Bb, tiramos á los dos focus F, f las rectas BF, Bf; es evidente que serán iguales los triángulos rectángulos BCF, BCf, y que por lo mismo la hypotenusa BF será igual á la otra hypotenusa Bf; y por consiguiente BF ó $Bf = CA$ ó Ca, una

vez

vez que (84) $BF + Bf = Aa$. Del mismo modo Fig.
probaremos que Fb ó $bf = CA$ ó Ca. De aquí conclui- 36.
remos

1.° Que el centro C divide por el medio el segundo ege Bb; porque los triángulos rectángulos FCB, FCb serán iguales teniendo iguales las hypotenusas FB, Fb, y el lado FC comun.

2.° Que el segundo ege Bb siempre es menor que el primero Aa, porque su mitad BC, que es uno de los lados del triángulo rectángulo BCF, será menor que su hypotenusa BF que es igual á la mitad CA del primer ege Aa.

3.° Que si desde el uno B de los estremos del ege menor Bb como centro, y con un radio BF igual á CA, mitad del ege mayor Aa, trazamos un círculo; este círculo cortará el ege mayor en dos puntos F, f que serán los dos focus de la elipse.

86 4.° Si llamamos CA ó BF, t; CF, m; el triángulo rectángulo BCF dará $(BC)^2 = tt - mm$. Pero AF 36.
$= t - m$, y $Fa = t + m$, por consiguiente $AF \times Fa$ $= tt - mm$. De donde resulta claramente que el quadrado de la mitad CB del ege menor Bb, es igual al rectángulo de $AF \times Fa$ partes del ege mayor que cogen desde el uno F de los focus á cada uno de sus estremos A, a.

87 5.° Yá podríamos si quisiésemos trazar una elipse, con tal que fuesen dados sus dos eges. Porque una vez determinados por lo dicho (85) en el ege mayor Aa, los focus F, f, se asegurarán en dichos focus los cabos de

 un

Fig. un hilo FMf tan largo como el ege, cuyo hilo servirá para trazar (72) una elipse , que será evidentemente la misma que se pide.

36. 88 *Si se le tira una ordenada* MP *al primer ege ó ege mayor* Aa , *y se toma en él la parte* AD $=$ MF , *será* CA : CF :: CP : CD.

Llamemos CA, t; CF, m; CP, x; PM, y; y CD, z. Consideraremos dos casos diferentes que pueden ocurrir.

CASO I. Quando el punto P está mas arriba del centro C. Como siempre es menor PF que Pf; se sigue que MF ó AD será menor que Mf ó aD; por esta razon AD ó $MF = t - z$, aD ó $Mf = t + z$, $FP = m - x$, ó $x - m$ (segun estuviere mas arriba ó mas abajo que el focus F el punto P), $Pf = x + m$. Esto supuesto, los triángulos rectángulos MPF, MPf dán $tt - 2tz + zz = yy + mm - 2mx + xx$, y $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$. Luego si restamos ordenadamente cada miembro de la primera equacion de los de la segunda, resultará $4tz = 4mx$, de donde sacaremos $CD = z = \frac{mx}{t}$.

36. CASO II. Quando el punto P está mas abajo que el centro C. Como siempre es PF mayor que Pf, se sigue que MF ó AD será mayor que Mf ó aD: por esta razon AD ó $MF = t + z$, aD ó $Mf = t - z$, $PF = x + m$, $Pf = x - m$, ó $m - x$ (segun estuviere el punto P mas abajo ó mas arriba que el focus f). En estos supuestos, de los triángulos rectángulos MPF, MPf, se saca $tt + 2tz + zz = yy + mm + 2mx + xx$, y $tt -$

$2tz$

$2tz + zz = yy + mm - 2mx + xx$. Luego si restamos ordenadamente cada miembro de la segunda equacion de los de la primera, resultará $4tz = 4mx$, y de aquí $CD = z = \frac{mx}{t}$. Por consiguiente en ambos casos se verifica que $t : m :: x : z$; esto es, que $CA : CF :: CP : CD$. Fig.

89 Se sigue, pues, que si llamamos CA ó Ca, t; CF ó Cf, m; y CP, x; siempre será $MF = t - \frac{mx}{t}$, y $Mf = t + \frac{mx}{t}$, quando el punto P estuviere mas arriba del centro C; y por el contrario, saldrá $MF = t + \frac{mx}{t}$, y $Mf = t - \frac{mx}{t}$, quando estuviere mas abajo.

90 *El quadrado de una ordenada qualquiera* MP *al ege* Aa, *es al rectángulo de las partes* AP *y* Pa *de dicho ege, como el quadrado de su conjugado* Bb *es al quadrado del ege* Aa; *quiero decir que* $(PM)^2 : AP \times Pa :: (Bb)^2 : (Aa)^2$. 36.

Sentado lo mismo que poco ha (89), si en la equacion $tt \pm 2tz + zz = yy + mm \pm 2mx + xx$ que hallamos (88) por medio del triángulo rectángulo MPF, substituimos en lugar de z su valor $\frac{mx}{t}$, sacaremos $ttyy = t^4 - ttxx - mmtt + mmxx$, y de aquí la proporcion $yy : tt - xx :: tt - mm : tt$, esto es $(PM)^2 : AP \times Pa :: (BC)^2 : (CA)^2 :: (Bb)^2 : (Aa)^2$.

91 Si sobre el ege mayor Aa como diámetro trazamos un círculo, y llamamos $2c$ el otro ege Bb, será por la propiedad (I. 474) del círculo $(PN)^2 = AP \times Pa$; luego $(PM)^2 : (PN)^2 :: (CB)^2 : (CA)^2 :: cc : tt$. Por consiguiente $PM : PN :: c : t$. 36.

Fig. De lo dicho (90) sacaremos varias consecuencias muy fundamentales.

92 1.° Si tiramos una ordenada *MK* al otro ege
36. *Bb*, es evidente que $MK = CP = x$, y que $CK = PM = y$. Pero (90) $(PM)^2 : AP \times Pa :: (Bb)^2 : (Aa)^2$, esto es $yy : tt - xx :: 4cc : 4tt$; y por consiguiente $4ccxx = 4cctt - 4ttyy$; luego sacaremos $xx : cc - yy :: 4tt : 4cc$, ó $(MK)^2 : BK \times Kb :: (Aa)^2 : (Bb)^2$; quiero decir que el quadrado de una ordenada qualquiera *MK* al ege *Bb*, es al rectángulo de las partes *BK* y *Kb* de dicho ege, como el quadrado de su conjugado *Aa* es al quadrado del ege *Bb*.

38. 93 2.° Si llamámos al uno qualquiera de los eges
39. *Aa*, $2t$; su conjugado *Bb*, $2c$; su parámetro, p; cada una de sus ordenadas *PM*, y; cada una de sus abscisas *CP*, x; tendrémos (90) $(PM)^2 : AP \times Pa :: (Bb)^2 : (Aa)^2$; esto es $yy : tt - xx :: 4cc : 4tt :: p : 2t = Aa$, una vez que (79) $Aa : Bb :: Bb :: p$ ó $2t : 2c :: 2c : p = \frac{4cc}{2t}$. Multiplicando primero los estremos y medios de la proporcion $yy : tt - xx :: 4cc : 4tt$ y despues los de la proporcion $yy : tt - xx : p : 2t$, sacaremos $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$, é $yy = \frac{1}{2} pt - \frac{pxx}{2t}$. Y como esta propiedad se verifica en todos los puntos de la elipse, cuya posicion determina respecto de los dos eges conjugados *Aa*, *Bb*, se sigue que la equacion $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$ ó $yy = \frac{1}{2} pt - \frac{pxx}{2t}$ espresa perfectamente la naturaleza de la elipse comparada con sus eges.

Si

Si en lugar de estar en C el origen de las abscisas x, estuviese en A, de modo que x fuese AP, sería $AP \times Pa = 2tx - xx$, y tendríamos $yy : 2tx - xx :: 4cc : 4tt$. De donde sacaríamos $yy = \frac{cc}{tt}(2tx - xx)$, que espresa la naturaleza de la elipse quando está en A el origen de sus abscisas. Fig.

En el mismo supuesto de contarse las abscisas x desde el estremo A del ege mayor, tendríamos $yy : 2tx - xx :: p : 2t$, de donde sacaríamos $yy = px - \frac{pxx}{2t}$ que tambien representa la naturaleza de la elipse.

94 4.° Si multiplicamos los medios y los estremos 38.
de la proporcion $yy : tt - xx :: 4cc : 4tt$ que sacamos 39.
poco há, resultará la equacion $yy = \frac{cc}{tt}(tt - xx)$ que, en el supuesto de ser $t = c$, se reducirá á $yy = tt - xx$, que pertenece al círculo. Luego *un círculo se puede considerar como una elipse cuyos dos eges son iguales.*

95 5.° Si multiplicamos los medios y los estremos de la proporcion $yy : 2tx - xx : p : 2t$ que sacamos tambien poco há, saldrá $2tyy = 2tpx - pxx$ que si suponemos que t sea infinita, se reducirá (II. 183) á $2tyy = 2tpx$ ó $yy = px$, que es la equacion de la parábola. *Luego la elipse no se distingue de una parábola cuyo ege mayor es infinito.*

96 6.° Si tiramos dos ordenadas qualesquiera MP, NQ al ege Aa, habrá entre sus quadrados la misma razon que entre los rectángulos $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$ de las abscisas correspondientes á dichas ordenadas; porque (90) $(Bb)^2$:

Fig. $(Bb)^2 : (Aa)^2 :: (PM)^2 : AP \times Pa :: (QN)^2 : AQ \times Qa$; y por consiguiente $(PM)^2 : (QN)^2 :: AP \times Pa : AQ \times Qa$.

38\. 97 7.° Si por un punto qualquiera P del uno de
39\. los eges conjugados Aa se tira una paralela MM al otro ege Bb; esta paralela encontrará la elipse en dos puntos M, M igualmente distantes por ambos lados del punto P, y no la encontrará en mas. Porque para que los puntos M, M pertenezcan á la elipse, es preciso (93) que cada uno de los quadrados de $PM = y$ tomada al uno y otro lado del ege Aa, sea igual á una misma cantidad $cc - \frac{ccxx}{tt}$.

98 8.° De la equacion (93) $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$ se sigue que quanto mas va creciendo CP ó x al uno y otro lado del centro C, tanto menor será cada ordenada PM ó y á cada lado del uno qualquiera Aa de los eges; por manera que si CP ó x fuere igual á CA ó $Ca = t$, cada PM ó y será nula ó cero, y por el contrario, quanto menor fuere CP ó x, tanto mayor será tambien cada ordenada PM ó y á cada lado del ege Aa; de forma que si CP ó x fuere cero, cada PM ó y, que entónces será CB ó $Cb = c$, será la mayor ordenada. De donde se infiere

1.° Que si por los estremos B, b del uno de los eges conjugados se tiran paralelas al otro ege, serán tangentes en dichos puntos.

2.° Que la elipse se va apartando cada vez mas por ambos lados del uno qualquiera Aa de los dos eges, empezando desde el estremo A, hasta encontrar su conjugado

do *Bb*; y despues se vá acercando al mismo ege *Aa*, hasta que le encuentra en el otro estremo *a*. Fig.

99 9.° De (93) $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$ se sigue tambien que si tomamos los puntos *P*, *P* igualmente distantes por ambos lados del centro *C*, las ordenadas *PM*, *PM* serán iguales. De donde se infiere evidentemente que si el uno de los eges conjugados *Bb* divide por el medio en un punto *K* que no sea el centro, una linea qualquiera *MM* que remata en la elipse, dicha *MM* será paralela al otro ege *Aa*. Porque si tiramos las paralelas *MP*, *MP* al ege *Bb*, estará la *PP* dividida por el medio en *C*, por estarlo *MM* en *K*, y por consiguiente serán iguales las ordenadas *PM*, *PM*, luego *MM* será paralela al ege *Aa*. 38. 39.

100 10.° Si imaginamos que el plano en que está trazada la elipse, se doble por el uno de los eges *Bb*, de modo que lleguen á juntarse sus dos partes; es evidente que las dos semielipses coincidirán exactamente una sobre otra; esto es, los puntos *A*, *M* &c. coincidirán con los puntos *a*, *M* &c. por estar (99) divididas por el medio en *C*, *K* &c. todas las perpendiculares *Aa*, *MM* &c. á dicho ege; de donde se colige que los dos eges dividen la elipse en quatro porciones perfectamente iguales y uniformes que no se diferencian unas de otras sino en su posicion.

101 *Si por el un estremo* A *del uno de los eges* 40.
Aa *tiramos una recta qualquiera* AM *en el uno de los ángulos* aAL, aAL *que forma dicho ege con la linea* LAL *paralela á su conjugado* Bb; *dicha recta* AM *encontrará tam-*

Fig. *tambien la elipse en otro punto* M.

Tomemos en AL á qualquiera de los dos lados del punto A la parte AG igual al parámetro p del ege Aa, y tiremos la GF paralela á dicho ege, que encuentre la AM, prolongada si fuere menester, en F. Tomaremos en la AL y al mismo lado en que está la linea AM respecto del ege Aa, la parte $AL = GF$, y tiraremos por el otro estremo a del ege Aa la recta aL. El punto M donde la aL corta la AM, es uno de los puntos de la elipse.

Porque si tiramos MP paralela á AL, y llamamos Aa, $2t$; AG, p; GF ó AL, a; CP, x; PM, y; de los triángulos semejantes AGF, MPA, y LAa, MPa sacaremos $AG : GF :: MP : AP$, esto es, $p : a :: y : t \pm x = \frac{ay}{p} = AP$, y $AL : Aa :: PM : aP$, ó $a : 2t :: y : t \mp x = \frac{2ty}{a} = aP$. Por consiguiente siempre tendremos $AP \times Pa = tt - xx = \frac{2tyy}{p}$, ora caiga el punto P mas arriba del centro C, ora caiga debajo; y de aquí sacaremos $yy = \frac{1}{2} pt - \frac{pxx}{2t}$. Luego será PM (93) una ordenada al ege Aa, y por consiguiente el punto M será uno de los de la elipse MAM.

102 En virtud de esto, si dado un ege Aa de una elipse MAM con su parámetro p, tiramos por el uno A de los estremos de este ege una recta qualquiera AM
40. dentro del uno de los ángulos aAL, aAL que forma dicho ege con la linea LAL paralela á su conjugado Bb; podremos hallar facilmente el punto M donde la LAL encontrará la elipse MAM.

Es

103 Es evidente tambien que sola la linea *LaL* paralela al ege *Bb*, puede ser tangente de la elipse *MAM* en el punto *A* que es uno de los estremos de su conjugado *Aa*; porque no hay mas linea que esta que pasando por el punto *A* y prolongada por ambos lados, ni la encuentre en otro de sus puntos, ni entre adentro. Fig. 40.

104 *El centro* C *divide en dos partes iguales todos los diámetros como* MCm, *y estos no encuentran la elipse mas que en dos puntos* M, m. 40.

Si despues de tirada la ordenada *MP*, y tomada *Cp* igual á *CP*, tiramos la perpendicular *pm* que remate en el punto *m* de la recta *MCm*; es evidente que por ser iguales y semejantes los triángulos *CPM*, *Cpm*, será *CM* igual á *Cm*, y *PM* á *pm*. Pero como (99) son iguales unas á otras las ordenadas que por ambos lados distan igualmente del centro *C*, y *PM* es una ordenada; se sigue que tambien *pm* será una ordenada, y por consiguiente que el punto *m* es uno de los de la elipse.

Ademas de esto, es patente que si concebimos que se mueva desde *C* ácia *A* una recta paralela al ege *Bb*, la parte de dicha paralela, que cae dentro del ángulo *ACM*, irá siempre creciendo á medida que creciere *CP*, y por el contrario, siempre irá menguando la parte de dicha paralela que estuviere entre el qüadrante de elipse *AMb* y el ege *CA*, quiero decir que la ordenada *PM* (98) irá siempre menguando; de donde se sigue que la recta *CM* que pasa por el centro, no encuentra la elipse mas que

en

Fig. en un punto *M* al mismo lado del ege; y lo mismo se verificaria respecto del punto *m* que está al otro lado del ege.

41. 105 Si por un punto qualquiera *M* de una elipse
42. tiramos un diámetro *MCm*, una ordenada *MP* al uno qualquiera *Aa* de los dos eges, y una recta *MT*, de forma que *CT* sea tercera proporcional á *CP* y *CA*; el diámetro *SCs* paralelo á *MT* se llama *Diámetro conjugado* al diámetro *Mm*; y recíprocamente al diámetro *Mm* se le llama conjugado al diámetro *Ss*; de suerte que los dos juntos se llaman *Diámetros conjugados.*

106 Todas las rectas que tiradas desde los puntos de la elipse paralelamente al uno de dichos dos diámetros, rematan en el otro, se llaman *Ordenadas* á este último. Así, *NO* paralela al diámetro *Ss* es una ordenada á su conjugado *Mm.*

107 Una linea tercera proporcional á los diámetros conjugados, se llama el parámetro del diámetro que forma el primer término de la proporcion. Así, una tercera proporcional á *Mm* y *Ss*, será el *Parámetro* del diámetro *Mm.*

108 Luego si llamamos *CA*, t; *CP*, x; *PT*, s, será (105) *CT* ó $x + s = \frac{tt}{x}$; y así $sx = tt - xx = AP \times Pa$.

41. 109 *Si por los estremos* M, S *de dos diámetros conju-*
42. *gados* Mm, Ss, *tiramos dos ordenadas* MP, SK *á un ege* Aa; *la parte* CK *del ege comprehendida entre el centro, y la una de las ordenadas* SK, *será media proporcional entre las dos partes* AP, Pa, *en que divide el ege la otra ordenada* MP:

quie-

quiero decir que será $(CK)^2 = AP \times Pa$. Fig.

Llamemos CA, t; CP, x; PT, s; CK, m; y tendremos $AP \times Pa = tt - xx =$ (108) sx, y $AK \times Ka = tt - mm = sx + xx - mm$, despues de substituido en lugar de tt su valor $xx + sx$. Sentado esto, por la propiedad (96) de la elipse será $AP \times Pa : AK \times Ka :: (PM)^2 : (KS)^2 :: (TP)^2 : (CK)^2$ por razon de los triángulos semejantes TPM, CKS. Substituyendo en esta proporcion los valores analyticos de sus términos, sacarémos $sx : sx + xx - mm :: ss : mm$, y multiplicando estremos y medios, y transponiendo, resultará finalmente $(CK)^2$ ó $mm = \frac{sxx + ssx}{x + s} = sx = AP \times Pa$.

110 Yá que $(CK)^2 = tt - xx$, se sigue que $(CA)^2 - (CK)^2$, ó $AK \times Ka = xx$. Pero (93) $(CA)^2 :$ 41.
$(CB)^2 :: AK \times Ka : (SK)^2$, esto es, $tt : cc :: xx : (SK)^2$ 42.
$= \frac{ccxx}{tt}$; y $(CA)^2 : (CB)^2 :: AP \times Pa : (PM)^2$, ó $tt : cc :: tt - xx : (PM)^2 = cc - \frac{ccxx}{tt}$. Fuera de esto, por razon de los triángulos rectángulos CPM, CKS, será el quadrado $(CM)^2$ ó $(CP)^2 + (PM)^2 = xx + cc - \frac{ccxx}{tt}$, y el quadrado $(CS)^2$ ó $(CK)^2 + (KS)^2 = tt - xx + \frac{ccxx}{tt}$. Luego $(CM)^2 + (CS)^2 = tt + cc$: quiero decir, que la suma de los quadrados de dos diámetros conjugados qualesquiera Mm, Ss es igual á la suma de los quadrados de los dos eges Aa, Bb.

111 *El quadrado de una ordenada qualquiera* ON *al* 41.
diámetro Mm *es al rectángulo formado por las partes* MO, 42.
Om *de dicho diámetro, como el quadrado de su conjugado*

Fig. Ss *es al quadrado del mismo diámetro* Mm : *quiero decir que* $(ON)^2 : MO \times Om :: (Ss)^2 : (Mm)^2$.

Tiraremos las paralelas NQ, OH al ege Bb, y la paralela OR á su conjugado Aa, que encuentre en R la ordenada NQ prolongada, si fuere menester: llamaremos CP, x; PM, y; CA, t; PT, s; HQ ú OR, a; CH, b. Por razon de los triángulos semejantes CPM, CHO, y MPT, NRO tendremos 1.º $CP : PM :: CH : HO$ ó RQ, esto es $x : y :: b : HO$ ó $RQ = \frac{by}{x}$. 2.º $TP : PM :: OR : RN$, ó $s : y :: a : RN = \frac{ay}{s}$.

41. Sentado esto, ya que es siempre NQ la diferencia entre $RQ = \frac{by}{x}$, y $RN = \frac{ay}{s}$, y CQ es la suma de $CH = b$, y $HQ = a$, quando el punto N cae entre los puntos M, S, ó m, s; y por el contrario siempre es NQ la suma de RQ

42. y RN, y CQ la diferencia entre CH, HQ, quando el punto N cae en otra parte, tendremos $(NQ)^2 = \frac{bbyy}{xx} \pm \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss}$, y $(CQ)^2 = aa \mp 2ab + bb$; esto es $-\frac{2abyy}{sx}$, y $+2ab$ en el primer caso, y en el segundo $+\frac{2abyy}{sx}$, y $-2ab$. Pero (96) $AP \times Pa : AQ \times Qa$ ó $(CA)^2 - (CQ)^2 :: (PM)^2 : (QN)^2$, ó substituyendo sus valores analyticos, $tt - xx : tt - aa \pm 2ab - bb :: yy : (QN)^2 = \frac{ttyy - aayy \pm 2abyy - bbyy}{tt - xx}$. Comparando uno con otro estos dos valores de $(NQ)^2$, sacaremos la equacion $\frac{bbyy}{xx} \pm \frac{2abyy}{sx} + \frac{aayy}{ss} = \frac{ttyy - aayy \pm 2abyy - bbyy}{tt - xx}$, que, borrando en el un miembro el término $\pm \frac{2abyy}{sx}$, y en el otro el término $\pm \frac{2abyy}{tt - xx}$, que es su igual por ser (108) $sx = tt - xx$, y dividiendo por yy, se reduce á $\frac{bb}{xx} + \frac{aa}{ss} = \frac{tt - aa - bb}{tt - xx}$.

Si

Si multiplicamos por xx, y pasamos bb al otro miem- Fig.
bro, hallarémos $\frac{aaxx}{ss}$ ó $\frac{aax^4}{ssxx} = \frac{ttxx - aaxx - bbtt}{tt - xx}$; multiplican- 41.
do el primer miembro por $ssxx$, y el segundo por el qua- 42.
drado de $tt - xx$ valor de sx (y para esto bastará multiplicar el numerador por $tt - xx$), sacaremos $aax^4 = t^4xx - aattxx - bbt^4 - ttx^4 + aax^4 + bbttxx$; borrando en ambos miembros de la última equacion la cantidad aax^4, transponiendo $aattxx$, y dividiendo por $ttxx$, se sacará finalmente $(HQ)^2$ ó $(OR)^2 = aa = tt - xx + bb - \frac{bbtt}{xx}$.

Ahora, pues, si llamamos z el semidiámetro CM ó Cm, tendremos por razon de los triángulos semejantes CPM, CHO, $CP : CM :: CH : CO$, ó $x : z :: b : CO = \frac{bz}{x}$; y por consiguiente $MO \times Om = zz - \frac{bbzz}{xx}$. Pero los triángulos semejantes ORN, CKS dán $(ON)^2 : (CS)^2 :: (OR)^2 : (CK)^2 :: MO \times Om : (CM)^2$, ó substituyendo en lugar de los quatro últimos términos sus valores, $tt - xx + bb - \frac{bbtt}{xx} : tt - xx :: \frac{xxzz - bbzz}{xx} : zz$, una vez que multiplicando estremos y medios resulta un mismo producto: luego $(ON)^2 : MO \times Om :: (CS)^2 : (CM)^2 :: (Ss)^2 : (Mm)^2$.

112 De esto inferiremos

1.° Que lo demostrado (90) respecto de los dos eges Aa y Bb, se verifica tambien en virtud de lo que acabamos de probar en dos diámetros conjugados qualesquiera Mm, Ss. Pero como lo dicho en los números 92, 93, 96, 97, 98, 99, 101, 102 y 103 es una consecuencia de lo demostrado (90), y se verifica

Fig. igualmente sea ó no recto el ángulo *ACB*, se sigue, que si en los números referidos suponemos que en lugar de ser los dos eges las lineas *Aa*, *Bb*, sean dos diámetros conjugados qualesquiera, tambien serán ciertos en este supuesto, porque se demostrarán del mismo modo.

43. 113 2.° Como queda cierto lo dicho (98 y 103) aun quando las lineas *Aa*, *Bb* en vez de ser los dos eges, son dos diámetros conjugados qualesquiera como *Mm*, *Ss*; se sigue que la linea *MT* tirada por el uno de los estremos *M* de un diámetro conjugado qualquiera *Mm*, paralelamente á su diámetro conjugado *Ss*, es tangente en *M*, y que ninguna otra linea mas que esta puede tocar la elipse en dicho punto.

De donde se echa de ver que desde un punto dado en una elipse, no se la puede tirar sino una sola tangente.

114 3.° De aquí y de lo dicho (111) se puede inferir que si por un punto qualquiera *M* de una elipse, tiramos una ordenada *MP* al uno qualquiera *Aa* de los dos eges, y despues de tomada del lado del punto *P*, la *CT* tercera proporcional á *CP*, *CA*, tiramos la recta *MT*; dicha *MT* será tangente en *M*. Y recíprocamente, si *MT* fuere tangente en *M*, y tiramos la ordenada *MP* al uno *Aa* de los dos eges, las partes *CP*, *CA*, *CT* de dicho ege estarán en proporcion geométrica continua.

115 4.° Si en lo que dijimos (105, 106 y 107) concebimos que las lineas *Aa*, *Bb* no son los dos eges, sino

dos

dos diámetros conjugados qualesquiera; se echará de ver que son igualmente ciertas dichas proposiciones una vez que se demuestran del mismo modo que antes, segun lo dá á entender claramente la figura, cuyos triángulos semejantes darán las mismas proporciones que si fuesen *Aa* y *Bb* los dos eges. Fig.

De donde se infiere 1.° que lo dicho (114) es tambien cierto quando en lugar de ser la linea *Aa* un ege es un diámetro qualquiera. 2.° Que en este supuesto los diámetros conjugados *Mm*, *Ss* pueden ser los dos eges, y que podemos considerar los dos eges como si fueran dos diámetros conjugados que se cruzan á angulos rectos.

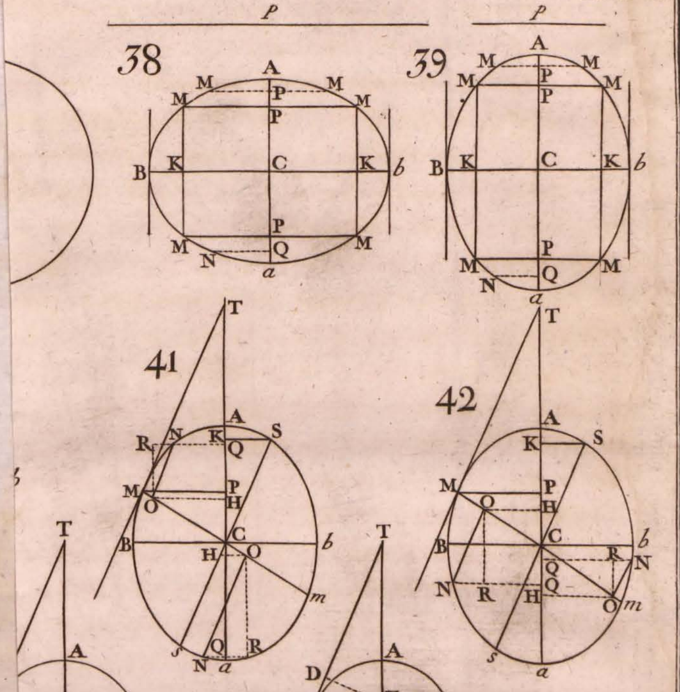
116 *Si por un punto qualquiera de una elipse cuyo centro sea* C, *se tira una ordenada* MP *al uno* Aa *de los eges, y una perpendicular* MG *á la tangente* MT *que pasa por el punto* M; *siempre estará* CP *con* PG *en la razon dada del ege* Aa *á su parámetro.* 44.

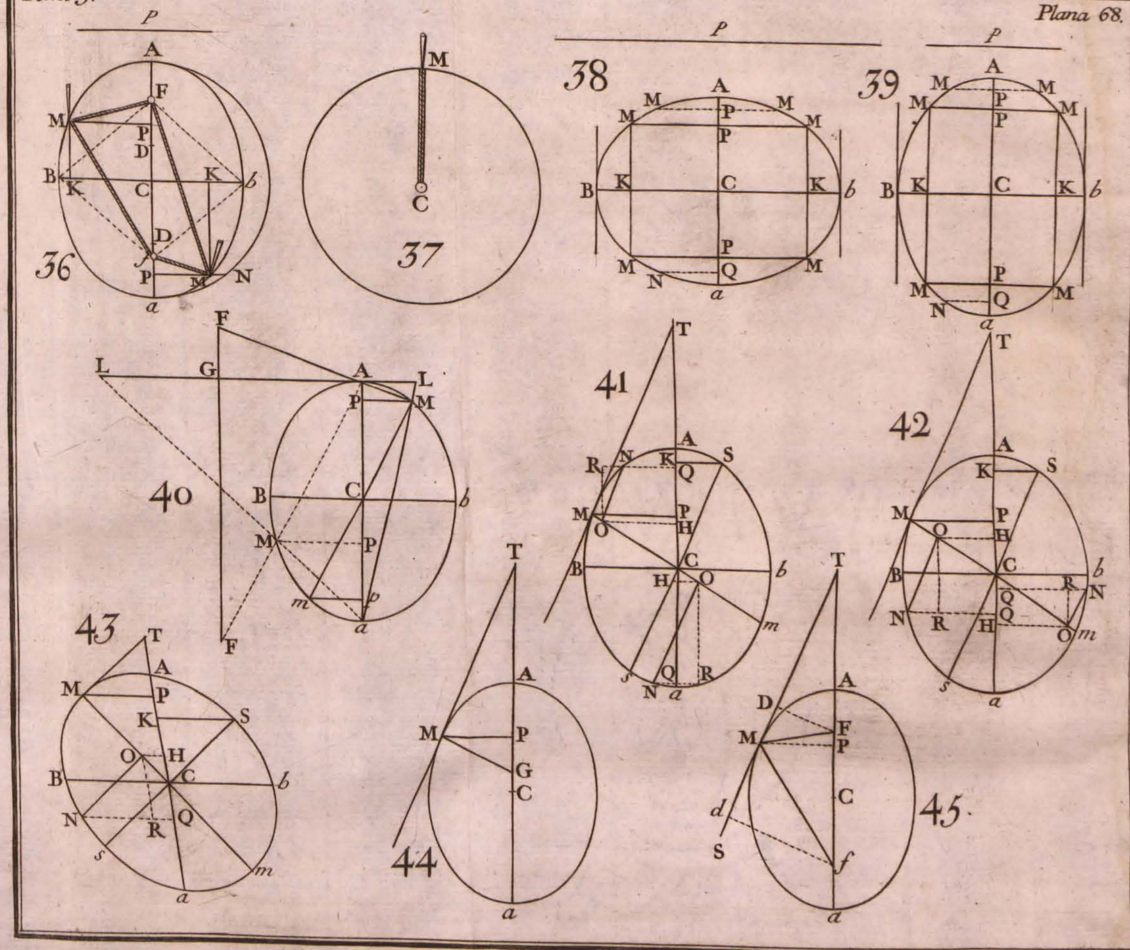
Porque si llamamos el semiege *CA* ó *CA*, t; *CP*, x; *PM*, y; tendremos (114) $CT = \frac{tt}{x}$, y por consiguiente $PT = \frac{tt-xx}{x}$. De los triángulos rectángulos semejantes *TPM*, *MPG* sacaremos $TP : PM :: PM : PG$, ó $\frac{tt-xx}{x} : y :: y : PG = \frac{xyy}{tt-xx}$; de donde resulta la proporcion $CP : PG :: AP \times Pa : (PM)^2$, esto es, $x : \frac{xyy}{tt-xx} :: tt - xx : yy$; porque multiplicando estremos y medios sale un mismo producto xyy. Pero el rectángulo $AP \times Pa$ es (93) al quadrado $(PM)^2$, como el ege *Aa* es á su parámetro. Luego &c.

Fig. 45. 117 *Si por un punto qualquiera* M *de una elipse, tiramos una tangente* TMS, *y las* MF, Mf *á los dos focus* F *y* f; *los ángulos* FMT, fMS *que forman dichas lineas por ambos lados con la tangente* TMS *son iguales uno con otro.*

Porque tirando las perpendiculares *FD*, *fd* á dicha tangente; el primer ege *Aa* que la encuentre *T*, y la ordenada *PM* á dicho ege; y llamando *CA* ó *Ca*, t; *CF* ó *Cf*, m; *CP*, x; tendremos $MF : Mf :: TF$ ó $CT - CF : Tf$ ó $CT + Cf$, esto es (89 y 114) $t - \frac{mx}{t} : t + \frac{mx}{t} :: \frac{tt}{x} - m : \frac{tt}{x} + m$, una vez que resulta un mismo producto de la multiplicacion de los medios que de la de los estremos. Pero los triángulos semejantes *TFD*, *Tfd* dan $TF : Tf :: FD : fd$. Luego la hypotenusa *MF* del triángulo rectángulo *MDF* será á la hypotenusa *Mf* del triángulo rectángulo *Mdf*, como el lado *DF* es al lado *df*; y por consiguiente serán semejantes los triángulos *MDF*, *Mdf*. Luego serán iguales uno con otro los ángulos *FMD*, *fMd* ó *FMT*, *fMS* opuestos á los lados homólogos *DF*, *df*.

118 De aquí se evidencia que si se prolonga indefinitamente al uno y otro lado del punto de contacto *M* la tangente *TMS*, dejará toda la elipse del lado de sus dos focus *F*, *f*. Y como esto se verificará esté donde estubiere el punto *M* de la elipse, se infiere que toda la elipse será cóncava al rededor de sus dos focus, y por consiguiente lo será tambien al rededor de su centro.


38
39
41
42
45


36
37
38
39
40
41
42
43
44
45.

119 *Si por el un estremo* A *de un diámetro* Aa *se tira una paralela* DAE *á su conjugado* Bb, *que encuentre otros dos diámetros conjugados qualesquiera* Mm, Ss *en los puntos* D, E; *el rectángulo* DA × AE *será igual al quadrado de la mitad* CB *del diámetro* Bb; *quiero decir que será* DA × AE $=$ (CB)^2. Fig. 46.

Tirarémos, para probarlo, por los estremos M, S de los diámetros conjugados Mm, Ss, las ordenas MP, SK al diámetro Aa; llamaremos CA, t; CB, c; CP, x; PM, y; y tendremos (109) $(CK)^2 = AP \times Pa = tt - xx$, y por consiguiente $AK \times Ka$ ó $(CA)^2 - (CK)^2 = xx$. Pero (111) $(BC)^2 : (CA)^2 :: (MP)^2 : AP \times PA$ ó $(CK)^2$, esto es, $cc : tt :: yy : (CK)^2 = \frac{ttyy}{cc}$. Y $(CA)^2 : (CB)^2 :: AK \times Ka : (KS)^2$, ó $tt : cc :: xx : (KS)^2 = \frac{ccxx}{tt}$. Luego sacando las raices quadradas, resulta $CK = \frac{ty}{c}$, y $KS = \frac{cx}{t}$. Pero los triángulos semejantes CPM, CAD, y CKS, CAE dan $CP : PM :: CA : AD$, ó $x : y :: t : AD = \frac{ty}{x}$; y $CK : KS :: CA : AE$, ó $\frac{ty}{c} : \frac{cx}{t} :: t : AE = \frac{ccx}{ty}$. Luego $DA \times AE = cc = (BC)^2$.

120 Si por los estremos M, m, y S, s de los diámetros conjugados Mm, Ss de una elipse, se tiran las rectas EH, FG y GH, FE respectivamente paralelas á sus conjugados, quedará inscripta la elipse en un paralelogramo. Vamos á probar que 47.

Todos los paralelogramos circunscriptos á la elipse son iguales unos con otros, é iguales al rectángulo de los dos eges.

Tirémos por el estremo M del diámetro Mm la MP, y

Fig. por el estremo S del diámetro Ss, la SQ, ambas ordenadas al primer ege Aa. Llamemos este primer ege $2t$; al segundo Bb, $2c$; CP, x; SQ, u. Una vez que (114) $CT = \frac{tt}{x}$, será $PT = \frac{tt-xx}{x}$, y en virtud de lo probado (110) será $(SQ)^2 = uu = cc - \frac{cc(CQ)^2}{tt}$; de donde sacaremos despues de multiplicado todo por tt, traspasado y dividido por cc, $(CQ)^2 = tt - \frac{ttuu}{cc}$.

Sentado esto, los triángulos semejantes SQC, MPT darán $(MP)^2 : (PT)^2 :: (SQ)^2 : (QC)^2$; esto es $\frac{cc}{tt}(tt-xx) : \frac{(tt-xx)^2}{x^2} :: u^2 : tt - \frac{ttuu}{cc}$, de donde saldrá $u = \frac{c}{t}x$, y por consiguiente $CP : SQ : t : c$. Por el mismo camino hallariamos $CQ : MP :: t : c$. Luego $CP : SQ :: CQ : MP :: t : c$, y los triángulos SQC, CMP tendrán iguales sus areas. Luego 1°. $(SQ)^2 = \frac{cc(CP)^2}{tt}$. 2°. $(QC)^2 = \frac{tt(MP)^2}{cc}$.

Si tiramos la MS, la superficie del triángulo MCS será igual á la superficie del trapecio $SQPM$ menos la superficie de los dos triángulos CPM, CQS. Luego la superficie del espresado triángulo será $= \frac{1}{2}(SQ + MP)(QC + CP) - \frac{1}{2}QC \times SQ - \frac{1}{2}CP \times MP = \frac{1}{2}CQ \times PM + \frac{1}{2}CP \times SQ = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{c}(MP)^2 + \frac{c}{t}(CP)^2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{c} \times \frac{cc}{tt}(tt - (CP)^2) + \frac{c}{t}(CP)^2\right] = \frac{1}{2}ct$. Luego la superficie del paralelogramo $CSEM = ct$, y la del paralelogramo total $FEGH = 4ct = 2c \times 2t$. Por consiguiente todos los paralelogramos circunscriptos á la elipse son iguales unos á otros por ser iguales al rectángulo de los dos eges.

48. 121 Cuestion I. *Dados dos diámetros conjugados* Aa, Bb *de una elipse con una recta* MCm *que pase por su cen-*

tro

tro C; *hallar los puntos* M, m *donde dicha linea encuen-* Fig.
tra la elipse. 48.

Tirarémos por el uno A de los estremos del diámetro Aa, una recta indefinita AD paralela á su conjugado Bb, que encuentre en D la CM dada de posicion; por el punto A tirarémos á AD la perpendicular $AO = CB$, y por los puntos O, D la OD. Con el radio OA describiremos un círculo que cortará la OD en dos puntos N, n, por los quales se tirarán las paralelas NM, nm á la OC que vá desde el centro de la elipse al centro del círculo. Los puntos M, m donde dichas paralelas encuentran la CD serán de la elipse, y determinarán por consiguiente los estremos del diámetro MCm dado de posicion.

Porque si tiramos las paralelas MP, NQ á AD que encuentren las rectas CA, OA en P y Q; los triángulos semejantes CDO, MDN, y CDA, CMP, y ODA, ONQ darán $CA : CP :: CD : CM :: OD : ON :: OA : OQ$, esto es $CA : CP :: OA : OQ$. Y por consiguiente si tiramos la recta PQ, será paralela á OC, y tambien á MN, que segun suponemos es paralela á OC. Luego las paralelas MP, NQ serán iguales. Sentado esto, si llamamos CA, t; CB ó AO ó ON, c; CP, x; PM ó NQ, y; tendremos $CA : CP :: OA : OQ$, ó $t : x :: c : OQ = \frac{cx}{t}$. Y por razon del triángulo OQN rectángulo en Q, $(NQ)^2$ ó $(MP)^2 = (ON)^2 - (OQ)^2$, esto es $y^2 = cc - \frac{ccxx}{tt}$. Luego MP será una ordenada (93) al diámetro Aa, y por consiguiente el punto M será uno de los de la elipse cuyos diámetros conju-

Fig. gados son las rectas *Aa*, *Bb*. Pero por razon de las paralelas *NM*, *OC*, *nm*, el centro *C* divide por el medio la *Mm*, ya que por la propiedad del círculo, el punto *O* divide del mismo modo á la *Nn*. Luego tambien el punto *m* será (104) uno de los de la elipse.

Si los diámetros conjugados *Aa*, *Bb* fueran los dos eges, las paralelas *CO*, *PQ* se confundirian entonces con las rectas *CA*, *AO* que no serian sino una sola linea, y en este caso se resolveria, y demostraria aun mas facilmente la cuestion.

48. 122 Cuestion II. *Dados dos diámetros conjugados* Aa, Bb *de una elipse*; *hallar los dos eges* Mm, Ss; *y demostrar al mismo tiempo que una elipse no puede tener mas que dos.*

Tiraremos por el uno *A* de los estremos del diámetro *Aa* la *DE* paralela á su conjugado *Bb*, y la *AO* perpendicular á *DE* é igual á *CB*. Tiraremos tambien la *OC*, y por su medio *F* la *FG* que la cruce á ángulos rectos, y que vaya á encontrar en *G* la *DE*, en la qual tomaremos al uno, y otro lado del punto *G* las partes *GD*, *GE* cada una igual á *GO* ó *GC*. Por último, tirando las *CD*, *CE*, los dos eges *Mm*, *Ss* estarán sobre estas rectas.

Porque una vez que podemos considerar (115) los dos eges como si fueran dos diámetros conjugados, que forman uno con otro un ángulo recto, encontrarán dichos eges la recta *DE* en unos puntos *D* y *E*, tales que el círculo trazado sobre el diámetro *DE*, pasará por los puntos *C* y *O*, pues siendo el rectángulo *DA* × *AE* igual (119) al

al quadrado de AO, serán rectos los ángulos DOE, DCE. Fig.
Pero se viene á los ojos que es esto mismo lo que acabamos de hacer en virtud de la construccion, pues por ser las rectas GO, GC, GE, GD iguales todas unas con otras, son radios de un mismo círculo. Pero como no puede haber en la DE sino dos puntos que cumplan á un mismo tiempo con las dos condiciones de que sea recto cada uno de los ángulos DCE y DOE, se sigue que los diámetros conjugados Mm, Ss que forman uno con otro un ángulo recto, serán los mismos eges, y que no pueden ser mas que dos. 48.

Determinaremos su magnitud con tirar las rectas OD, OE, y por los puntos N y R en que encuentran el círculo cuyo radio es OA, tiraremos las paralelas NM, RS. Porque es evidente (121) que los puntos M, S donde encuentran las rectas CD, CE serán puntos de la elipse cuyos diámetros conjugados son Aa y Bb, cuyos puntos serán por consiguiente los estremos de sus eges.

123 Si quisiéramos hallar dos diámetros conjugados Mm, Ss que hiciesen uno con otro un ángulo MCS igual á un ángulo dado, dados otros dos diámetros conjugados Aa, Bb; se reduciria la operacion á determinar en la recta DE dada de posicion, dos puntos D, E, tales que si desde ellos tiráramos á los dos puntos O, C dados fuera de esta linea las rectas DO, OE, CD, CE, fuese recto el ángulo DOE, y el ángulo DCE fuese igual al ángulo dado.

124 Cuestion III. *Dados los dos eges* Aa, Bb *de una elip-*

Fig. *elipse; hallar dos diámetros conjugados* Mm, Ss *que formen uno con otro el ángulo* MCS *igual á un ángulo dado.*

49. Supondremos que los diámetros *Mm*, *Ss* sean con efec-
50. to los que se piden, y que encuentren en los puntos *D* y *E* la recta indefinita *DE* tirada paralelamente al ege mayor *Bb* por el estremo *A* del ege menor *Aa*. Tiraremos desde el centro *C* de la elipse, la *CF* que forme con *DE* en *F* el ángulo *CFE* igual al ángulo dado *MCS*, y llamaremos *CA*, t; *CB*, c; *AF*, a; *AE*, z; de donde resulta *AD* (119) $= \frac{cc}{t}$, $CE = \sqrt{(tt + zz)}$ por razon del triángulo rectángulo *CAE*. Sentado esto,

Los triángulos *FEC*, *CED* serán semejantes, por tener el ángulo en *E* comun, y el ángulo *CFE* igual por construccion al ángulo *MCS*; por esta razon $FE : EC :: EC : ED$, ó $z - a : \sqrt{(tt + zz)} :: \sqrt{(tt + zz)} : z + \frac{cc}{t}$. Si multiplicamos los medios y los estremos de esta proporcion, sacaremos la equacion $zz - az + cc - \frac{acc}{t} = tt + zz$, que, borrando en ambos miembros zz, multiplicando despues por z, y dividiendo finalmente por a, se reduce á $zz - \frac{cc}{a}z + \frac{tt}{a}z + cc = 0$. Si para abreviar hacemos $\frac{cc - tt}{a} = 2b$, se transformará la equacion precedente en $zz - 2bz + cc = 0$, ó $zz - 2bz + bb = bb - cc$, de la qual sacaremos $z - b$, ó $b - z = \sqrt{(bb - cc)}$, y por consiguiente la incógnita $AE = z = b \pm \sqrt{(bb - cc)}$. La construccion que subministra esta última equacion es la siguiente.

Despues de prolongado el ege menor *Aa* hasta *O*, de modo que *AO* sea igual á la mitad *CB* del ege mayor; se tira-

rará CF, que forme con DE tirada paralelamente á Bb por el punto A, el ángulo CFE igual al ángulo dado. Tiránse tambien OF, y las rectas OH, CG perpendiculares á OF, CF, que concurran con DE en los puntos H, G *. Descríbase desde O como centro, y con el radio OK igual á la mitad de GH, que es la parte de AD prolongada, comprehendida entre G y H, un arco de círculo que corte DE en los puntos K, K, y tomando en DE las partes KD, KE cada una igual á KO, tírense por el centro C de la elipse las rectas DC, EC. Los diámetros Mm, Ss que buscamos, estarán en estas lineas. Fig. 49. 50.

Porque por razon de los ángulos rectos FAC, FCG, y FAO, FOH tendremos $AG = \frac{tt}{a}$, $AH = \frac{cc}{a}$; y por consiguiente $GH = \frac{cc - tt}{a} = 2b$. Luego el radio OK que es igual á la mitad de HG, será igual á b; y del triángulo rectángulo OAK sacaremos $AK = \sqrt{(bb - cc)}$, y AE ó $KE \mp AK = b \mp \sqrt{(bb - cc)}$, y AD ó $KD \pm AK = b \pm \sqrt{(bb - cc)}$. Sentado esto, si multiplicamos el valor de AE por el de AD, resultará $AE \times AD = cc = (CB)^2$: luego (119) son conjugados los diámetros Mm, Ss. Pero $AE + AD$ ó $DE \times (AE - AF)$ ó $EF = 2b \times \left[b \mp \sqrt{(bb - cc)} - a\right] = 2bb \mp 2b\sqrt{(bb - cc)} - 2ab = 2bb \mp 2b\sqrt{(bb - cc)} + tt - cc$, substituyendo en lugar de $2ab$ su valor $cc - tt$; y por razon del triángulo rectángulo CAE,

* No se han señalado en las figuras los puntos H y G sobre DE, porque hubieran salido demasiado grandes; ademas de que es muy facil concebirlos puestos en su verdadero lugar.

Fig. CAE, $(CE)^2 = (AE)^2 + (CA)^2 = 2bb \mp 2b\sqrt{(bb - cc)}$
49. $+ tt - cc = DE \times EF$; de donde resulta $FE : EC ::$
50. $EC : ED$. Y por consiguiente serán semejantes los triángulos FEC, CED, por tener el ángulo en E comun, y los lados adyacentes á dicho ángulo proporcionales. Luego el ángulo MCS será igual al ángulo dado CFE.

Para conocer la magnitud CM, CS de los dos semidiámetros que se buscan; tiraremos las rectas OD, OE, y por los puntos N, R donde encuentran el círculo cuyo radio es OA, las paralelas NM, RS á OC. Porque se viene á los ojos (121) que serán de la elipse los puntos M, S donde encuentran las rectas CD, CE, y que determinarán por consiguiente los estremos de dichos diámetros.

125 De la construccion que acabamos de dar resulta 1.° que para que sea posible la cuestion, es forzoso que $OK = \frac{cc - tt}{2a}$ sea mayor ó igual á $AO = c$; porque á no ser así, el círculo que se trazare con el radio OK, no encontrará la DE en punto alguno, cuya circunstancia es sin embargo necesaria para la construccion.

2.° Que quando OK fuere mayor que OA, siempre se hallarán por medio de los dos puntos K, K dos diferentes diámetros conjugados Mm, Ss que resolverán igualmente la cuestion; pero entonces el diámetro Ss de la fig. 50 será igual al diámetro Mm de la fig. 49, y estará colocado del mismo modo al otro lado del ege Aa, porque AE en la fig. 50 es igual á AD en la fig. 49. Y del mismo modo el diámetro Mm en la fig. 50 es igual al diámetro Ss en la fig. 49, y está colo-

ca-

cado del mismo modo al otro lado del ege *Aa*; porque *AD* Fig.
de la fig. 50 es igual á *AE* de la fig. 49. Quiero decir, que los dos diámetros conjugados diferentes *Mm*, *Ss* que resuelven igualmente la cuestion, están puestos de un mismo modo al uno y al otro lado del ege *Aa*, y que en las dos posiciones distintas, sus magnitudes se quedan las mismas.

3.° Que quando $OK = OA$, los dos puntos de inter- 51.
seccion *K*, *K* coinciden con el punto de contacto *A*; y en este caso todo está reducido á tomar las partes *AE*, *AD* cada una igual á la mitad *CB* del ege mayor: de donde resulta evidentemente que no admite este caso mas que una resolucion, y que son iguales unos con otros los dos diámetros conjugados *Mm*, *Ss* que le resuelven.

126. Tambien es evidente que quanto mayor es *AF* 49.
$= a$, tanto mayor es tambien el ángulo obtuso *CFE* dado, 50.
y tanto mas mengua la linea $OK = \frac{cc - tt}{2a}$; por manera que 51.
quando *AF* fuere la mayor posible, el ángulo obtuso *CFE* será tambien el mayor; y por el contrario la linea *OK* será la menor, quiero decir, será igual á *AO*. Pero si en este
caso tiráramos las rectas *Ba*, *ab*, todos los triángulos rec- 51.
tángulos *aCB*, *CAD*, *aCb*, *CAE* serían iguales unos con otros; por ser cada una de las lineas *AE*, *AD* igual á la mitad *CB* ó *Cb* del ege *Bb*, y por ser *CA* igual á *Ca*. Luego el ángulo *ACM* sería igual al ángulo *CaB*, y el ángulo *ACS* al ángulo *Cab*; y por consiguiente el ángulo dado *MCS* ó *CFE* sería tambien igual al ángulo *Bab*. De donde se sigue

1.° Que si desde el uno de los estremos *a* del ege menor

Aa,

Fig. *Aa*, se tiran á los estremos *B*, *b* del mayor, las lineas *aB*,
49. *ab*; el ángulo obtuso dado *CFE* debe ser igual ó menor
50. que el ángulo *Bab*, para que sea (125) posible la cues-
51. tion.

2.° Que quando le es igual como en la fig. 51, no hay mas que dos diámetros conjugados *Mm*, *Ss* que la resuelvan, y son iguales uno con otro.

49. 3.° Que en el caso de ser menor como en las figu-
50. ras, siempre hay dos diámetros conjugados distintos que resuelven la cuestion: que están en situacion semejante al uno y otro lado del ege menor, subsistiendo entre ellos uno mismo dicho ángulo, y que su magnitud se mantiene tambien la misma en estas dos posiciones distintas.

127 Cuestion IV. *Dados dos diámetros conjugados* Aa, Bb *de una elipse*; *trazarla con un movimiento continuo.*

I. Se puede resolver esta cuestion buscando (122) los dos eges, y trazando despues la curva por lo dicho (87).

52. II. Tirarémos por el un estremo *A* del uno de los
53. diámetros dados *Aa*, una perpendicular *AH* al otro *Bb*, en cuya perpendicular tomaremos al uno ú al otro lado del punto *A* la $AQ = CB$. Y despues de tirada la *CQ*, haremos que corra la linea $GF = HQ$ con sus estremos á lo largo de las lineas *Bb*, *CQ*, prolongándolas quanto fuere menester al uno y otro lado del centro *C*, hasta que despues de haber andado succesivamente los quatro ángulos que estas lineas forman, se restituya á la misma situacion en que se hallaba quando empezó á moverse. Si tomamos

GM

$GM = AQ$, el punto M trazará en este movimiento la elipse que se pide. Fig.

Porque si tiramos GP paralela á QA, que encuentre en P el diámetro Aa, y en O al diámetro Bb; de los triángulos semejantes CHQ, COG, y CAQ, CPG inferirémos $CQ : CG :: AQ = GM : GP :: HQ = GF : GO$. Y por lo mismo la linea PM será paralela al diámetro Bb. Sentado esto, llamaremos CA, t; AQ ó CB ó Cb, c; CP, x; PM, y, y tendremos $CA : CP :: AQ : GP$, esto es, $t : x :: c : GP = \frac{cx}{t}$. Y del triángulo rectángulo GPM sacaremos $(PM)^2 = (GM)^2 - (GP)^2$, quiero decir $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$. Luego la linea PM será (93 y 86) una ordenada al diámetro Aa de la elipse cuyos diámetros conjugados son las lineas Aa, Bb.

Si los dos diámetros conjugados Aa, Bb fuesen los 54. dos eges, es evidente que las lineas AQ, CQ se confundirían con el diámetro Aa, que sería el uno de los eges, y que el punto H coincidiría con el centro C. Por consiguiente habríamos de tomar en este caso $GF = CQ$, suma ó diferencia de los dos semieges CA, CB, para hacer que corrieran sus estremos á lo largo de los eges Aa, Bb, prolongados si fuese necesario.

Como las lineas Aa, Bb se cruzan á ángulos rectos en el punto C; se sigue que, sea la que fuere la situacion de la recta GF mientras corre á lo largo de dichas lineas, el círculo cuyo diámetro fuese GF pasará constantemente por el punto C; y que por consiguiente la linea CD

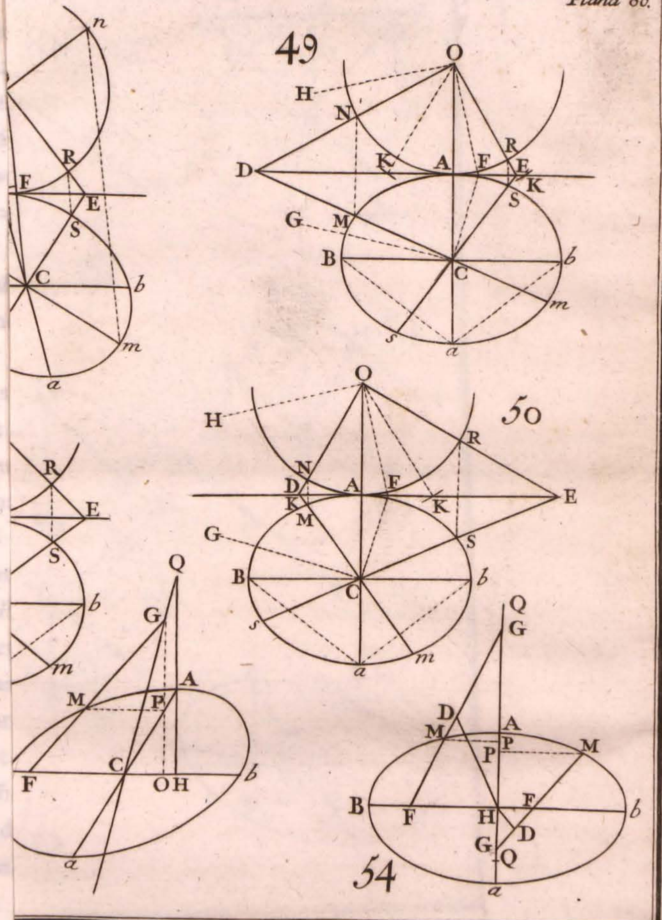
que

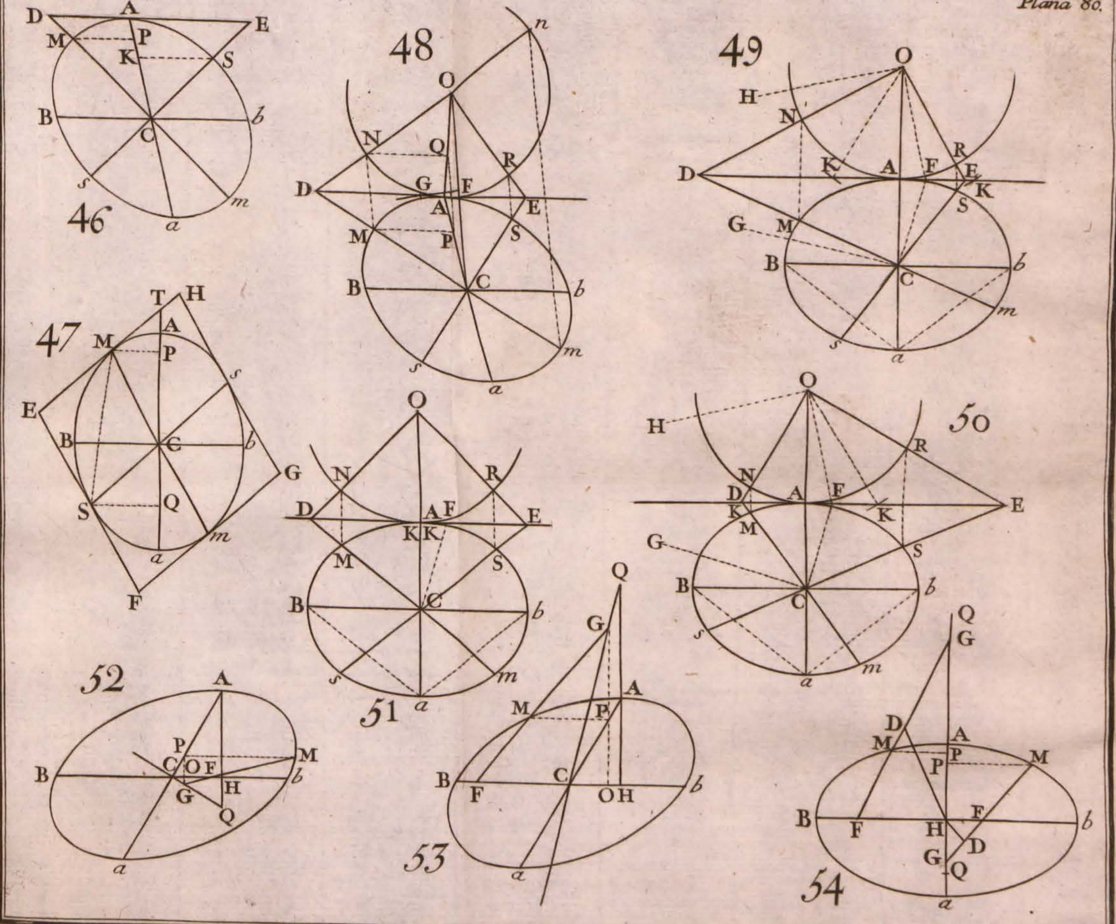
Fig. que pasa por el punto D que está en medio de FG, siempre será igual á DF, porque las lineas CD, DF, DG siempre serán radios del espresado círculo. De aquí inferiremos la descripcion siguiente.

Sean dos rectas CD, DF igual cada una de ellas á la mitad de CQ suma ó diferencia de los dos semieges CB, CA, de tal suerte unidas una con otra en su estremo comun D, que puedan dar la buelta al rededor de dicho punto, como las piernas de un compas al rededor de su charnela. Afiáncese el estremo C de la recta CD en el centro de la elipse, y concíbase que el estremo F de la otra recta FD se mueve á lo largo del ege Bb, llevándose consigo la DC movil al rededor del punto fijo C. Es evidente que si tomamos en la FD, prolongada si fuere menester, la parte $FM = CA$, trazaremos en virtud de este movimiento del punto M la elipse que buscamos.

35. 128 Cuestion V. *Dados dos diámetros conjugados* Aa, Bb *de una elipse; hallar muchos de sus puntos.*

I. Por el un estremo A del uno de los diámetros dados Aa, se tirarán la indefinita DAD paralela á su conjugado Bb, y la AO perpendicular á AD é igual á la mitad CB del diámetro Bb; se tirará OC; y desde O como centro y con el radio OA, se describirá un círculo. Hecho esto, se tirarán á arbitrio por ambos lados de CA quantas lineas CD, CD &c. se quisieren; y desde los puntos D, D &c. donde encuentran la DAD, al centro O, las rectas DO, DO &c. que corten la circunferencia del cír-


49
50
54


46
47
48
49
50
51
52
53
54

círculo en los puntos N, N &c: se tirarán las NM, NM &c. paralelas á OC, que encuentren en M, M &c. las rectas correspondientes CD, CD &c. en las quales se señalarán al otro lado del centro C unos puntos m, m &c. que estén á la misma distancia de dicho centro que los puntos correspondientes M, M &c. Es evidente por lo dicho (121) que la curva que pasa por todos los puntos M, M &c; m, m &c. hallados por este camino, tendrá por diámetros conjugados las rectas Aa, Bb. Fig.

II. Sobre el uno de los semidiámetros CB, se señalarán las partes CE, EE &c. pequeñas é iguales unas con otras, de una magnitud arbitraria, y quantas cupieren en dicho semidiámetro; se le tirarán las perpendiculares ED, ED &c que encuentren en D, D &c. la circunferencia del círculo cuyo centro sea C, y CB el radio. Se tirará AB, y por el punto E que estuviere mas cerca del centro C, la EP paralela á AB, que encuentre CA en P. En el diámetro Aa se señalarán al uno y otro lado del centro C quantas partes PP, PP &c. iguales á CP cupieren en él; por todos los puntos P, P &c. se tirarán las MPM, MPM &c. paralelas al diámetro Bb, y en cada una de estas se señalarán al uno y otro lado de P las partes PM, PM cada una igual á su correspondiente ED. La curva que pasare por todos estos puntos será la elipse que se pide. 56.

Porque si llamamos CA, t; CB ó CD, c; CP, x; y PM, y; tendremos en virtud de los triángulos semejantes CAB, CPE, la proporcion $CA : CB :: CP : CE$ ó

 t:

Fig. $t : c :: x : CE = \frac{cx}{t}$. Y por razon del triángulo CED rectángulo en E, $(ED)^2$ ó $(PM)^2 = (CD)^2 - (CE)^2$, esto es, $yy = cc - \frac{ccxx}{tt}$. Luego PM será (93 y 112) una ordenada al diámetro Aa. Y como podríamos demonstrar lo mismo respecto de todas las lineas PM, por haber siempre una misma razon entre cada CP y su correspondiente CE, que entre CA y CB; se sigue que la curva que pasare por todos los puntos M hallados segun se ha dicho, será la elipse que se pide.

De la Hypérbola.

57\. 129 Si en un punto f de un plano aseguramos el un estremo de una regla larga fMO, de forma que pueda moverse con libertad al rededor del mismo punto fijo f; y en el otro estremo O de dicha regla afianzamos el cabo de un hilo OMF que sea menos largo que la regla, y que esté atado por el otro cabo á otro punto F del mismo plano; si hacemos dar la buelta al rededor del punto f á la regla fMO, manteniendo al mismo tiempo con el lapiz M siempre muy tirante el hilo OMF, y su parte MO tan arrimada á la regla como si la estuviera pegada, resultará de este movimiento una curva AX, que será una porcion de *Hypérbola.*

Si se pasa la regla al otro lado del punto F, se trazará del mismo modo la otra porcion AZ de la misma hypérbola.

Pero si atamos en F el estremo de la misma regla,

y en *f* el estremo del mismo hilo, trazarémos del mismo modo otra curva *xaz* opuesta á la primera, y que tambien se llama *Hypérbola*. Las dos curvas juntas se llaman *Hypérbolas opuestas*. Fig.

130 Los dos puntos fijos *F* y *f* se llaman los *Focus*.

131 El *primer Ege* es una linea *Aa* que pasa por los dos focus *F* y *f*, y remata por ambos lados en las Hypérbolas opuestas.

132 El *Centro* es un punto *C* que divide por el medio el primer ege *Aa*.

133 Si por el centro *C* se le tira una perpendicular indefinita *Bb* al primer ege *Aa*, y desde *A* como centro trazamos con el intervalo *CF* un arco de círculo que la corte en los dos puntos *B* y *b*; la parte *Bb* de dicha perpendicular se llamará *el segundo Ege*.

134 Los dos eges *Aa*, *Bb* juntos se llaman *Conjugados*; por manera que el primer ege *Aa* se llama *conjugado* al segundo *Bb*; y recíprocamente el segundo *Bb* es *conjugado* al primero *Aa*.

135 Las lineas *MP*, *MK*, tiradas desde los puntos *M* de las hypérbolas opuestas paralelamente al uno de los eges conjugados, y que van á rematar en el otro, se llaman *Ordenadas* á este último ege. Así, *MP* es una ordenada al primer ege *Aa*, y *MK* lo es al segundo *Bb*.

136 Una linea tercera proporcional á los dos eges, se llama el *Parámetro* del que ocupa el primer lugar en la proporcion. Así, si hacemos que el primer ege *Aa* sea al se-

Fig. segundo *Bb* como este segundo *Bb* á unā tercera proporcional *p*; esta tercera *p* será el *parámetro* del primer ege *Aa.*

137 Llamamos *Diámetros* todas las lineas que pasan por el centro *C*; los que encuentran las hypérbolas opuestas se llaman *primeros Diámetros*, los que no las encuentran aunque se prolonguen al infinito, se llaman *segundos Diámetros.*

138 Una recta que no encuentra una hypérbola mas que en un punto, y que continuada por ambos lados no se mete adentro, antes sí cae de la parte de afuera, se llama *Tangente* en dicho punto.

58. 139 El hilo *FMO* ha de ser por precision mas largo ó menos largo que la regla *fMO* (129); porque si cogiera de largo lo propio que la regla, el lapiz *M* trazaria en su movimiento una linea cuyos puntos *M* estarian todos á igual distancia de *F* que de *f*; pues si del hilo y de la regla restáramos la parte comun *MO*, los residuos *MF*, *Mf* serían siempre iguales el uno al otro. De lo que resulta que el lapiz *M* trazaría una linea recta indefinita *Bb*, perpendicular á la recta *Ff* que pasaría por su punto del medio *C.*

57. 140 De lo dicho (129) se sigue 1.° que si desde un punto qualquiera *M* de la una de las hypérbolas opuestas tiramos á los dos focus *F*, *f* las rectas *MF*, *Mf*, su diferencia siempre será una misma. Porque será igual á la diferencia que vá de la longitud de la regla á la del hilo. Las dos lineas *MF*, *Mf* se llaman *Radios vectores.*

141 2.° Quando el punto *M* cae en *A*, es patente que

MF,

MF se confunde con *AF*, y *Mf* con *Af*; y quando el Fig.
punto *M* cae en *a*, al tiempo de trazar la hypérbola opuesta *xaz*, es tambien patente que *MF* se confunde con *aF*, y *Mf* con *af*. Luego ya que la diferencia de dichas dos rectas es siempre una misma, será *Af* — *AF* ó *Ff* — 2*AF* = *aF* — *af* ó *Ff* — 2*af*; y por lo mismo *AF* = *af*. De donde resulta

1°. Que el centro *C* divide por el medio la distancia que hay desde el un focus al otro; porque *CA* + *AF* ó *CF* = *Ca* + *af* ó *Cf*.

2°. Que la diferencia que hay entre las dos rectas *MF*, *Mf* es siempre igual al primer ege *Aa*; porque en la hypérbola *XAZ*, siempre se verifica que *Mf* — *MF* = *Af* — *AF* ó *Af* — *af*; y en su opuesta *xaz*, se verifica igualmente que *MF* — *Mf* = *aF* — *af* ó *aF* — *AF*.

142 3°. De lo dicho (133) inferiremos 57.

1°. Que el centro *C* divide en dos partes iguales el segundo ege *Bb*; porque los triángulos rectángulos *ACB*, *ACb*, serán iguales, pues tienen iguales sus hypotenusas *AB*, *Ab*, y el lado *AC* es comun á los dos.

2°. Que si tomamos en el segundo ege *Bb*, la parte *CE* igual á la mitad *CA* del primero, y tiramos la hypotenusa *AE*; el segundo ege *Bb* será mayor, igual ó menor que el primero *Aa*, segun fuere la recta *CF* mayor, igual ó menor que la hypotenusa *AE*; porque la hypotenusa *Ab*, tomada igual á *CF*, será tambien entónces mayor, igual ó menor que la hypotenusa *AE*.

Fig. 3.° Que si al uno y otro lado del centro C tomamos en el primer ege Aa, las partes CF, Cf iguales cada una á la hypotenusa AB del triángulo rectángulo CAB, que forman los dos semieges CA, CB; los puntos F, f serán los dos focus.

57. 143 4.° Quedándose todo conforme hemos supuesto, si llamamos CF ó AB, m; Ca ó CA, t; el triángulo rectángulo ACB dará $(BC)^2 = mm - tt$. Pero $AF = m - t$, y $Fa = m + t$; luego $AF \times Fa = mm - tt$. De donde se infiere que el quadrado de la mitad CB del segundo ege Bb, es igual al rectángulo de AF por Fa, que son las dos partes del primer ege Aa que están respectivamente entre el focus F y sus dos estremos A, a.

144 5°. Ya podríamos trazar las hypérbolas opuestas si fuesen dados los dos eges Aa, Bb, y supiéramos que el ege Aa ha de ser el primero. Porque empezaríamos determinando (142) en el primer ege Aa los dos focus F, f, despues afianzaríamos en el punto F el un cabo de un hilo FMO, estando el otro cabo O afianzado en el estremo de una regla OMf, mobil en su otro estremo f al rededor del focus f, y que coja de largo lo mismo que el hilo OMF, mas ó menos (139) la linea Aa. Si trazáramos por medio de esta regla y del hilo dos hypérbolas opuestas XAZ, xaz conforme enseñamos (129), es evidente que sería su primer ege la linea Aa, y la Bb sería el segundo.

Quanto mas larga fuese la regla OMf, tanto mayores sal-

saldrán las porciones de las hypérbolas opuestas; de forma Fig.
que está en nuestra mano trazarlas tan grandes como quisiésemos, valiéndonos de una regla, y de un hilo ambos mas largos.

145 *Si despues de tirada una ordenada* MP *al primer* 57.
ege Aa, *tomamos en su prolongacion la parte* AD $=$ MF, *del lado del focus* F *quando el punto* M *está en la hypérbola* XAZ, *y del lado del focus* f *quando está en su opuesta* xaz; *será* CA : CF :: CP : CD.

Llamemos como antes CA ó Ca, t; CF ó Cf, m; CP, x; PM, y; y CD, z: en el primer caso tendremos AD ó $MF = z - t$, aD ó $Mf = z + t$, $FP = x - m$ ó $m - x$ (conforme esté el punto P mas abajo ó mas arriba que el focus F) $Pf = x + m$; y en el segundo supuesto, AD ó $MF = z + t$, aD ó $Mf = z - t$, $FP = x + m$, $Pf = x - m$ ó $m - x$, segun estuviere el punto P mas arriba ó mas abajo del focus f.

Sentado esto, el triángulo rectángulo MPF dará $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$; conviene á saber, $-$ en el primer caso, y $+$ en el segundo; y el otro triángulo rectángulo MPf dará $zz \pm 2tz + tt = yy + xx \pm 2mx + mm$, esto es, $+$ en el primer caso, y $-$ en el segundo.

Si restamos ordenadamente en el primer supuesto, la primera equacion de la segunda, y la segunda de la primera, en el segundo supuesto, resultará $4tz = 4mx$; de donde sacarémos $CD = z = \frac{mx}{t}$. Luego $CA : CF :: CP : CD$, pues $t : m :: x : z$.

Fig. 146 Es patente que si llamamos CA ó Ca, t; CF ó Cf, m; y CP, x, siempre $MF = \frac{mx}{t} - t$, y $Mf = \frac{mx}{t} + t$, quando el punto M está en la hypérbola XAZ cuyo focus es F; y al contrario saldrá $MF = \frac{mx}{t} + t$, y $Mf = \frac{mx}{t} - t$, quando M estuviere en su opuesta xaz, cuyo focus es f.

147 *El quadrado de una ordenada qualquiera* PM *al*
57. *primer ege* Aa, *es al rectángulo de las partes* AP *y* Pa *de dicho ege prolongado, como el quadrado de su conjugado* Bb, *es al quadrado del primer ege* Aa: *quiero decir, que* $(PM)^2 : AP \times Pa :: (Bb)^2 : (Aa)^2$.

Caminando en los mismos supuestos de antes (145) si en la equacion $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$, que inferimos (145) del triángulo rectángulo MPF, substituimos en lugar de z su valor $\frac{mx}{t}$, siempre sacaremos estotra $ttyy = mmxx - mmtt - ttxx + t^4$, que reducida á proporcion dá $yy : xx - tt :: mm - tt : tt$, ó $(PM)^2 : AP \times Pa :: (BC)^2 : (CA)^2 :: (Bb)^2 : (Aa)^2$.

De aquí podemos sacar varias consecuencias muy fundamentales.

148 1.° Si al segundo ege Bb que llamaremos $2c$ le tiramos una ordenada MK, es evidente que $MK = CP = x$, y que $CK = PM = y$. Pero $(PM)^2 : AP \times Pa :: (Bb)^2 : (Aa)^2$, ó $yy : xx - tt :: 4cc : 4tt$; por consiguiente $4ccxx = 4cctt + 4ttyy$; de donde resulta la proporcion $xx : yy + cc :: 4tt : 4cc$, esto es $(MK)^2 : (CK)^2 + (CB)^2 :: (Aa)^2 : (Bb)^2$.

Quie-

Quiero decir que el quadrado de una ordenada qualquiera MK al segundo ege Bb, es al quadrado de CK mas el quadrado de CB mitad del segundo ege Bb, como el quadrado de su conjugado Aa, es al quadrado del segundo ege Bb. Fig.

149 2.° Si al primero ú segundo ege Aa le llamamos $2t$; á su conjugado Bb, $2c$; á su parámento p; á cada una de sus ordenadas PM, y; y á cada abscisa CP, x: siempre sacaremos (147 y 148) $(PM)^2 : (CP)^2 \mp (CA)^2 :: (Bb)^2 : (Aa)^2 :: p : Aa$, ó $yy : xx \mp tt :: 4cc : 4tt :: p : 2t$, por ser (136) $Aa : Bb :: Bb : p$, ó $2t : 2c :: 2c : p = \frac{4cc}{2t}$; servirá el signo — quando el ege Aa fuere el primero, en cuyo caso podremos substituir en lugar de $(CP)^2 - (CA)^2$ el rectángulo $AP \times Pa$, que es su igual; y al contrario servirá el signo + quando Aa fuere el segundo ege. Multiplicando los estremos y los medios de la pri mera proporcion $yy : xx \mp tt :: 4cc : 4tt$, y despues los de la segunda $yy : xx \mp tt :: p : 2t$, sacaremos $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, é $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2} pt$. Y como esta propiedad se verifica igualmente en todos los puntos de las hypérbolas opuestas, y determina su posicion respecto de los eges; se sigue que la equacion $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, ó $yy = \frac{pxx}{2t} \mp \frac{1}{2} pt$ espresa perfectamente la naturaleza de esta curva comparada con sus eges. 59. 60.

Si contáramos las abscisas x desde el vértice A, sería $AP \times Pa = 2tx + xx$, y sacaríamos $yy = \frac{cc}{tt}(2tx + xx)$ que tambien espresaria la naturaleza de la hypérbola.

En

Fig. En virtud de este último supuesto sacarémos $yy : 2tx + xx :: p : 2t$, que dá $yy = px + \frac{pxx}{2t}$, que tambien representa la hypérbola.

150 3.° Si tiramos dos ordenadas qualesquiera MP,
59. NQ al ege Aa, es evidente que $(MP)^2 : (NQ)^2 :: (CP)^2 \mp$
60. $(CA)^2 : (CQ)^2 \mp (CA)^2$. Porque $(PM)^2 : (CP)^2 \mp (CA)^2 :: (Bb)^2 : (Aa)^2 :: (QN)^2 : (CQ)^2 \mp (CA)^2$: Luego &c.

Tambien es de notar, que en lugar de $(CP)^2 - (CA)^2$ y de $(CQ)^2 - (CA)^2$ podemos substituir los rectángulos $AP \times Pa$, $AQ \times Qa$, que son sus iguales.

151 4.° Si por un punto qualquiera P del uno de los dos eges Aa, prolongándole si fuere el primero, tiramos una paralela MPM á su conjugado Bb; encontrará una hypérbola ó las hypérbolas opuestas en dos puntos M, M igualmente distantes por ambos lados del punto P, y no las encontrará en mas puntos. Porque para que los puntos M, M pertenezcan á una hypérbola; ó á las hypérbolas opuestas, es forzoso (149) que cada uno de los quadrados de PM, que están á cada lado del ege Aa, sea igual á una misma cantidad $\frac{ccxx}{tt} \mp cc$.

152 5.° Una vez que $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$, quanto mayor fuere $CP = x$ contada desde el centro C, tanto mayor será tambien cada ordenada $PM = y$, contándola desde el ege Aa al uno y otro lado, y crecerá al infinito; y al contrario, quanto menor fuere CP ó x, tanto menor será tam-
59. bien PM ó y; por manera que si fuese $CP = x$ igual á CA ó $Ca = t$, quando el ege Aa es el primero, PM ó y

se-

será entónces nula ó cero; y quando fuere $CP = x$ nula ó Fig.
cero, siendo Aa el segundo ege, cada PM que se reduce entonces á CB ó $Cb = c$, será la menor de todas las ordenadas PM que están al uno y otro lado del centro. De donde resulta claramente 60.

1.° Que si por los estremos B, b del primer ege Bb se tiran paralelas al segundo ege Aa, serán tangentes en dichos puntos. 60.

2.° Que las hypérbolas opuestas se ván desviando mas y mas al infinito de sus eges conjugados, empezando desde los estremos del primero; hay sin embargo entre estos eges la diferencia de que el primero encuentra cada una de las hypérbolas opuestas en un punto, y prolongado pasa por dentro de ellas, en lugar de que todo el segundo ege está entre las hypérbolas opuestas, y aunque se le prolongue al infinito, jamas las llega á encontrar.

153 6.° Tambien se sigue de ser $yy = \frac{ccxx}{tt} \mp cc$ que 59.
si tomamos los puntos P, P á iguales distancias por ambos 60.
lados del centro C, serán iguales las ordenadas PM, PM. De donde resulta, que toda linea MM que remata en una hypérbola ó en las hypérbolas opuestas, y está dividida en dos partes iguales por un ege Bb en un punto K que no sea el centro, será paralela á su conjugado Aa. Porque si tiramos las paralelas MP, MP al ege Bb, la linea PP estará dividida por el medio en C, una vez que MM lo está en K; y por consiguiente serán iguales las ordenadas PM, PM. Luego la MM será paralela al ege Aa.

Si

Fig. 154 Si imaginamos que el plano en que están trazadas las dos hypérbolas opuestas, esté doblado á lo largo del
60. ege *Aa*, de forma que lleguen á juntarse sus dos partes; es evidente que quando *Aa* fuere el segundo, las dos hypérbolas opuestas coincidirán exactamente una con otra; esto es, los puntos *B*, *M* &c. coincidirán con los *b*, *M* &c. una vez que (151) todas las perpendiculares *Bb*, *MM* &c. á dicho ege están divididas en dos partes iguales en *C*, *P* &c.

59. Por la misma razon quando el ege *Aa* fuere el primero, coincidirán exactamente una con otra las porciones de las hypérbolas opuestas, que están al uno y otro lado de dicho ege.

61. 155 Si por el centro *C* se tiran dos rectas indefinitas *CG*, *Cg* paralelas á las lineas *Ab*, *AB* tiradas desde el estremo *A* del primer ege *Aa* á los dos estremos *B*, *b* del segundo, dichas dos rectas se llaman las *Asýmtotas* de la hypérbola *MAM*; y si estas mismas se prolongan indefinitamente al otro lado del centro, se llamarán las asýmtotas de la hypérbola opuesta *MaM*.

156 El quadrado de la parte *CG* ó *Cg* de una asýmtota comprehendida entre el centro *C*, y el concurso de la *AB* ó *Ab* tirada por el estremo *A* del primer ege al estremo *B* ó *b* del segundo, se llama la *Potencia* de la hypérbola *MAM* ó de su opuesta *MaM*.

157 Es patente 1.º que el ángulo *GCg* que forman las asýmtotas, ó su igual *BAb*, será menor, igual ó mayor que un ángulo recto, segun fuere el segundo ege *Bb*

me-

menor, igual ó mayor que el primer ege *Aa.* Porque quando el primer ege *Aa* es mayor que el segundo *Bb*, su mitad *CA* es mayor que la mitad *CB* del segundo; y por consiguiente el ángulo *CAB* del triángulo rectángulo *CAB* será menor que un ángulo semirecto. Luego los dos ángulos iguales *CAB*, *CAb* que forman juntos el ángulo *BAb*, valdrán menos que un ángulo recto. Los otros dos casos se prueban del mismo modo. Fig.

158 2.° De la semejanza de los triángulos *BAb*, *BGC* resulta que la asýmtota *CG* parte por el medio en *G* la linea *AB*, y que *CG* es la mitad de *AB*, por ser *BC* la mitad de *Bb.* Del mismo modo probaremos que la asýmtota *Cg* divide por el medio en *g* la linea *Ab*, y que *Cg* es la mitad de *Ab.* Luego todas las lineas *CG*, *GA*, *GB*, *Cg*, *gA*, *gb* son iguales unas con otras; pues cada una de ellas es igual á la mitad de una ú otra de las lineas *AB*, *Ab*, que son iguales (133).

159 3.° *La potencia de una hypérbola es igual á la quarta parte de la suma de los quadrados de los dos semieges.* Porque si llamamos *CA*, t; *CB*, c; *CG*, m, tendremos (158) $BA = 2m$, y el triángulo rectángulo *ACB* dará $(AB)^2 = 4mm = tt + cc$. Luego $(CG)^2 = mm = \frac{tt+cc}{4}$.

160 *Si por un punto qualquiera* M *de la una ó de la otra de las dos hypérbolas opuestas tiramos la recta* Rr *perpendicular al primer ege* Aa, *encontrándole en* P, *y que remate en los puntos* R *y* r *de las asýmtotas; será el produc-* 61.

to

Fig. *to* $RM \times Mr = (BC)^2 =$ *al quadrado de la mitad del segundo ege* Bb.

Llamaremos CA, t; CB, c; CP, x; PM, y; y de los triángulos semejantes ACB, CPr, y ACb, CPR inferiremos $CA : CB$ ó $Cb :: CP : Pr$ ó PR, esto es $t : c :: x : PR$ ó $Pr = \frac{cx}{t}$. Luego $RM = PR \pm PM = \frac{cx}{t} \pm y$; y Mr ó Pr $\mp PM = \frac{cx}{t} \mp y$. Por consiguiente $RM \times Mr = \frac{ccxx}{tt} - yy$ $= cc = (BC)^2$ ó Pr, con substituir en lugar de yy su valor (149) $\frac{ccxx}{tt} - cc$.

161 De donde se sigue 1.° que $(PM)^2 = \frac{ccxx}{tt} - cc$ es siempre menor que $(PR)^2$ ó $(Pr)^2 = \frac{ccxx}{tt}$, y que por lo mismo todos los puntos de las hypérbolas opuestas están dentro de los ángulos que forman sus asýmtotas; por manera que ninguno de ellos puede estar dentro de los ángulos que estan al lado de aquellos.

162 2.° Si por dos puntos qualesquiera M, N de una hypérbola, ó de las hypérbolas opuestas, tiramos dos lineas rectas Rr, Kk perpendiculares al primer ege, y que rematen en las asýmtotas; es evidente que $RM \times Mr = KN \times Nk$, porque cada uno de estos productos será siempre $= (BC)^2$. Luego $RM : KN :: Nk : Mr$.

61. 163 *Si por dos puntos qualesquiera* M, N *de una hypérbola ó de las hypérbolas opuestas, tiramos dos rectas* Hh, Ll *paralelas la una á la otra, y que rematen en las asýmtotas; tendremos* $HM \times Mh = LN \times Nl$.

Porque si tiramos las rectas Rr, Kk perpendiculares al primer ege Aa, los triángulos MRH, NKL, y Mrb, Nkl

Nkl serán semejantes, por ser paralelos sus lados ca la uno al suyo. Tendremos, pues, $RM : KN :: HM : LN$; y $Nk : Mr :: Nl : Mb$. Pero (162) $RM : KN :: Nk : Mr$; luego $HM : LN :: Nl : Mb$, y por consiguiente $HM \times Mb = LN \times Nl$. Fig.

164 Luego 1.° si suponemos que la linea *NL* paralela á *MH* pase por el centro *C*, ó se confunda con *CE*; es constante que los dos puntos *L*, *l* coincidirán con el centro *C*, en cuyo caso será $LN \times Nl = (EC)^2$. De donde se sigue que si desde un punto qualquiera *E* de la una de las hypérbolas opuestas se tira al centro *C* la recta *CE*, y por otro punto qualquiera *M* de la una ó de la otra de dichas hypérbolas, una linea *MHb* paralela á *CE*, que encuentre las asýmtotas en *H* y *b*, será $(CE)^2 = HM \times Mb$. 61.

165 2.° Si por un punto qualquiera *N* de la una de las hypérbolaa opuestas, tiramos una recta *Ll*, que remate en las asýmtotas, y que encuentre á qualquiera de las dos hypérbolas en otro punto *n*; las partes *LN*, *ln* de dicha recta que estuvieren entre los puntos de las hypérbolas, y las asýmtotas, serán iguales una con otra. Porque si llamamos LN, a; Nn, b; nl, c, será $LN \times Nl = ab \mp ac = HM \times Mb = Ln \times nl = bc \mp ac$: luego $a = c$ ó $LN = ln$.

166 3.° Si en la última consecuencia suponemos que la linea *Nn* que remata en las hypérbolas opuestas pase por el centro *C*, ó, lo que es lo mismo, llegue á ser el primer diámetro *ED*; los dos puntos *L*, *l* coincidirán con el centro *C*, y será $NL = EC$, y $nl = CD$. De donde inferiremos

que

Fig. que el centro C está en medio de todo primer diámetro DE.

167 4.° Quando dos rectas Mm, Nn paralelas remataren en una hypérbola, ó en las hypérbolas opuestas, y encontraren una asýmtota en los puntos H, L; será $MH \times Hm = NL \times Ln$. Porque si prolongáramos, supuesto que fuera preciso, dichas dos lineas, hasta que encontráran á la otra asýmtota en los puntos h, l, las partes MH, mh, y NL, nl serían (165) iguales unas con otras; y por consiguiente ya que $HM \times Mh = LN \times Nl$, sería tambien $MH \times Hm = NL \times Ln$.

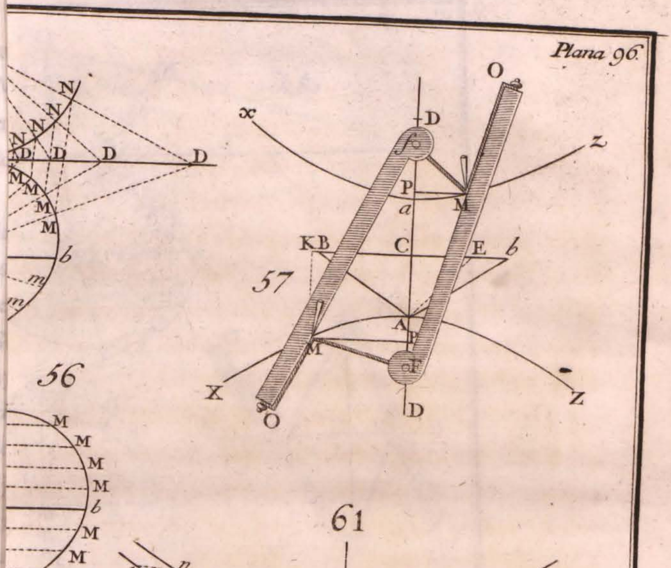
62. 168 *Si por dos puntos qualesquiera* M, N *de una hypérbola ó de las hypérbolas opuestas, tiramos dos rectas paralelas* MH, NL *que rematen en una asýmtota; y otras dos rectas tambien paralelas* Mh, Nl, *y que rematen en la otra asýmtota; será* HM × Mh = NL × Nl.

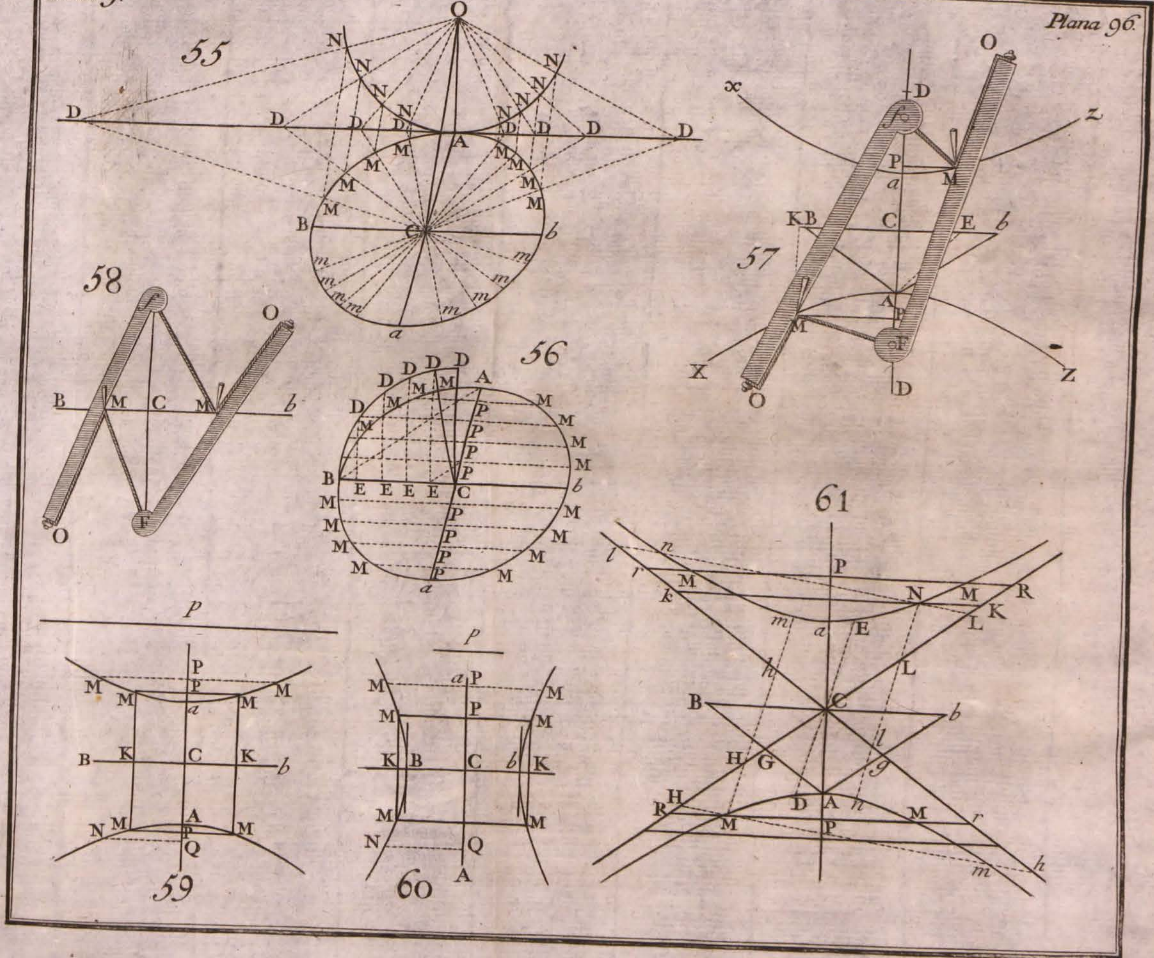
Pruebase del mismo modo que la proposicion que sentamos antes (163).

63. 169 Por consiguiente 1.° Si las rectas MH, Mh, y NL, Nl fuesen paralelas á las asýmtotas; los paralelógramos $MHCh$, $NLCl$, y los triángulos CHM, CLN que son sus mitades, serán iguales; por ser recíprocamente proporcionales los lados de dichos paralelógramos que forman los ángulos iguales HMh, LNl.

170 2.° Suponiendo lo mismo que en la última consecuencia, inferiremos que $CH \times HM = CL \times LN$; porque en este supuesto $Mh = CH$, y $Nl = CL$. Esto significa que si por dos puntos qualesquiera M, N de la

una


56
57
61


55
56
57
58
59
60
61

una, ó de las hypérbolas opuestas, se tiran dos rectas MH, Fig.
NL paralelas á la una de las asýmtotas, y que rematen en la otra; siempre será $CH \times HM = CL \times NL$, y por consiguiente $CH : CL :: LN : MH$.

171 3.° Por ser el estremo A del primer ege uno 63.
de los puntos de la hypérbola, y por ser paralela á la asýmtota Cg la linea AB que corta en G la asýmtota CG; se sigue (170) que siempre será $CH \times HM = CG \times GA =$ (158) $(CG)^2$, esto es (156), á la potencia de la hypérbola. Por consiguiente si llamamos CG, m; CH, x; HM, y; siempre será $xy = mm$. Y como esta equacion se verifica en todos los puntos de las hypérbolas opuestas, y fija su posicion respecto de sus asýmtotas; resulta que $xy = mm$ espresa la naturaleza de la hypérbola comparada con sus asýmtotas.

172 4.° De ser $MH = y = \frac{mm}{x}$ resulta, que quanto mas crece $CH = x$, tanto mas mengua la $HM = y$; por manera que si fuese x infinitamente grande, sería y infinitamente pequeña, esto es nula ó cero. Es, pues, evidente que la hypérbola AM y su asýmtota CH, prolongándolas, se ván arrimando mas y mas, de suerte que al fin su distancia llega á ser menor que qualquiera cantidad asignable; y que no obstante nunca pueden llegar á tocarse, porque solo se juntarian en el infinito, al qual no es posible que lleguen. Lo propio diremos de la otra asýmtota Cg.

173 5.° De quantas lineas pasan por el centro C,

Fig. 1°. las que están como *Aa* dentro de los ángulos que forman las asýmtotas del lado de las hypérbolas, encuentran á cada una de las hypérbolas opuestas en un punto *A* ó *a*, no mas; y prolongadas, pasan por dentro de dichas hypérbolas. Porque por razon de los ángulos *GCA*, *gCA* y de sus opuestos al vértice, es evidente que la linea *Aa* se vá desviando mas y mas de ambas asýmtotas, en lugar de que las hypérbolas opuestas siempre se las ván arrimando (172) mas y mas. 2.° Las que están como *Bb* en los ángulos del lado que forman tambien las asýmtotas, jamás pueden llegar á encontrar las hypérbolas opuestas aunque se las prolongue al infinito, porque no puede haber dentro de estos ángulos ningun punto de las hypérbolas (161).

De donde se sigue (137) que todos los primeros diámetros caen dentro de los ángulos que forman las asýmtotas á la parte de las hypérbolas, y que los segundos caen en los ángulos de al lado.

174 6.° Si por un punto qualquiera *H* de la una
64. de las asýmtotas *CE*, se tira una paralela *MH* á la otra *Ce*; no encontrará la hypérbola mas que en un solo punto *M*; y si se la prolonga, pasará por dentro. Porque se mantienen todos sus puntos á la misma distancia de *Ce*, siendo así que la hypérbola se la vá arrimando (172) mas y mas.

175 7.° De aquí resulta que si por un punto qualquiera *M* de una hypérbola, se tiran dos rectas indefinitas *MH*, *Mb* paralelas á sus asýmtotas *Ce*, *CE*;

To-

1.° Todos los puntos de la hypérbola su opuesta Fig.
caerán dentro del ángulo *HMb*; por caer todos ellos (161) dentro del ángulo que forman las asýmtotas, el qual está dentro del ángulo *HMb*.

2.° Las dos porciones de la hypérbola estarán en los dos ángulos que están al lado de dicho ángulo; y por consiguiente ninguno de sus puntos estará dentro del ángulo opuesto al vértice al ángulo *HMb*.

3.° Todas las lineas que como *MF* están dentro del ángulo *HMb*, encuentran, prolongadas ácia *F*, la hypérbola opuesta en un punto *N*, y pasan por dentro; porque se van desviando mas y mas de las rectas *MH*, *Mb*, y por consiguiente de sus dos asýmtotas que son paralelas á dichas lineas; pero si se las prolonga ácia el otro lado del punto *M*, entran adentro de la hypérbola que pasa por dicho punto, y no la buelven á encontrar mas.

4.° Todas las lineas que como *Ee* están dentro de los ángulos colaterales al ángulo *HMb*, encuentran las dos asýmtotas de la hypérbola que pasa por el punto *M*; por consiguiente quando pasan por dentro de una de sus porciones, la han de encontrar indispensablemente en algun punto *N*, pues van á encontrarse con la asýmtota que cae á la parte de afuera de dicha porcion.

176 8.° Si por un punto qualquiera *M* de una hy- 64.
pérbola, se tira una recta *Ff* que encuentre una de sus asýmtotas en *F*, y una de las asýmtotas de la hypérbola opuesta en *f*, y se la prolonga ácia *N*, de forma que *fN*

Fig. sea igual á FM; el punto N será uno de los de la hypérbola opuesta. Porque la linea Ff cae dentro del ángulo HMb, y encuentra por consiguiente la hypérbola opuesta en algun punto N, segun acabamos de demostrar (175). Luego (165) &c.

2.° Si por un punto qualquiera M de una hypérbola, se tira una recta Ee que remate en sus asýmtotas, y en dicha linea se toma la parte $eN = EM$; el punto N será tambien uno de los de dicha hypérbola. Porque si tiramos MH paralela á la asýmtota Ce, que remate en la otra en H, tomamos en esta segunda asýmtota la parte CL igual á HE, y tiramos LN paralela á HM; en virtud de lo demostrado (174) encontrará la hypérbola en un punto N, y por lo dicho (170) será tal el punto N que CL ó $HE : HM :: CH$ ó $EL : LN$; por lo que se echa de ver que la LN encuentra la hypérbola en el mismo punto donde encuentra la recta Ee. Pero por razon de las paralelas HM, LN, será $eN = EM$, por ser $CL = HE$. Luego &c.

64. 177 Propongámonos resolver la siguiente cuestion: *Dadas las asýmtotas* CE, Ce *de una hypérbola, tirar desde un punto* M *dado en dicha hypérbola la tangente* DMd, *y demostrar que no se la puede tirar mas que una.*

Despues de tirada desde el punto dado M una paralela MH á la una de las asýmtotas Ce, que remate en el punto H de la otra asýmtota CE, tomaremos, en esta la parte $HD = HC$. Si por el punto dado M tira-

râmos la recta *DM* que encuentre la asýmtota *Ce* en un Fig.
punto *d*; 1°. la linea *DMd* encontrará la hypérbola en *M*.

Porque por razon de los triángulos semejantes *CDd*, *HDM*, el punto *M* divide por el medio la recta *Dd* que remata en las asýmtotas, así como el punto *H* está en medio de la *CD*. Pero si fuera posible que encontrase la hypérbola en otro punto *O*, sería (165) $Od = MD$, y por consiguiente $= Md$, esto es, la parte sería igual al todo; pero como esto es imposible, tambien lo es que la línea *DMd* encuentre la hypérbola mas que en un punto *M*. Ademas de esto, si pasára como *Ee* por dentro, es evidente que encontraría en algun punto *N* la porcion de la hypérbola por dentro de la qual pasára, pues iría á encontrar en un punto *e* la asýmtota *Ce*, que cae (161) á la parte de afuera de dicha porcion. Luego es evidente que la recta *Dd* no encuentra la hypérbola mas que en un punto *M*, y que no se mete adentro, esto es, que es tangente en dicho punto.

2.° No hay mas línea que la *DMd* que pueda tocar la hypérbola en un punto *M*; porque si tomamos en la asýmtota *CE* la parte *HE* mayor ó menor que *HD*, y por el punto dado *M* tiramos la recta *EM* que encuentre en *e* la otra asýmtota *Ce*, es evidente que, por razon de las paralelas *MH*, *Ce*, será *ME* mayor ó menor que *Me*, pues se ha tomado *HE* mayor ó menor que *HD* ó que *HC*. Sentado esto, si tomamos en la parte mayor *Me* el punto *N*, tal que *Ne* sea igual á *ME*, es

Fig. evidente que dicho punto (176) será tambien uno de los de la hypérbola, y así la recta *Ee* no la tocará en *M*.

64. 178 Hemos demostrado (172) que quanto mas crece *CH*, tanto mas mengua *HM*; de forma que quando *CH* es infinitamente grande, *HM* es infinitamente pequeña, esto es, nula ó cero. Pero quando *CH* es infinitamente grande, *HD* que es su igual, lo ha de ser tambien; y por consiguiente las lineas *MD*, *HD*, que por no encontrarse sino en el infinito se pueden considerar como paralelas (I. 326), han de coincidir una con otra; pues en este caso se confundirá el punto *M* con el punto *H*; quiero decir que si se prolongan al infinito la asýmtota *CE* y la hypérbola, podremos considerar la asýmtota como una linea que toca la hypérbola en su estremo. Lo mismo decimos de la otra asýmtota *Ce*, que se puede considerar como tangente de la hypérbola en el otro estremo.

De aquí resulta que podemos considerar las dos asýmtotas como si fueran unas tangentes infinitas que tocan las hypérbolas opuestas en sus estremos.

179 1.º Como no hay linea alguna sino *DMd* que yendo á rematar en las asýmtotas, esté dividida en dos partes iguales en el punto *M*; se sigue que si una recta *DMd* que remate en las asýmtotas de una hypérbola, la encuentra en un punto *M*, que la divida por el medio, dicha recta será tangente de la hypérbola en dicho punto. Y recíprocamente que está dividida en dos partes iguales

les en *M* una recta *DMd* que rematando en las asýmtotas de una hypérbola, la toca en dicho punto *M*. Fig.

180 2.° Si por el punto de contacto *M* de una tangente qualquiera *DMd*, que remata en las asýmtotas *CL*, *Cl* de una hypérbola, se tira un primer diámetro *MCm*; y por el punto *m* donde encuentra la hypérbola opuesta, se tira una paralela *Ee* á la tangente *Dd*, que remata en las asýmtotas en *E* y *e*; dicha linea será tangente en *m*. Porque por ser (166) *CM* igual á *Cm*, serán iguales y semejantes los triángulos *CMD*, *CmE*. Luego *mE* será igual á *MD*. Del mismo modo probaremos que siendo iguales y semejantes los triángulos *CMd*, *Cme*, será *me* igual á *Md*. Por esta razon el punto *m* divide por el medio la recta *Ee*, una vez que el punto *M* divide del mismo modo la *Dd*. Y por consiguiente (179) será tangente en *m*. 65.

En virtud de esto se echa de ver que son paralelas unas á otras las tangentes *Dd*, *Ee* que pasan por los estremos de un primer diámetro qualquiera *Mm*; y que son tambien iguales quando ván á rematar en las asýmtotas.

181 Llámanse *Diámetros conjugados*, dos diámetros *Mm*, *Ss* quando el uno de ellos *Ss* es paralelo á las tangentes que pasan por los estremos del otro diámetro *Mm*, y le terminan en *S*, *s* las rectas *MS*, *Ms* tiradas paralelamente á las asýmtotas desde el uno de los estremos *M* del diámetro *Mm*. 65.

182 Las lineas tiradas desde unos puntos de las hypérbolas opuestas paralelamente al uno de los diáme-

Fig. tros conjugados y que rematan en el otro, se llaman *Ordenadas* á este último. Así, *NO* es una ordenada al diámetro *Mm*.

183 Una linea tercera proporcional á dos diámetros conjugados, se llama el *Parámetro* del diámetro que ocupa el primer lugar en la proporcion. De todo esto se sigue

184 1.° Que tambien se verifica en los dos eges lo que hemos dicho (181), yá que (152) el segundo ege es paralelo á las tangentes que pasan por el estremo del primero, y tambien remata (155) en dos rectas tiradas paralelamente á las asýmtotas desde el uno de los estremos del primer ege. Se echa, pues, de ver que podemos considerar los dos eges como si fueran dos diámetros conjugados que forman uno con otro ángulos rectos.

65. 185 2.° Como el diámetro *SCs* es paralelo á la tangente *DMd*, que pasa por el un estremo *D* del diámetro *MCm*, y encuentra dicha tangente las dos asýmtotas *CD*, *Cd* de la hypérbola que pasa por el punto *M*; se sigue que está dentro de los ángulos que están al lado del ángulo *DCd*, que forman los asýmtotas de dicha hypérbola, y por lo mismo que es un segundo diámetro.

De donde podemos inferir, que de los dos diámetros conjugados *MCm*, *SCs*, hay siempre uno *Mm* que es primero, y otro *Ss* que es segundo.

186 3.° El centro *C* está en medio del segundo diámetro *SCs*, el qual es tambien igual á la tangente *DMd*, que pasa por el un estremo *M* del primer diámetro *Mm*, su con-

conjugado, y remata en las asýmtotas. Porque por causa de las paralelas MS, Cd y Ms, CD, será $CS = Md$, y $Cs = MD$. Pero la DMd está dividida (179) por el medio en el punto de contacto M. Luego &c. Fig.

187 4.° Dados dos diámetros conjugados Mm, Ss, 65.
y sabiendo qual de ellos es el primer diámetro, bastará para hallar las asýmtotas CD, Cd tirar por el centro C lineas paralelas á las dos rectas MS, Ms, tiradas desde el un estremo M del primer diámetro Mm, á los dos estremos S, s del segundo.

Y recíprocamente, dadas las dos asýmtotas CD, Cd de una hypérbola, y uno de sus puntos M; bastará, para hallar dos de sus diámetros conjugados MCm, SCs, tirar la MH paralela á la una de las asýmtotas Cd, que encuentre la otra asýmtota CD en H; y tirar, despues de prolongada ácia S, de modo que $HS = HM$, las rectas CM, CS. Porque si tiramos MD paralela á CS, de los triángulos semejantes CHS, MHD, se seguirá con evidencia que $HD = HC$, por ser $MH = HS$; y por consiguiente (177) será MD tangente en M; de donde hemos de inferir, que (181) las lineas CM, CS son dos semidiámetros conjugados.

Es, pues, patente que dados de posicion y magnitud dos diámetros conjugados Mm, Ss, y sabiendo qual de ellos es un primer diámetro; se pueden hallar las dos asýmtotas CD, Cd, y el punto M de la una de las hypérbolas opuestas.

Y recíprocamente, dadas las dos asýmtotas CD, Cd

de

Fig. de una hypérbola, y uno de sus puntos *M*; se hallarán dos de sus diámetros conjugados *Mm*, *Ss* de posicion y magnitud determinadas, y sabremos qual de ellos será un primer diámetro, y será el que pasare por el punto *M*.

65. 188 5.° Si fuese dado de posicion un segundo diámetro *SCs*, y quisiésemos determinar su magnitud, y hallar el primer diámetro *Mm* su conjugado; le tiraríamos donde quisiésemos dentro del ángulo que forman las asýmtotas, una paralela *Ll*, que rematára en los puntos *L* y *l* de las asýmtotas, y por su punto del medio *O* tiraríamos el primer diámetro *CO*, que encontraria la hypérbola en un punto *M*; y si por este punto tiráramos las rectas *MS*, *Ms* paralelas á las asýmtotas, es evidente por lo dicho (181) que los puntos *S*, *s* donde encontrarian el segundo diámetro *SCs* dado de posicion, determinarian su magnitud, y que el primer diámetro *MCm* sería su conjugado. Porque si por el punto *M* tiráramos la *Dd* paralela á *Ll*, que rematáre en las asýmtotas, estaría dividida por el medio en el punto *M*, por estár dividida *Ll* en dos partes iguales en el punto *O*; y por consiguiente (179) sería tangente en *M*.

De donde resulta, que dado de posicion un segundo diámetro *SCs*, está determinada de tal modo su magnitud, que no es mas que una, igualmente que la posicion y magnitud del primer diámetro *Mm* su conjugado.

189 6.° Dado de posicion y magnitud un segundo diámetro *SCs*, su parámetro, y la posicion de sus ordenadas; será facil hallar la posicion y magnitud del primer diáme-

metro *MCm*, su conjugado, con su parámetro. Porque si tiramos por el centro *C* una paralela indefinita á las ordenadas al diámetro *Ss*, señalarémos en dicha paralela dos puntos *M*, *m* que estén cada uno á igual distancia, y al uno y ótro lado respectivamente del centro *C*, de suerte que *Mm* sea igual á la media proporcional entre el segundo diámetro y su parámetro. Buscando despues una tercera proporcional á las dos lineas *Mm*, *Ss*, es evidente (182 y 183) que *Mm* será el primer diámetro conjugado al diámetro *Ss*, y que su parámetro será la espresada tercera proporcional. Fig.

190 *El quadrado de una ordenada qualquiera* NO *al primer diámetro* Mm, *es al rectángulo formado por las partes* MO, Om *de dicho diámetro prolongado; como el quadrado de su conjugado* Ss *es al quadrado del primer diámetro* Mm; *quiero decir que* $(ON)^2 : MO \times Om :: (Ss)^2 : (Mm)^2$. 65.

Tiremos por el un estremo *M* del primer diámetro *Mm*, una paralela *Dd* al segundo diámetro *Ss*, que remate en las asýmtotas; será dicha paralela (181) tangente en *M*, y estará (179) dividida por el medio en *M*. Por lo que, si prolongamos la ordenada *ON*, que por lo dicho (182) es paralela al diámetro *Ss*, al uno y otro lado del diámetro *Mm*, encontrará las asýmtotas en dos puntos *L*, *l* que estarán cada uno á la misma distancia del punto *O*. Sentado esto, llamemos *CM* ó *Cm*, t; *CS* ó *Cs*, ó (186) *MD* ó *Md*, c; *CO*, x; *ON*, y; los triángulos semejantes *CMD*, *COL* darán esta proporcion $CM : MD :: CO : OL$ ú Ol; esto es $t : c :: x : OL$ ú $Ol = \frac{cx}{t}$. Luego LN ó $LO \pm ON =$

$\frac{cx}{}$

Fig. $\frac{cx}{t} \pm y$, y Nl ó $Ol \mp NO = \frac{cx}{t} \mp y$; por consiguiente $LN \times Nl = \frac{ccxx}{tt} - yy = (160)\ DM \times Md = cc$. Luego $yy : xx - tt :: 4cc : 4tt$, ó $(ON)^2 : MO \times Om :: (Ss)^2 : (Mm)^2$; porque si multiplicamos los estremos y los medios de esta proporcion, sacaremos $4ttyy = 4ccxx - 4cctt$, esto es la misma equacion que antes $\frac{ccxx}{tt} - yy = cc$, despues de divididos ambos miembros por $4tt$, y hecha la transposicion correspondiente.

191 No hay duda alguna en que quanto hemos probado (147) acerca de los dos eges Aa, Bb, se aplica en virtud de la última proposicion á dos diámetros conjugados qualesquiera Mm, Ss. Y como lo dicho (148....153) se funda en lo probado (147), y es verdadero sea recto ó no el ángulo ACB; se infiere, que si en aquella proposicion, y las consecuencias que de ella inferimos suponemos que las lineas Aa, Bb en vez de ser los dos eges, sean dos diámetros conjugados qualesquiera, todo será verdadero en este último supuesto.

66. 192 *Si dos tangentes qualesquiera* DE, FG, *de una hypérbola* MA, *que rematan en las asýmtotas, se cortan en un punto* O; *los lados de los triángulos* CDE, CFG *al rededor del ángulo comun* C, *serán recíprocamente proporcionales.*

Si por los puntos de contacto M, A tiramos las paralelas MH, AL á la asýmtota CG; será cierto por causa de la semejanza de los triángulos CDE, HDM, que será CD dupla de CH, y CE dupla de HM; por ser DE (179) du-

dupla de DM. Y de la semejanza de los triángulos CFG, LFA, Fig.
resultará ser CF dupla de CL, y CG dupla de LA, por ser FG dupla de FA. Pero (170) $CH : CL :: LA : HM$: luego $2CH$ ó $CD : 2CL$ ó $CF :: 2LA$ ó $CG : 2HM$ ó CE.

193 Infiérese de esta proposicion, que la recta DG es paralela á la recta FE; de donde se sigue

1.° Que los triángulos CDE, CFG son iguales; porque los triángulos FDE, FGE son iguales, pues tienen una misma base FE, y están entre las mismas paralelas DG, FE; y si al uno y al otro le añadimos el mismo triángulo CEF, resultarán los dos triángulos CDE, CFG que serán iguales.

2.° Que la linea DE está dividida en los puntos M, O en la misma razon que la linea FG en los puntos A, O. Porque si por los puntos de contacto tiramos la recta MA, no hay duda en que será paralela á las dos rectas DG, FE, pues divide por el medio las rectas DE, FG, que están entre dichas paralelas.

194 *Si por un punto qualquiera* M *de una hypérbola,* 67.
tiramos una ordenada MP *á uno de sus primeros diámetros* 68.
Aa, *el que quisiésemos*, *y una tangente* MT *que le encuentre en* T; *será* CP : CA :: CA : CT; *previniendo que los puntos* P, T *están á un mismo lado respecto del centro* C, *quando la recta* Aa *es un primer diámetro*; *y al contrario están en distintos lados respecto del centro*, *quando es un segundo diámetro.*

1.° Quando la recta Aa fuere un primer diámetro. Se 67.
prolongará la tangente MT hasta que encuentre en D, E las

Fig. las asýmtotas CD, CG; y la ordenada PM, hasta que encuentre en N la asýmtota CD: se tirará despues por el punto A la AK paralela á DE, que encuentre la asýmtota CG en K, y la tangente FG que remate en las asýmtotas, y que será (182) paralela á PM, y encuentra la otra tangente DE en el punto O.

Sentado esto, AP está con AC, ó FN con FC en la razon compuesta de FN á FD, ó de OM á OD, ó (193) de OA á OG, ó de EK á EG, y de FD á FC, ó (193) de EG á EC. Pero AT está con TC, ó KE con EC en la razon compuesta de EK á EG, y de EG á EC. Luego $AP : AC :: AT : TC$, por ser unas mismas las razones componentes de estas dos razones; y por consiguiente $AP + AC$ ó $CP : CA :: AT + TC$ ó $CA : CT$.

2.° Quando la recta Aa fuere un segundo diámetro. Se tirará por el centro C la recta CK paralela á la ordenada PM, que encuentre la hypérbola en B, y la tangente MT en R, y por el punto de contacto M se tirará la MK paralela á Aa; no hay duda en que CB será el primer semidiámetro conjugado al segundo Aa, y por lo mismo MK será ordenada á dicho diámetro.

Sentado esto, si llamamos CA ó Ca, t; CB, c; CP ó MK, x; PM ó CK, y, tendremos en virtud de lo que acabamos de demostrar en el caso primero, $CR = \frac{cc}{y}$, y por consiguiente RK ó $CK - CR = \frac{yy - cc}{y}$. Pero los triángulos semejantes KRM, CRT dán $KR : RC :: MK : CT$, esto es $\frac{yy - cc}{y} : \frac{cc}{y} :: x : CT = \frac{ccx}{yy - cc} = \frac{tt}{x}$, substituyendo en lugar

gar de $yy - cc$ su valor $\frac{ccxx}{tt}$ sacado de la equacion $yy = \frac{ccxx}{t} + cc$ (148 y 141) : quiero decir , que $CP : CA :: CA : CT$. Fig.

195 *Si por un punto qualquiera* M *de una hypérbola cuyo centro es* C , *se tira una ordenada* MP *al uno ó al otro ege* Aa , *y una perpendicular* MG *á la tangente* MT *que pasa por* M ; *siempre se verificará que* CP *estará con* PG *en la razon dada del ege* Aa *á su parámetro.* 69. 70.

Porque si llamamos el semiege CA ó Ca, t ; CP , x; PM, y ; tendremos (194) $CT = \frac{tt}{x}$; y por consiguiente $PT = \frac{xx \mp tt}{x}$, segun fuere Aa el primero ó el segundo ege. Los triángulos rectángulos semejantes TPM , MPG dán $TP : PM : PM : PG$, ó $\frac{xx \mp tt}{x} : y :: y : PG = \frac{xyy}{xx \mp tt}$, de donde sacaremos $CP : PG :: (CP)^2 \mp (CA)^2 : (PM)^2$, ó $x : \frac{xyy}{xx \mp tt} :: xx \mp tt : yy$; una vez que resulta un mismo producto xyy de la multiplicacion de los medios que de la de los estremos. Pero $(CP)^2 \mp (CA)^2$ es á $(PM)^2$, como (149) el ege Aa es á su parámetro. Luego CP está tambien con PG en la misma razon.

196 *Si desde un punto qualquiera* M *de una hypérbola, se tiran á sus dos focus* F , f *las rectas* MF , Mf ; *la tangente* MT *que pasáre por dicho punto* M , *dividirá en dos partes iguales el ángulo* FMf. 71.

Porque si tiramos las perpendiculares FD , fd á la tangente MT ; el primer ege Aa que pase por los focus F , f, y encuentre la tangente en T ; y la ordenada MP á dicho ege; y llamamos CA ó Ca, t; CF ó Cf, m ; CP , x ; tendremos

MF:

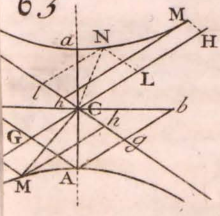
Fig. $MF : Mf :: TF$ ó $CF - CT : Tf$ ó $Cf + CT$, esto es (146 y 194) $\frac{mx}{t} - t : \frac{mx}{t} + t :: m - \frac{tt}{x} : m + \frac{tt}{x}$, por ser igual el producto de los medios al de los estremos. Pero los triángulos rectángulos semejantes TFD, Tfd dan $TF : Tf : : FD : fd$; luego la hypotenusa MF del triángulo rectángulo MDF, será á la hypotenusa Mf del triángulo rectángulo Mdf, como el lado DF es al lado df, y por consiguiente serán semejantes estos dos triángulos. Luego serán iguales uno con otro los ángulos FMD, fMd opuestos á los lados homólogos DF, df.

197 De aquí resulta, que si se prolonga indefinitamente por ambos lados del punto de contacto M la tangente MT, dejará toda la hypérbola AM del lado de su focus interior F. Y como se verifica esto mismo esté donde estuviere en la hypérbola el punto M, se viene á los ojos que toda ella será cóncava al rededor de su focus interior F.

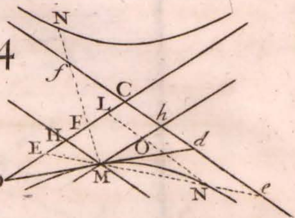
198 *La diferencia de los quadrados de dos diámetros*
72. *conjugados qualesquiera* Mm, Ss *es igual á la diferencia de los quadrados de los dos eges* Aa, Bb; *quiero decir, que será* $(CS)^2 - (CM)^2 = (CB)^2 - (CA)^2$ ó $(CM)^2 - (CS)^2 = (CA)^2 - (CB)^2$.

Si tiramos las rectas MS, AB, serán paralelas á la asýmtota Cg, y además de esto las dividirá por el medio en H y G la otra asýmtota CG, por ser (155 y 181) paralelas á dicha asýmtota las rectas Ms, Ab, y estar divididos (186) por el medio en C los segundos diámetros Ss, Bb. Por esta razon, si á la asýmtota CG se le tiran las perpen-

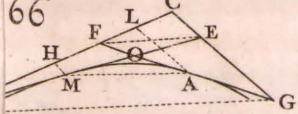
63



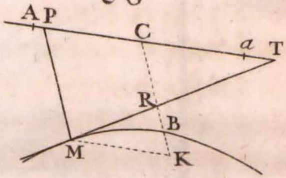
64



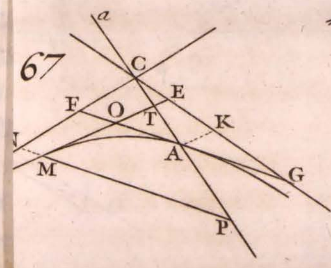
66

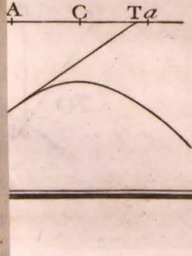


68

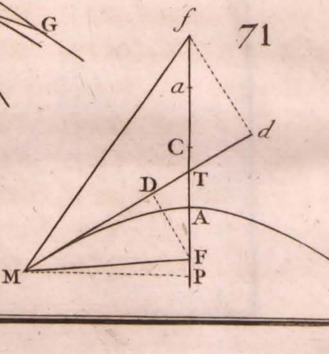


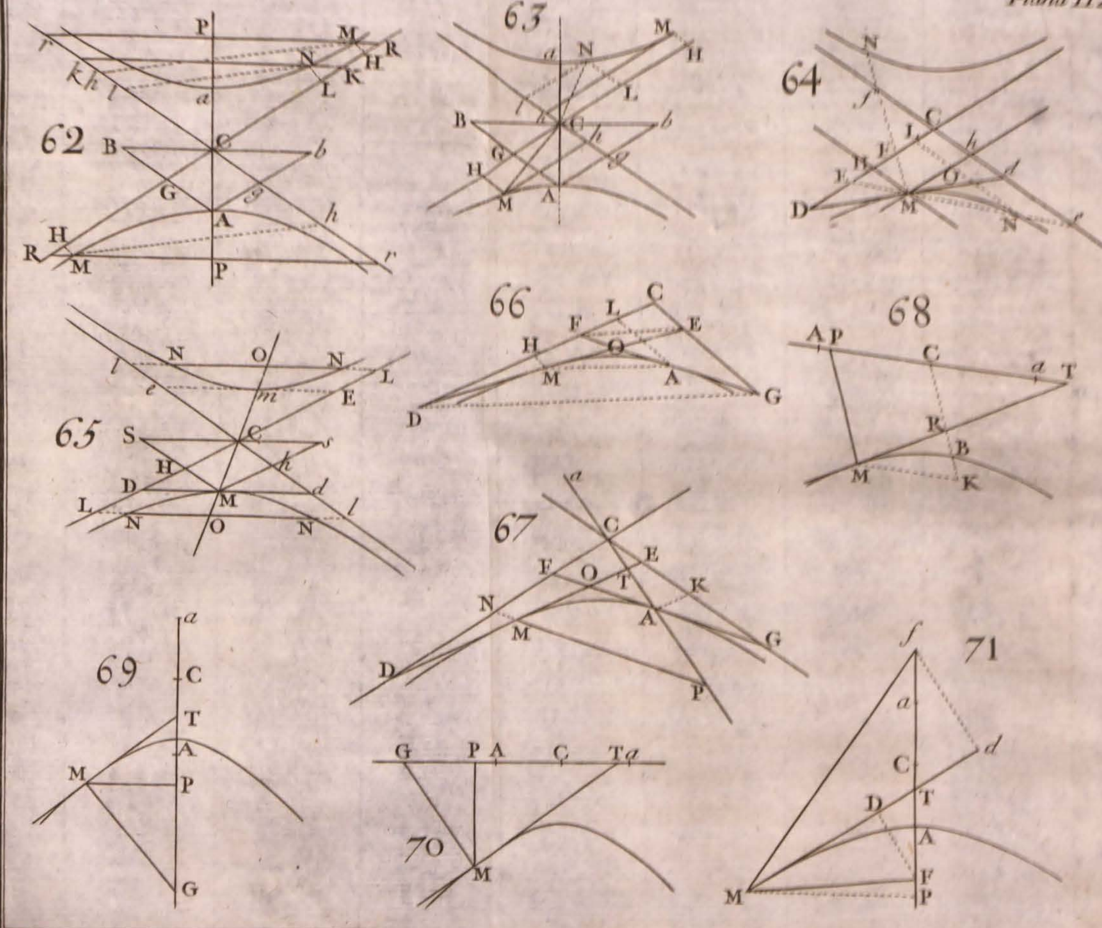
67





71




62
63
64
65
66
67
68
69
70
71

pendiculares AF, BE, ML, SK, resultarán los triángulos Fig. GAF, GBE, y HML, HSK iguales y semejantes. Sentado esto, llamaremos CG ó (158) GA, m; GE ó GF, a; AF ó BE, b; CH, x; HM, y; y sacaremos $CE = m + a$, $CF = m - a$, $(CE)^2 + (EB)^2$ ó $(CB)^2 = mm + 2am + aa + bb$, $(CF)^2 + (FA)^2$ ó $(CA)^2 = mm - 2am + aa + bb$, y por consiguiente $(CB)^2 - (CA)^2 = 4am$. Pero los triángulos semejantes GAF, HML dán $GA : AF :: HM : ML$ ó KS, esto es, $m : b :: y : ML$ ó $KS = \frac{by}{m}$; y $GA : GF :: HM : HL$ ó HK, esto es, $m : a :: y : HL$ ó $HK = \frac{ay}{m}$. Luego $CK = x + \frac{ay}{m}$, $CL = x - \frac{ay}{m}$; $(CK)^2 + (KS)^2$ ó $(CS)^2 = xx + \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$, $(CL)^2 + (LM)^2$ ó $(CM)^2 = xx - \frac{2axy}{m} + \frac{aayy}{mm} + \frac{bbyy}{mm}$; y por consiguiente $(CS)^2 - (CM)^2 \frac{4axy}{m} = 4am$, substituyendo en lugar de xy su valor (171) mm. Luego $(CS)^2 - (CM)^2 = (CB)^2 - (CA)^2$.

Si el ángulo GCg que forman las asýmtotas fuera agudo en lugar de ser obtuso, como lo es en la figura y lo supone la prueba de la proposicion; en este caso sería CF mayor que CE, y demostraríamos del mismo modo que $(CM)^2 - (CS)^2 = (CA)^2 - (CB)^2$. Pero si fuera recto el ángulo GCg que forman las asýmtotas, no hay duda en que las rectas AB, MS serían perpendiculares á la asýmtota CG, y por lo mismo serían iguales el uno al otro los dos semidiámetros conjugados CM, CS, como tambien los dos semieges CA, CB. Y como en este caso la diferencia de los dos diámetros conjugados Mm, Ss es nula, y

 lo

Fig. lo es tambien la de los dos eges Aa, Bb; queda verdadera en todos los casos la proposicion.

199 De aquí resulta claramente que un primer diámetro qualquiera Mm será menor, mayor ó igual al segundo diámetro Ss su conjugado, segun fuere obtuso, agudo ó recto el ángulo GCg que forman las asýmtotas.

200 *El rectángulo de los dos eges* Aa, Bb *es igual al*
73. *paralelógramo de los diámetros conjugados* Mm, Ss, *quiero decir que será* Aa × Bb = Mm × Ss.

Por lo dicho (158) $CN = AN = m$, y $CP \times PM = xy = mm = CN \times NA$, siendo CP, x, y PM, y; de donde sacaremos $CN : CP :: MP : NA$. Luego los triángulos CNA, CPM tienen los ángulos P y N iguales, por ser paralelas las lineas (155 y 181) AN y MP, y recíprocos los lados que los forman. Si desde los puntos M y A bajamos á las bases de estos triángulos, las perpendiculares Mp, An, los triángulos PpM, NnA serán semejantes, porque sobre tener cada uno un ángulo recto en p y n, tienen el ángulo MPp igual al ángulo ANn; luego $PM : NA :: Mp : An$, y por lo mismo $CN : CP :: Mp : An$, y $CN \times nA = CP \times pM$; pero $CN \times nA$ es igual al triángulo CAP duplo de ACN, por ser $CP = 2CN$, y $CP \times pM$ es duplo del triángulo $CPM = CMQ$, luego será igual al triángulo CMR duplo de CMQ por ser $CQ = QR$ (porque los triángulos RDC, RMQ dán $RC : RQ :: RD : RM$; y como $RM = \frac{1}{2}RD$ (165); luego $RQ = CQ = MP$); luego el rectángulo $CBPA$, de los semieges duplo del triángulo CPM

es

es igual al paralelogramo *CSMR* duplo del triángulo *CMQ* Fig.
que forman los dos semidiámetros conjugados *CS*, *CM*; Luego tambien el rectángulo de los eges será igual al rectángulo de los diámetros conjugados.

201 Quando dos hypérbolas opuestas tienen iguales uno con otro dos qualesquiera de sus diámetros conjugados, ó quando es recto el ángulo que forman sus asýmtotas, se llaman *Hypérbolas equiláteras*.

202 Luego si desde un punto qualquiera *M* de una 74.
hypérbola equilatera, se tira una ordenada *MP* á uno qualquiera *Aa* de sus diámetros, será (149 y 191) $(MP)^2 = (CP)^2 \mp (CA)^2$; es á saber $-$, quando *Aa* fuere un primer diámetro, y $+$, quando fuere un segundo. Porque siempre será su igual el diámetro conjugado al diámero *Aa* (199).

203 Supongamos dos hypérbolas opuestas *AM*, *am*, 75.
cuyos eges sean la recta *Aa* el primero, y la recta *Bb* el segundo; y supongamos tambien otras dos hypérbolas opuestas *BS*, *bc* cuyos eges sean al rebes la recta *Bb* el primero, y la recta *Aa* el segundo. Estas últimas hypérbolas *BS*, *bs* se llaman *conjugadas* á las dos primeras *AM*, *am*, y las quatro juntas se llaman *Hypérbolas conjugadas*.

204 Es evidente que las rectas *Ba*, *Ab* son paralelas, porque las rectas *Aa*, *Bb* que rematan en dichas lineas se cortan (132 y 133) por el medio en *C*. De donde se sigue (155) que las asýmtotas de la hypérbola *BS* conjugada á *AM*, son la recta *CG* asýmtota de la hypérbola *AM*, y la recta *Cg* que es la otra asýmtota de la hy-

Fig. pérbola AM, prolongada indefinitamente ácia C; porque pasan ambas lineas por el centro C, y son paralelas á las dos rectas Ba, BA tiradas desde el estremo B del primer ege Bb de la hypérbola BS á los dos estremos A, a del segundo. Se evidencia pues que las dos rectas CG, Cg paralelas á Ab, AB indefinitamente prolongadas por ambos lados del centro C, son no solo las asýmtotas de las hypérbolas opuestas AM, am, sino tambien de las otras dos BS, bs sus conjugadas.

75. 205 *Si por un punto qualquiera* H *de una asýmtota* CG *comun á las dos hypérbolas* AM, BS, *se tira una paralela* MS *á la otra asýmtota* Cg; *esta paralela encontrará las dos hypérbolas en unos puntos* M, S *que están á iguales distancias por ambos lados del punto* H.

Porque 1.° La recta MS encontrará (174) cada una de las hypérbolas AM, BS en un punto. 2.° Por razon de la hypérbola AM, el rectángulo (171) $CH \times HM = CG \times GA$, y por causa de la hypérbola BS, el rectángulo $CH \times HS = CG \times GB$. Luego ya que (158) $GB = GA$, se infiere que $CH \times HS = CH \times HM$, y así $HS = HM$.

206 Resulta, pues, 1.° que si desde los puntos M, S de las dos hypérbolas AM, BS se tiran los diámetros MCm, SCs, que rematen en las otras dos hypérbolas am, bs; el diámetro Ss será (187) el segundo diámetro conjugado al primero Mm de las dos hypérbolas opuestas AM, am; y recíprocamente que el diámetro Mm será el segundo diámetro conjugado al primero Ss de las dos hypérbo-

bolas *BS*, *bs*. Por consiguiente dos diámetros conjugados Fig.
qualesquiera *Mm*, *Ss* de dos hypérbolas opuestas *AM*, *am*, son tambien dos diámetros conjugados de las otras dos hypérbolas *BS*, *bs* sus conjugadas; con la diferencia de que el primer diámetro *Mm* se convierte en segundo, y al contrario, el segundo *Ss* se convierte en primero.

207 2.° Que las hypérbolas conjugadas *BS*, *bs* á las dos hypérbolas *AM*, *am* pasan por los estremos *S*, *s* de todos los segundos diámetros *SCs* de dichas hypérbolas; y recíprocamente, las hypérbolas *AM*, *am* pasan por los estremos *M*, *m* de todos los segundos diámetros *MCm* de las dos hypérbolas *BS*, *bs* sus conjugadas.

208 Cuestion I. *Dados dos diámetros conjugados qualesquiera, y sabiendo qual de ellos es el primero; ó lo que es* (187) *lo mismo, dadas las asýmtotas* CD, CF *de una hypérbola, con uno qualquiera* M *de sus puntos; tirar dos diámetros conjugados* Aa, Bb *que formen uno con otro un ángulo igual á un ángulo dado.* 76. 77. 78.

Despues de haber cortado en un círculo qualquiera cuyo centro sea o, un arco *dcf* capaz del ángulo *DCF* que forman las asýmtotas, tirarémos por el medio *e* de la cuerda *df*, la recta *ec* que forme con dicha cuerda al uno ú otro lado el ángulo *dec* ó *fec* igual al ángulo dado; y por el punto *c*, donde encuentra el arco *dcf*, tirarémos las rectas *cd*, *cf*. Hecho esto, tomaremos en las asýmtotas las partes *CD*, *CF* iguales á las cuerdas *cd*, *cf*: y despues de tirada *DF*, tirarémos el segundo diámetro *Bb* pa-

Fig. ralelo á dicha linea, y el primer diámetro *Aa* que pase por su medio *E*. Estos dos diámetros *Aa*, *Bb* formarán uno con otro un ángulo igual al ángulo dado, y serán conjugados el uno al otro.

Porque el ángulo *dcf* es igual por construccion al ángulo *DCF* que forman las asýmtotas; y son por consiguiente iguales y semejantes los triángulos *DCF*, *dcf*, y *DCE*, *dce*. Luego el ángulo *BCa* que forman uno con otro los dos diámetros, será igual al ángulo *DEC* ó *dec* igual por construccion, al ángulo dado. Ademas de esto, si por el punto *A* que, segun suponemos, es el uno de los estremos del primer diámetro *Aa*, tiramos una paralela á *DF*; no hay duda en que dicho punto estará en el medio de esta paralela, una vez que *E* está en medio de *DF*, y por lo mismo (179) será tangente en *A*; de donde se infiere (181) que serán conjugados los diámetros *Aa*, *Bb*.

Para determinar su magnitud, tirarémos por el punto dado *M* una paralela *MKL* al primer diámetro *Aa*, que encuentre la asýmtota *CD* en *K*, y la otra asýmtota *CF* prolongada mas allá del centro *C*, en *L*. Si tomamos *CA* media proporcional entre *KM* y *KL*, se viene á los ojos (164) que el punto *A* será el uno de los estremos del diámetro primero *Aa*; y así, tirando las rectas *AB*, *ab* paralelas á las asýmtotas *CF*, *CD*, dichas rectas determinarán (181) en sus puntos de concurso *B*, *b* la magnitud del segundo diámetro *Bb*.

Como se pueden tirar dos lineas distintas *ec*, *ec* que

formen á ambos lados de la cuerda *df* ángulos *dec*, *fec* Fig.
iguales al ángulo dado, quando este ángulo no es recto; 76.
se sigue que siempre que ocurra este caso, se podrán hallar dos distintos diámetros conjugados *Aa*, *Bb* que resolverán igualmente la cuestion, segun se echa de ver en las figg. 77 y 78. Pero es digno de notarse que los diámetros conjugados *Aa*, *Bb* de la fig. 78 están en la misma 78.
posicion, respecto de la asýmtota *CF*, que los de la fig. 77 77.
respecto de la otra asýmtota *CD*, y que su magnitud subsiste siempre una misma en estas dos posiciones diferentes. Porque

1.° Tirando desde el centro *o* al medio *e* de la cuerda *df*, la recta *oe*, será perpendicular á dicha cuerda, y por consiguiente serán iguales los ángulos *oec*, *oec*; por esta razon si tiramos los radios *oc*, *oc*, los triángulos *oec*, *oec* que tienen el lado *oe* comun, los ángulos *oec*, *oec*, y los lados *oc*, *oc* iguales unos á otros, tendrán tambien iguales sus terceros lados *ec*, *ec*. Luego los triángulos *fec*, *dec*, que tienen los lados *ef*, *ed*, y *ec*, *ec*, y los ángulos *fec*, *dec* iguales, serán iguales, y semejantes; luego el ángulo *ecf* ó *ECF* de la fig. 78 es igual al ángulo *ecd* ó *ECD* de la fig. 77; y así, la posicion que tiene el diámetro *Aa* de la fig. 78 respecto de la asýmtota *CF*, es semejante á la del diámetro *Aa* de la fig. 77 respecto de la otra asýmtota *CD*.

2.° Si tiramos en la fig. 78 la linea *Ml*, que forme 78.
con la asýmtota *CF*, prolongada ácia el lado del centro *C*,

 el

Fig. el ángulo *MlC* igual al ángulo *MLC* ó *ECF* de la fig. 77; se viene á los ojos que las lineas *Ml*, *Mk* de la fig. 78 serán iguales á las lineas *ML*, *MK* de la fig. 77, una vez que, segun suponemos, la posicion del punto *M* respecto de las asýmtotas es una misma en ambas figuras. Pero el ángulo *MlL* suplemento del ángulo *MlC* en la fig. 78 ó de *ECF* en la fig. 77 es igual al ángulo *MKk* suplemento del ángulo *ECD* de la fig. 78 ó *ECF* de la fig. 77; por consiguiente en la fig. 78 son semejantes los dos triángulos *LMl*, *kMK* por tener el ángulo en *M* comun, é iguales los ángulos en los puntos *l*, *K*; de donde se saca $LM : Ml :: kM : MK$. Luego $LM \times MK = lM \times Mk$ ó $LM \times MK$ de la fig. 77. En lo que se manifiesta (164) que son iguales los primeros semidiámetros *CA*, *CA* de las figg. 77 y 78. Lo mismo sucede con el diámetro *Bb*; porque penden su posicion y magnitud de las del primer diámetro *Aa* al qual es conjugado.

79.
80. Como no se puede tirar mas que una linea *ec* que forme á qualquiera lado de la cuerda *df* un ángulo igual al ángulo dado, quando este ángulo es recto; se infiere que no puede haber mas que dos diámetros conjugados *Aa*, *Bb* que formen uno con otro un ángulo recto, y que por consiguiente serán (184) los dos eges. Pero siendo en este caso isósceles el triángulo *dcf* ó *DCF*, el primer ege *Aa* dividirá por el medio el ángulo *DCF* que forman las asýmtotas; por lo que se echa de ver que hallaremos la

po-

posicion de los dos eges, solo con tirar dos rectas *Aa*, *Bb* perpendiculares la una á la otra, tales que la una *Aa* divida por el medio el ángulo *DCF* que forman las asýmtotas; hecho esto, se determinará su magnitud segun acabamos de declarar respecto de los diámetros conjugados. Fig.

Tambien se pueden hallar los dos eges del modo siguiente. Por el punto dado *M* tírese una paralela *MH* á la una de las asýmtotas *CF*, y que remate en la otra *CD* en *H*. Tómese en la asýmtota *CD* la parte *CG* igual á una media proporcional entre *CH*, *HM*; y tírese por el punto *G* una paralela *AB* á *CF*, tal que sea igual á *CG* cada una de sus partes *GA*, *GB*. Es evidente que las líneas *CA*, *CB* serán (171 y 158) los dos semieges de magnitud y posicion. 80.

209 Se evidencia pues 1.° que no hay mas que dos diámetros conjugados que formen uno con otro un ángulo recto, y que por lo mismo no puede haber mas que dos eges. 2.° Que siempre que quisiéremos podremos hallar dos distintos diámetros conjugados que formen uno con otro un ángulo igual á un ángulo dado, como no sea recto dicho ángulo; que los dos primeros están colocados respecto de la una asýmtota del mismo modo que los otros dos respecto de la otra asýmtota; de donde se sigue que están puestos de un mismo modo al uno y otro lado de los dos eges, una vez que los dos eges dividen en dos partes iguales los ángulos que forman las asýmtotas; y finalmente

Fig. te que su magnitud subsiste una misma en las dos posiciones distintas.

210 Cuestion II. *Dados dos diámetros conjugados qualesquiera, y conociendo qual de ellos es el primero; ó lo que es* (187) *lo mismo: dadas las asýmtotas de dos hypérbolas opuestas, y uno qualquiera de sus puntos, trazar dichas hypérbolas en virtud de un movimiento continuo.*

I. Buscaremos los dos eges, conforme acabamos de enseñar (208), y trazaremos despues las dos hypérbolas opuestas por lo dicho (144).

81. II. Sean Aa, Bb los diámetros conjugados dados, y Aa el primero; ó si no, sean CG, Cg las asýmtotas dadas, con el punto A, uno de las hypérbolas opuestas. Despues de tirada por el punto dado A una paralela AG á la una de las asýmtotas Cg, y que vaya á rematar en el punto G de la otra, se hará correr á lo largo de la asýmtota CG, indefinitamente prolongada por ambos lados del centro C, una recta HK igual á CG, que se lleve con su estremo H una paralela HM á la asýmtota Cg, y con el otro estremo K, una recta KA mobil al rededor del punto fijo A. La interseccion continua M de las rectas AK, HM trazará en virtud de este movimiento las dos hypérbolas opuestas que se piden.

Porque por razon de los triángulos semejantes KHM, KGA, siempre será KH ó $CG : HM :: KG$ ó $CH : GA$, y por consiguiente $CH \times HM = CG \times GA$. Luego el punto M será (171) uno de los de la hypérbola, que pasa por el

el punto dado *A*, y cuyas asýmtotas son las rectas dadas Fig.
CG, *Cg*; ó será de la hypérbola opuesta.

211 Cuestion III. *Hallar por medio de los mismos datos que en la cuestion antecedente, quantos puntos se quisieren de las hypérbolas opuestas.*

I. Sean *CD*, *CE* las asýmtotas dadas, y *A* el punto 82.
dado. Si tiramos por dicho punto *A* tantas lineas *DE*, *DE*, *DE* &c. quantas queramos, que rematen en las asýmtotas; y tomamos en dichas rectas las partes *EM*, *EM*, *EM* &c. iguales á *AD*, *AD*, *AD* &c. cada una á su correspondiente; es evidente (176) 1.º Que los puntos *M*, *M*, *M*, *M*, serán puntos de la hypérbola que pasáre por el punto *A*, quando los puntos *E*, *E*, *E* &c. cayeren debajo del centro. 2.º Que las asýmtotas de dichas hypérbolas serán las rectas *CD*, *CE*. Luego si por todos los puntos *M*,*M*,*M*, &c. que están dentro del ángulo que forman las asýmtotas, hacemos que pase una linea curva, y otra por los puntos *M*, *M*, *M*, &c. que están dentro del ángulo opuesto al vértice al primero; dichas dos curvas serán las hypérbolas opuestas que se piden.

II. Sean las rectas *Aa*, *Bb* los dos diámetros conjuga- 83.
dos dados, y *Aa* el segundo. Señalaremos en el primer semidiámetro *CB*, prolongado indefinitamente ácia *B*, quantas partes *CE*, *EE*, *EE* &c. quisiésemos, con tal que sean pequeñas, é iguales unas con otras. Tiraremos por el punto *E* mas próximo al centro *C*, la recta *EP* paralela á *BA*; y en el segundo diámetro *Aa* tomaremos al uno y otro lado

del

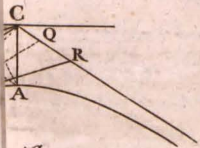
Fig. del centro C, otras tantas partes CP, PP, PP &c. pequeñas é iguales, como partes CE, EE, EE &c. hubiese. Tiraremos CD perpendicular é igual á CB, y por todos los puntos P, P, P &c. las paralelas MPM, MPM, MPM, &c. al primer diámetro Bb, y en cada una de estas tomaremos á cada lado del punto P las partes PM, PM cada una igual á su correspondiente ED. Las dos curvas que pasaren por todos los puntos M hallados por este camino, serán las dos hypérbolas opuestas que se piden.

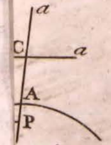
Porque si llamamos CA, t; CB ó CD, c; CP, x; PM, y: los triángulos semejantes CAB, CPE darán esta proporcion $CA : CB :: CP : CE$, ó $t : c :: x : CE = \frac{cx}{t}$. Y por razon del triángulo ECD rectángulo en C, y cuya hypotenusa ED se ha omitido por evitar la complicacion de la figura, será $(ED)^2$ ó $(PM)^2 = (CE)^2 + (CD)^2$ ó $yy = \frac{ccxx}{tt} + cc$. Luego (149 y 191) la recta PM será una ordenada al semidiámetro Aa, cuyo conjugado es el primero Bb; y como segundo aplica esta demostracion á todas las lineas PM, una vez que cada CP está siempre con su correspondiente CE en la misma razon que CA con CB, se sigue &c.

84. Quando son iguales uno con otro los diámetros conjugados, quiero decir (201), quando son equiláteras las hypérbolas que se piden; es aun mucho mas facil la construccion. Porque tirando CD perpendicular é igual á CA, y por un punto qualquiera P del diámetro Aa, una paralela MPM al primer diámetro Bb; bastará tomar en dicha linea al uno y otro lado del punto P, las partes PM, PM cada

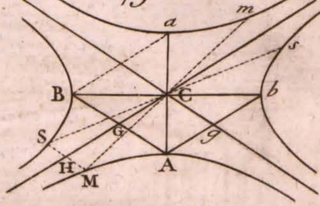
una

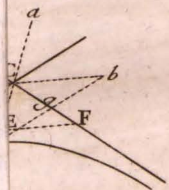
Plana 124.



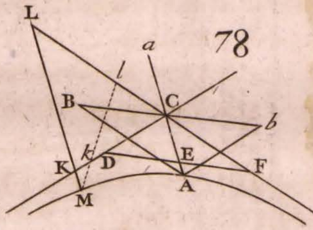


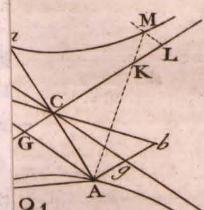
75



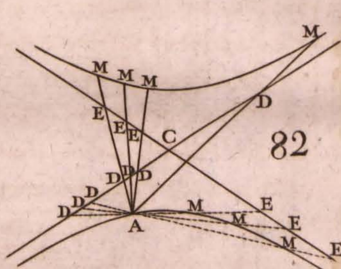


78

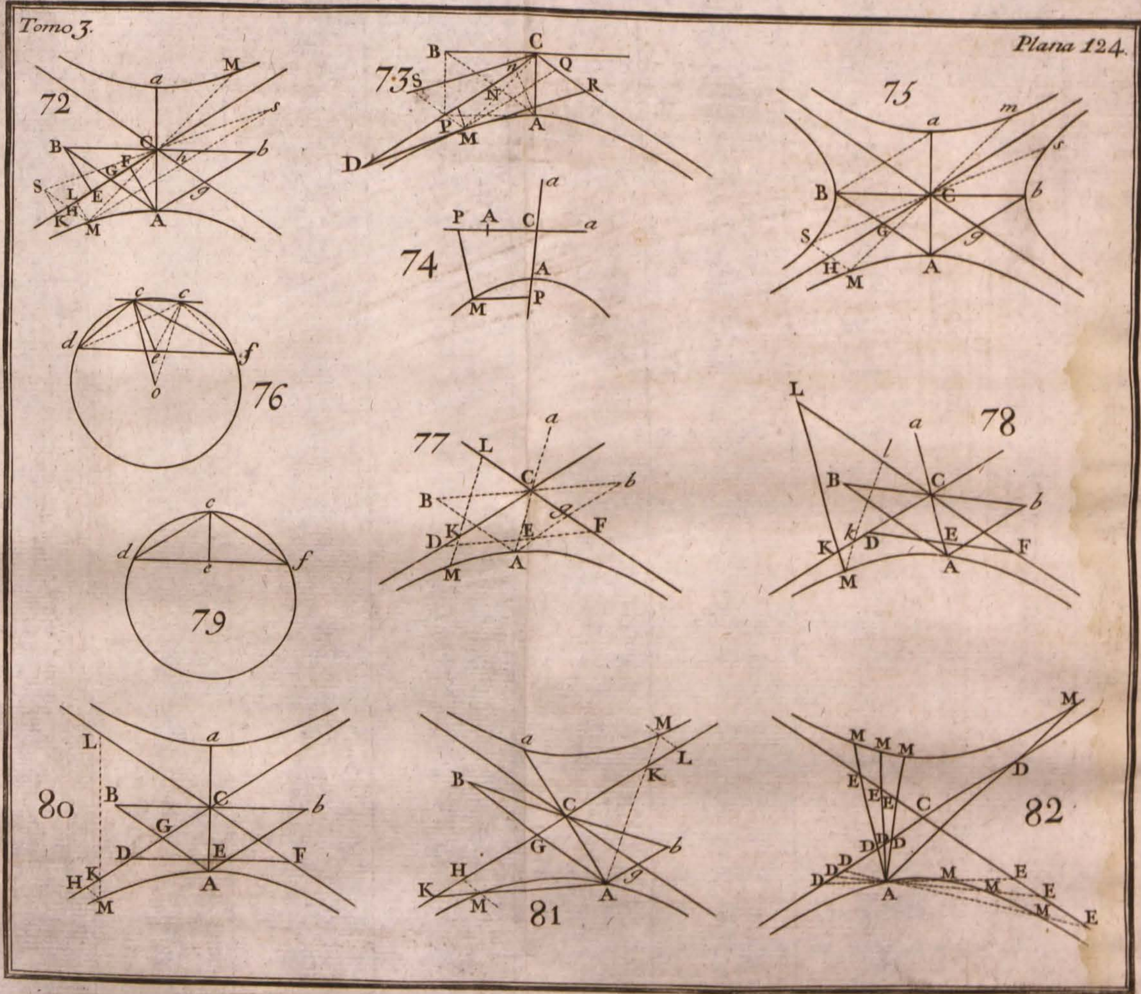




81



82


72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82

una igual á PD, para sacar dos puntos de las hypérbolas Fig.
opuestas. Porque si imaginamos tirada la hypotenusa PD en cada uno de los triángulos PCD, rectángulos en C, siempre será $(PD)^2$ ó $(PM)^2 = (CP)^2 + (CD)^2$ ó $(CA)^2$; y por lo mismo la recta PM será (202) una ordenada al segundo diámetro Aa, cuyo conjugado es el primero Bb su igual.

Formacion de las secciones cónicas en el sólido, y consideraciones sobre algunos modos de trazarlas.

212 Hemos dicho (32) que se llaman secciones cónicas las tres curvas, cuyas propiedades hemos declarado poco ha, porque resultan de la seccion hecha de un cono recto con un plano; bien que no nos queda que decir acerca de ellas, atendidos los fines que llevamos, nos detendremos sin embargo otro rato en su consideracion, para manifestar como se originan con efecto de la seccion del espresado sólido. Y despues daremos un método muy util en la práctica para trazarlas, que es un punto esencialísimo en esta materia.

Consideraremos primero la seccion del cilindro, é indagaremos qué curva resulta de cortar este sólido con un plano. Desde luego se echa de ver, que si se corta un cilindro recto (lo propio sucederá si fuere escaleno) con un plano que pase por su ege, ó por una linea paralela al ege, dejará trazadas en la superficie del cilindro dos lineas rectas paralelas MA, NB, y que la seccion del mismo sólido por un plano paralelo á las bases, será un círculo (I. 558). 85.

213 Supongamos ahora que se corte un cilindro recto

por

Fig. por un plano KRH, tal que ni sea paralelo á las bases, ni pa-
85. se por el ege, ni por linea alguna paralela al ege, y que la seccion comun del plano secante, y del plano de la base AB sea la recta L. Tírese en esta base el diámetro AB, tal que, prolongado si fuere menester, encuentre perpendicularmente la recta L. Concibamos que por AB y el ege del cilindro pase el plano $AMNB$; y reparemos en las dos lineas AM, BN, que le terminan, los dos puntos K, H comunes al plano secante, y á la superficie cilíndrica. Tírese KH, y por un punto qualquiera Z de esta linea, tírese en el plano $AMNB$ la QZP, paralela é igual á AB. Imaginemos tambien que por la recta QP pasa un plano QRP, paralelo á la base, de lo que resultará, conforme hemos dicho, un círculo. La recta RZ, interseccion comun del plano secante y del plano QRP paralelo á la base, está á un tiempo en ambos planos: luego ya que L seccion comun del plano de la base, y del plano secante es perpendicular á AB, la RZ interseccion comun del plano secante y del plano QRP paralelo á la base, será perpendicular á QP, paralela á AB.

Sentado todo esto, llamaremos KZ, x; ZR, y; QZ, z; KH, a; $QP = AB = MN = b$. En estos supuestos la equacion del círculo dará $QZ \times ZP = (ZR)^2$ ó $bz - zz = yy$. Los triángulos semejantes HZP, QZK darán $HZ : ZK :: PZ : ZQ$, ó $HZ + ZK : ZK :: PZ + ZQ : ZQ$; esto es $a : x :: b : \frac{bx}{a} = ZQ = z$; substituyendo este valor de z en $yy = bz - zz$, saldrá $yy = \frac{bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$; reduciendo el segundo miembro á un mismo denominador, sacaremos

a

$\frac{abbx - bbxx}{aa}$, que se reduce á $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$, y por consiguiente $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ que es la equacion característica de la elipse, cuyo ege mayor es a, y el menor es b (93). Fig.

214 Del mismo modo demostraríamos que *la seccion* 86.
KRHRK *de un cilindro escaleno, por un plano perpendicular á* AM, *que tampoco será paralelo á la base, ni pasará por el ege, será una elipse.*

215 Pero si el sólido que se corta con un plano fuere un cono, resultarán distintas curvas, segun variáre la posicion del plano secante. *Si se corta el cono* CHI *por un plano* AMB, *de modo que este plano encuentre los dos lados* CH, CI *á un mismo lado respecto del vértice; la seccion* AMM'B, *que resultare, será una elipse.* Hemos de exceptuar el caso en que el plano secante formase con el lado *CI* el mismo ángulo que forma el otro lado *CH* con la base, en cuyo caso la seccion sería un círculo; porque esto no puede suceder sino en el caso de ser la direccion del plano secante paralela á la base del cono. 87.

Quando el plano secante no encuentra el uno de los lados 88.
CH *sino prolongado, resulta la hypérbola* AMM'.

Finalmente *la seccion que resultará será una parábola* AMM', *si el plano secante fuese paralelo al uno* CH *de los* 89.
lados del cono. Son, pues, tres las proposiciones que hemos de demostrar.

1.° Si imaginamos que el cono *CHI* está cortado con un plano, que pase por una recta tirada desde el vértice *C* al centro del círculo de su base; esto es, que pase por el ege

del

Fig. del cono, resultará de esta seccion el triángulo BCD que
87. llamaremos *Triángulo por el ege.* Cortemos ahora el cono
88. por tres planos AMM', FMG, $HM'I$ perpendiculares á este triángulo, de modo que los dos últimos sean paralelos á la base del cono. Las dos secciones FMG, $HM'I$ serán círculos que encontrarán la seccion AMM' en M y M'. Las intersecciones FG, HI de los planos de estos círculos y del triángulo por el ege, serán los diámetros de los mismos círculos. Las intersecciones PM, $P'M$ de dichos círculos con el plano AMM' serán (I. 548) perpendiculares al plano del triángulo por el ege, y serán á un tiempo ordenadas de dichos círculos, y de la seccion AMM'.

Sentado esto, los triángulos semejantes APG, $AP'I$ dán $AP : AP' :: PG : P'I$, y los triángulos semejantes BFP, BHP' dán $PB : P'B :: FP : HP'$; si multiplicamos estas dos proporciones ordenadamente, saldrá $AP \times PB : AP' \times P'B :: FP \times PG : HP' \times P'I$; pero por la propiedad del círculo sabemos que $FP \times PG = (PM)^2$, y $HP' \times P'I = (P'M)^2$; luego $AP \times PB : AP' \times P'B :: (PM)^2 : (P'M')^2$: luego los quadrados de las ordenadas de la seccion AMM' son uno con otro, como los productos de las abscisas; y como estas abs-
87. cisas caen á distintos lados respecto de la ordenada, será AM
88. una elipse, y quando caen á un mismo lado, respecto de una misma ordenada, la seccion es una hypérbola.

En virtud de los mismos supuestos, y por la naturaleza del círculo, tendremos $(PM)^2 = FP \times PG$, $(P'M')^2 =$

HP'

$HP' \times P'I$, ó porque las paralelas PP', FH, y FP, HP' dán $FP = HP'$, $(P'M')^2 = FP \times P'I$; luego $(PM)^2 : (P'M')^2 ::$ $FP \times PG : FP \times P'I :: PG : P'I :: AP : AP'$, por razon de los triángulos semejantes APG, $AP'I$; luego los quadrados de las ordenadas tienen unos con otros la misma razon que las abscisas: luego la curva es una parábola. Fig. 89.

216 De lo dicho (93 y 149) consta, que si tomamos, así en la elipse como en la hypérbola, el origen de las abscisas en el vértice, pertenecerá la equacion $yy = px \mp \frac{pxx}{2t}$ á ambas curvas; y como en el supuesto de ser infinita $2t$, la misma equacion representa (95) la parábola; hemos de inferir que la equacion $yy = px \mp \frac{pxx}{2t}$ espresa todas tres secciones cónicas, en el supuesto de estar en el vértice el origen de las abscisas.

217 Entre los varios artificios que se han inventado para trazar las tres curvas, en cuya consideracion nos hemos detenido hasta aqui, hay uno, que en sentir de muchos prácticos, merece alguna preferencia respecto de los demás. Consiste en mirar una seccion cónica como el rastro de un punto que se mueve por medio de un instrumento, estando ajustado su movimiento á ciertas condiciones determinadas.

Aunque está fundado, y se puede poner en práctica (33, 72 y 129), este método de trazar las secciones cónicas, sin embargo no las pinta con toda la exactitud que es menester. Porque como tiene el lapiz el hilo de que se hace uso, mas ó menos tirante en unos puntos que en otros, no puede salir exacta la descripcion

Fig. de la curva. Si en lugar del hilo se substituyese una cadenilla, bien podria ser que se mantuviera siempre igualmente tirante; pero tampoco serviría este recurso para trazar la curva, antes al contrario no se trazaría sino un polýgono de muchos lados, bien que pequeños, y sería el polýgono inscripto en la curva que se quisiere trazar. Por estas consideraciones merecería la preferencia algun instrumento compuesto de reglas sólidas y firmes, que no padeciese los defectos que hemos tocado. Pero como no hay ninguno, que yo sepa, que pueda servir para las tres secciones cónicas, pues no le hay con esta circunstancia para la hypérbola, hemos de acudir á otro artificio fundado en la resolucion de la cuestion siguiente.

218 *Hallar un método para trazar la que se quisiere de las tres secciones cónicas, como sea dado su diámetro, su parámetro, la posicion de sus ordenadas, y se sepa tambien si el diámetro dado es primero ó segundo, quando la curva fuese una hypérbola.*

90. Si se hubiese *de trazar una parábola*; sea *AHL* un triángulo isósceles, del qual el un lado *AH* esté en el diámetro dado *AP*, prolongado indefinitamente al uno y otro lado de su origen *A*, y el otro lado *AL* esté sobre la tangente indefinita *LAL* que pasa por el vértice *A*. Imaginemos que su base *HL* se mueva siempre paralela á sí misma, llevándose por el uno de sus estremos *L* la indefinita *LM* paralela á *AP*, y por el otro estremo *H*, la linea *HF* paralela á *AL*, é igual al parámetro dado del diá-

diámetro AP, la qual se lleva tambien por su otro estre- Fig.
mo F la recta FA mobil al rededor del punto fijo A. La interseccion continua M de las dos rectas FA, LM trazará, quando la linea HL se mueve dentro del ángulo HAL, y su opuesto al vértice, la parábola MAM que se pide.

Porque si tiramos la ordenada MP al diámetro AP, los triángulos semejantes AHF, APM darán AH ó AL ó $PM : HF :: AP : PM$, y por consiguiente $(PM)^2 = AP \times HF$; luego &c.

Quando los puntos F y L están á lados opuestos respecto del diámetro AP, el punto H ha de estar mas arriba del origen A del espresado diámetro.

Por lo que mira á las demas secciones, se practicará lo propio, y no habrá mas diferencia sino en que la linea
LM que para trazar la parábola, ha de ser paralela al 91.
diámetro Aa, se ha de mover, quando se trate de las de- 92.
más secciones, al rededor del punto a del mismo diámetro. Quando se hubiese de trazar la hypérbola, supongamos que sea un primer diámetro el diámetro dado; porque si fuese un segundo diámetro, hallaríamos por lo dicho (188) el primero su conjugado y su parámetro.

Porque si tiramos MP ordenada al diámetro Aa, los triángulos semejantes aPM, aAL, y APM, AHF dán $aP : PM :: aA : AL$ ó AH; y $AP : PM :: AH : HF$. Si multiplicamos ordenadamente estas dos proporciones, sacaremos $aP \times PA : (PM)^2 :: aA \times AH : AH \times HF :: aA : HF$; luego (93, 112, 149 y 191) &c.

Fig. Prevenimos que en la elipse los puntos H, a han de caer á partes opuestas respecto del punto A, y á un mismo lado en la hypérbola, quando los puntos F, L están á partes opuestas respecto del diámetro Aa.

219 De esto se infiere lo que se deberá hacer para hallar el parámetro HF de un diámetro dado Aa, quando
90. fuese dada su ordenada PM. Porque 1.° en la parábola se tomará en el diámetro AP la parte $AH = PM$, y tirando la linea HF paralela á PM, y terminada en F por la linea AM tirada desde el origen A del diámetro por el estremo M de la ordenada; es evidente que la HF será el parámetro del diámetro AP.

2.° En las demás secciones, tirarémos por el uno de
91. los estremos a del diámetro dado Aa la linea AM que
92. encuentra la tangente AL, que pasa por el otro estremo A, en el punto L; y tomando en el diámetro Aa la parte $AH = AL$, tirarémos HF paralela á PM, que encontrará en F la linea AM, y será el parámetro del diámetro Aa.

220 De lo dicho sacaremos un método uniforme y muy exacto en la práctica para *trazar por muchos puntos una seccion cónica.* Le propondremos para la elipse, y será facil aplicarle á las otras dos secciones.

93. En la tangente AL, que pasa por el un estremo A del diámetro dado Aa, se tomará la parte AG igual á su parámetro, y se tirará la indefinita GF paralela á Aa; se tirarán por el punto A tantas lineas rectas AF, AF &c.

quan-

quantas se quisiere. En la tangente indefinita *AL* se tomarán Fig.
las partes *AL* , *AL* &c. iguales á las correspondientes *GF*, *GF* &c. y se tirarán las rectas *aL* , *aL* &c. Las intersecciones *M* , *M* &c. de las rectas correspondientes *FA* , *La* ; *FA*, *La* &c. serán puntos de la elipse cuyo diámetro es la linea *Aa*, la tangente la linea *AL* , y el parámetro del diámetro *Aa*, la linea *AG*.

Para probar que la curva es con efecto una elipse, tírese *FH* paralela á *AG* , y por el punto *L* la *HL* correspondiente al punto *F*. El triángulo *HAL* será isósceles , pues *AL* = *GF* ó *AH* segun suponemos , y *HF* será igual al parámetro del diámetro *Aa* ; concuerda , pues , esta construccion con lo dicho (218).

Como llegan á ser muy grandes las lineas *GF* , *AL* quando se han de hallar los puntos *M* que están inmediatos al punto *a* ; podrán servir para hallar estos puntos la tangente *al* que pasa por el otro estremo *a* del diámetro *Aa*, y la linea *gf* paralela á *Aa*, conforme lo está diciendo la figura.

Si se tiran las ordenadas *MP* , *MP* &c. paralelas á la tangente *AL*, y se prolongan al otro lado del diámetro *Aa* hasta *M*, *M* &c. de modo que todas estén divididas en dos partes iguales por el espresado diámetro ; es constante que los últimos puntos *M* serán tambien de la elipse.

Podría servir una misma abertura de compas *GF* ó *AL* para señalar en las lineas *GF* , *AL* tantos puntos *F* , *F* &c. *L* , *L* &c. como se quisiere ; porque siendo en

Fig. virtud de esto iguales unas con otras todas estas partes, cada GF sería igual á la correspondiente AL, y este es el fundamento de la demostracion.

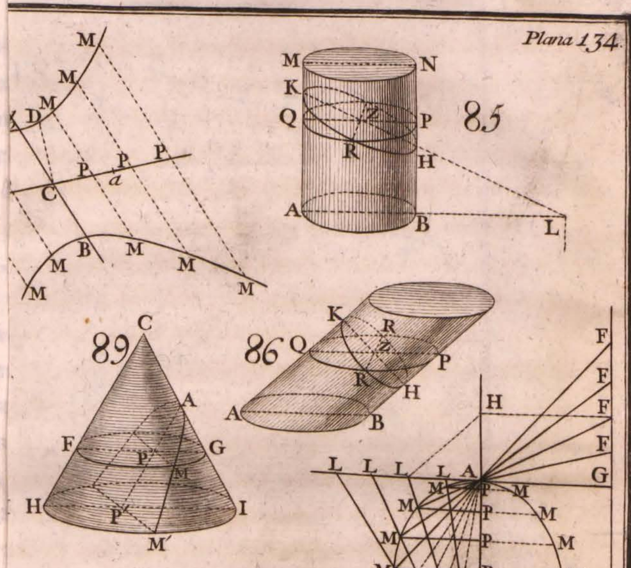
De algunas otras Curvas algebraicas.

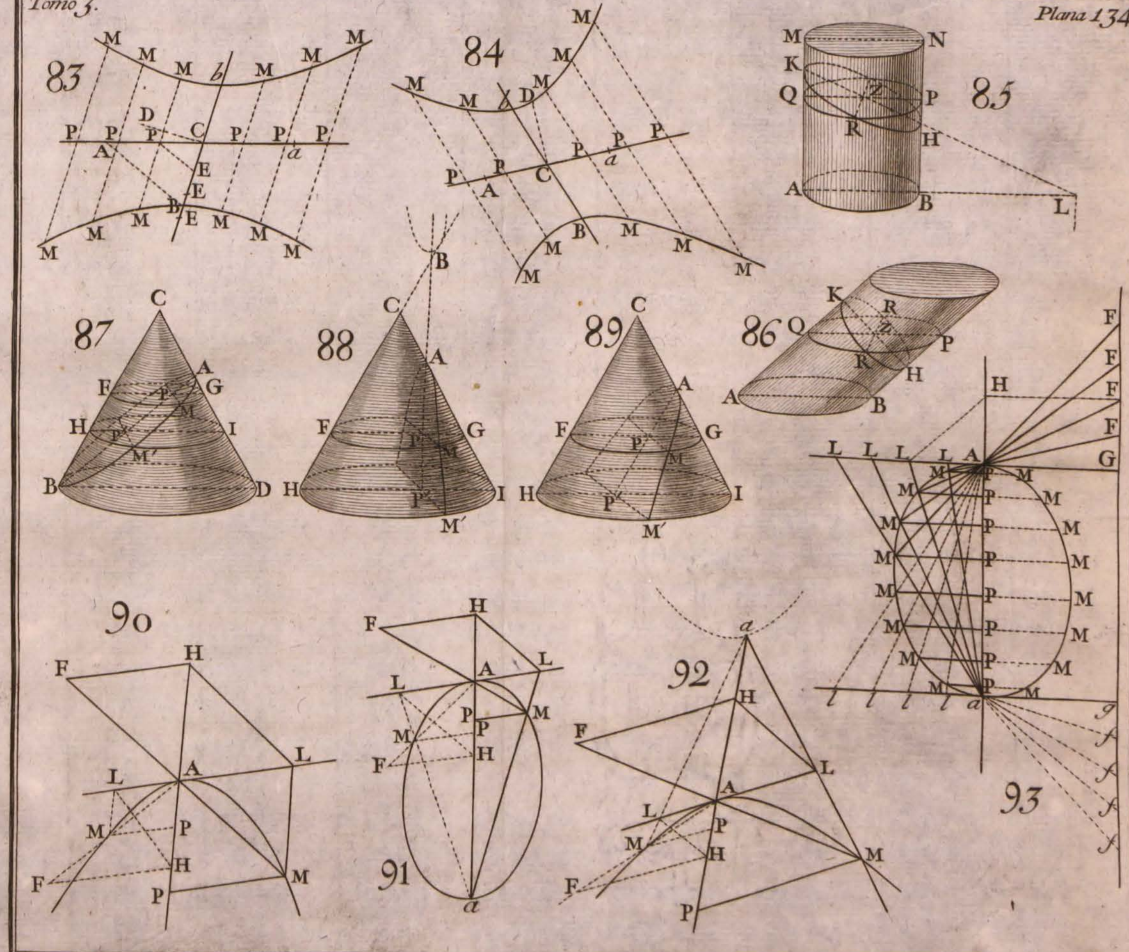
Además de las tres secciones cónicas cuyas principales propiedades hemos manifestado, hay otras curvas cuyo conocimiento es importante, por haberlas hecho famosas los fines para que se inventaron; y el uso que de ellas se hace en algunos casos particulares.

De las Parábolas é Hypérbolas de varios grados, y particularmente de la Parábola cúbica.

94. 221 Supongamos que representando a una linea dada, sea AC una linea recta indefinita cuyo origen esté en el punto fijo A; y AMB una linea curva, tal que tirando desde uno de sus puntos qualquiera M una recta MP que forme con la AC un ángulo dado APM, y llamando AP, x; PM, y, sea siempre $ax = yy$; es evidente (60) que la curva AMB será una parábola cuyo diámetro será la linea AC, la recta PM una ordenada á dicho diámetro, y el parámetro del mismo diámetro la linea a. Pero si suponemos que la naturaleza de la curva AMB esté cifrada en la equacion $y^3 = aax$, ó en estotra $y^3 = axx$; la linea curva se llamará *Parábola cúbica*, ó *de tercer grado* (21). Si la equacion fuere $y^4 = a^3x$, ó $y^4 = ax^3$, la linea curva AMB será una *Pa-*

rá-


Plana 134.
85
86
89
92
93


83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93

rábola de quarto grado; y así prosiguiendo. Fig.

222 Supongamos ahora que representando siempre 95.
a una linea dada, sea AC una linea recta cuyo origen esté en el punto fijo A, y BM una linea curva, tal que tirando desde uno de sus puntos qualquiera M la recta MP que haga con AC un ángulo dado APM, y llamando AP, x; PM, y, sea siempre $xy = aa$. Es evidente (171) que esta linea curva será una Hypérbola, cuyas asýmtotas serán la linea AC, y la linea AD paralela á PM, y su potencia será el quadrado aa. Pero si la equacion que representa la naturaleza de la curva BM fuere $xxy = a^3$, la linea curva sería una *Hypérbola cúbica* ó *de tercer grado* (21). Si la equacion fuere $x^3y = a^4$, la linea curva BM sería una *Hypérbola de quarto grado*; y así prosiguiendo.

223 Sentado todo esto, supongamos que represente 94.
m un número entero qualquiera que sea el esponente de 95.
la potencia de la linea AP ó x; que tambien represente n el esponente de la potencia de la otra indeterminada y, y para mas brevedad que $a = 1$; la equacion $y^n = x^m a^{n-m}$ que se transformará en $y^n = x^m$, representará la naturaleza de las parábolas de todos los grados al infinito. Los mismos supuestos transformarán la equacion $x^m y^n = a^{m+n}$ en $x^m y^n = 1$, que representará en general la naturaleza de las hypérbolas de todos los grados.

224 Si por el origen fijo A de la linea AC tira- 94.
mos una linea recta indefinita AD paralela á PM, y des- 95.
pues de tirada MK paralela á AC, que encuentra AD en

Fig. el punto K, llamamos AK, x; KM, y; es evidente que la indeterminada x que antes representaba la linea AP ó MK, será en el nuevo supuesto y, pues $AK = PM$; y al contrario y que representaba PM ó AK, será en el nuevo caso x, pues $KM = AP$; de donde inferirémos.

94\. 1.° Que si la curva AMB fuese una parábola vulgar, será su equacion $yy = ax$ ó $xx = ay$, segun la comparemos con la linea AC ó con la linea AD, y la equacion de la parábola cúbica que es $y^3 = axx$ quando referimos sus puntos á la linea AC, será $x^3 = aay$ quando los refieramos á la linea AD; y en general, si la equacion de la linea curva AMB fuese $y^n = x^m a^{n-m}$ refiriéndola á la linea recta AC, será $x^n = y^m a^{n-m}$ quando consideráremos su relacion con la linea AD. Suponemos aquí que n es mayor que m.

2.° Que la Hypérbola vulgar tiene siempre la misma

95\. equacion $xy = aa$, ora se refieran sus puntos á la linea AC, ora se refieran á la linea AD; que la equacion de la hypérbola cúbica que es $xxy = a^3$, quando se refieren sus puntos á la linea AC, será $xyy = a^3$, refiriéndolos á la linea AD; y en general, que la equacion de la hypérbola que es $x^m y^n = a^{m+n}$, quando se refieren sus puntos á la linea AC, será $x^n y^m = a^{m+n}$, si los refiriésemos á la linea AD.

225 De aquí se sigue que hay dos parábolas cúbicas, siendo la equacion de la una $y^3 = aax$ ó $x^3 = aay$, y la de la otra $y^3 = axx$, ó $x^3 = ayy$; pero no hay mas que una hypérbola cúbica $xxy = a^3$ ó $xyy = a^3$. Porque las indeterminadas x é y no se pueden combinar sino de

los

los quatro modos espresados para representar las parábolas cúbicas, y de los dos segundos para representar las hypérbolas cúbicas. Pero como las quatro primeras equaciones pertenecen á dos curvas diferentes, y las dos segundas á una misma, se sigue &c. Fig.

226 Las lineas *AC*, *AD* son las asýmtotas no solo de la hypérbola vulgar, sino tambien de las hypérbolas de todos los grados al infinito. Porque si consideramos la equacion general $x^m y^n = a^{m+n}$ ó $y^n = \frac{a^{m+n}}{x^m}$ que representa la naturaleza de qualquiera hypérbola, quando se refieren sus puntos á la linea *AC*; echaremos de ver que quanto mas creciere x, tanto mas disminuirá y^n, y por consiguiente *PM* menguará; de manera que siendo x infinitamente grande, será y nula ó cero; quiero decir que la hypérbola *BM* y la linea *AC*, prolongadas ambas al infinito, se arrimarán mas y mas, hasta que por fin se junten á una distancia infinita, en cuya circunstancia consiste la esencia de la asýmtota (172). Si referimos los puntos de la misma hypérbola á la linea *AD*, en cuyo supuesto será *AK*, x, y *KM*, y; tendrémos $x^n y^m = a^{m+n}$ ó $y^m = \frac{a^{m+n}}{x^n}$. Luego quanto mas creciere x, tanto mas menguará y; por consiguiente será tambien la linea *AD* asýmtota de la misma hypérbola. 95.

227 Tiremos ahora desde un punto dado *M* á la segunda parábola cúbica *AMB* cuya naturaleza está cifra- 94.

da

Fig. da en la equacion $y^3 = axx$, la tangente MT.

Supondremos el arco MN infinitamente pequeño, y tiraremos NQ paralela á PM, y MR paralela á AC: el pequeño triángulo MRN será semejante al grande TPM, pues podemos mirar el pequeño arco MN como la prolongacion de la tangente TM. Sentado esto, llamaremos la subtangente TP, s; la recta PQ ó MR, e; y de los triángulos semejantes TPM, MRN sacaremos $RN = \frac{ey}{s}$. Ahora bien, si substituimos el cubo de $QN = y + \frac{ey}{s}$ en lugar de y^3 en la equacion $y^3 = axx$, que representa la naturaleza de la curva AMB; y en lugar de xx el quadrado de $AQ = x + e$, resultará la equacion $y^3 + \frac{3ey^3}{s} + \frac{3eey^3}{ss} + \frac{e^3y^3}{s^3} = axx + 2eax + eea$, que espresará la relacion entre AQ y QN. Si restamos la primera equacion de la segunda, y dividimos lo que saliere por e, resultará $\frac{3y^3}{s} + \frac{3ey^3}{ss} + \frac{eey^3}{s^3} = 2ax + ea$. Borrando finalmente en esta todos los términos en que está e (II. 183), sale $\frac{3y^3}{s} = 2ax$, y por consiguiente $PT = s = \frac{3y^3}{2ax} = \frac{3}{2}x$, despues de substituido axx en lugar de y^3.

228 Considerando con algun cuidado el último cálculo, echaremos de ver que para llegar al resultado que buscamos, basta substituir en lugar de una potencia de y los dos primeros términos de la misma potencia de $y + \frac{ey}{s}$. Porque como todos los demás están multiplicados por alguna potencia de e, se han de despreciar (II. 185 y II. 183). Lo propio sucede quando en lugar de una potencia de x substituimos la misma potencia de $x + e$. Pero (II. 99) los

dos

dos primeros términos de una potencia qualquiera m de $x+e$ Fig.
ó de $(x+e)^m$ son $x^m + mex^{m-1}$; y los dos primeros términos de una potencia qualquiera n de $y+\frac{ey}{s}$, ó de $(y+\frac{ey}{s})^n$ son $y^n + \frac{ney^n}{s}$.

229 Por consiguiente lo que se ha de practicar para sacar la espresion general de la subtangente PT de las parábolas de todos los grados al infinito, se reduce á valerse de la equacion general $y^n = x^m a^{m-n}$, que haciendo $a = 1$, es $y^n = x^m$, cuya equacion representa la naturaleza de todas estas parábolas. 94.

Se substituirán en la equacion general $y^n = x^m$ en lugar de y^n, los dos primeros términos de la potencia n de $y+\frac{ey}{s}$, esto es $y^n + \frac{ney^n}{s}$, y en lugar de x^m los dos primeros términos de $(x+e)^m$, esto es $x^m + mex^{m-1}$, y resultará $y^n + \frac{ney^n}{s} = x^m + mex^{m-1}$, restaremos la primera equacion de la segunda, dividiremos por e, saldrá $\frac{ny^n}{s} = mx^{m-1}$; y por consiguiente $s = \frac{ny^n}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}x$, despues de substituido en lugar de y^n su valor x^m.

230 Por el mismo método sacaremos la espresion de la subtangente de las hypérbolas de todos los grados al infinito. 95.

Porque despues de practicada la misma preparacion,

que

Fig. que egecutamos respecto de las parábolas, substituirémos en la equacion general $x^m y^n = a^{m+n}$ que representa la relacion entre AP y PM, en lugar de x^m los dos primeros términos de $(x + e)^m$; esto es $x^m + mex^{m-1}$, y en lugar de y^n los dos primeros términos de $(y - \frac{ey}{s})^n$, esto es $y^n - \frac{ney^n}{s}$; y egecutando la multiplicacion correspondiente, resultará $x^m y^n + mey^n x^{m-1} - \frac{ney^n x^m}{s} - \frac{mneey^n x^{m-1}}{s} = a^{m+n}$. Restando esta segunda equacion de la primera, y dividiendo despues por ey^n, saldrá $mx^{m-1} - \frac{nx^m}{s} - \frac{mnex^{m-1}}{s} = 0$; y borrando el término $- \frac{mnex^{m-1}}{s}$ por lo dicho (227), sale por fin PT ó $s = \frac{nx^m}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m}x$.

93\. 231 Luego para tirar la tangente MT en un punto
94\. dado M de una parábola ó hypérbola, sea el que fuere su grado, en el supuesto de ser la equacion de la parábola $y^n = x^m a^{n-m}$, y $x^m y^n = a^{m+n}$ la de la hypérbola, basta tomar la subtangente $PT = \frac{n}{m} AP$ del mismo lado que el punto A, respecto del punto P, quando fuere la curva una parábola; ó del lado opuesto si fuere una hypérbola.

96\. 232 Para declarar la generacion de la parábola cúbica, supondremos dadas de posicion dos lineas rectas indefinitas BC, DE que se corten en el punto A, y en el ángulo BAD una parábola AM de un grado qualquiera, cu-

ya

ya naturaleza es tal que tirando desde uno qualquiera de sus Fig. puntos *M* la *MP* paralela á *DE*, que encuentre *BC* en el punto *P*, y llamando *AP*, x; *PM*, y; la dada *AB*, 1; siempre se verifique $x^m = y^n$; en cuya equacion espresan m y n los esponentes respectivos de x é y, los quales serán los que se quisiere, con tal que siempre sea m mayor que n. Manifiesta la espresada equacion 1.° que siendo $x = 0$, es tambien $y = 0$, y que quanto mayor fuere x, tanto mayor será y. 2.° Que la subtangente $PT = \frac{n}{m}x$ (231) es siempre menor que x, pues suponemos que n sea menor que m. De donde se infiere, que la parábola *AM*, sea el que fuere su grado, siempre pasará por el punto *A*; que se apartará mas y mas al infinito de la recta *BC* que consideraremos como su diámetro, ácia la qual estará su convexidad. Pero como la curva *AM*, que está en el ángulo *DAB* no es mas que una porcion de la espresada parábola, resta indagar en qual de los ángulos *DAC*, *CAE*, *EAB*, se ha de proseguir; en cuya investigacion hay tres casos distintos que considerar.

I. Quando el esponente m de la potencia de x fuere un número par, y el esponente n de la potencia de y un número impar, la raiz m de x^m será $\mp x$, y la raiz n de y^n solo será $+y$. Por consiguiente x podrá ser positiva, y negativa, pero y solo será positiva; luego la parábola *AM* se proseguirá en el ángulo *DAC*, que está al lado del ángulo *BAD*; de suerte que si por un punto qualquiera *K* de la linea *AD*, se tira una paralela á *BC*, encontrará la parábola *MAM'* en dos puntos *M* y *M'*, que estarán cada uno á la misma distan- 96.

cia

Fig. cia del punto K. Esta parábola será la vulgar cuya equacion es $xx = ay$, ó $xx = y$, haciendo el parámetro $= 1$.

II. Quando ambos esponentes m y n fuesen números impares, la raiz m de x^m será solo $+ x$, y la raiz n de y^n, será solo $+ y$. Pero como la equacion $- x^m = - y^n$ es la misma que $x^m = y^n$, y la raiz m de $- x^m$ es $- x$, y la raiz n de $- y^n$ es $- y$; se infiere que x ó AP, é y ó PM po-
97. drá ser positiva, y negativa, con la circunstancia de que quando AP fuere positiva, lo será tambien PM, y al reves. Por consiguiente la parábola AM se continuará en el ángulo CAE opuesto al vértice al ángulo BAD, en una posicion del todo semejante, pero trastornada: de suerte que tomando $AP' = AP$, y tirando $P'M'$, que forme con AP' el ángulo $AP'M'$ igual al ángulo APM, la linea $P'M'$ encontrará la porcion AM' que está en el ángulo CAE, en un punto M' tal que $P'M' = PM$. Esta curva se llama la *primera parábola cúbica*, y es su equacion $x^3 = aay$, ó $x^3 = y$ con hacer $a = 1$.

III. Quando el esponente m de la potencia x^m fuese impar, y el esponente n de y^n par; la raiz m de x^m será siempre $+ x$, y la raiz n de y^n será $\pm y$. Porque supongamos, por egemplo que sea AM una segunda parábola cúbica, cuya equacion es $x^3 = ayy$ ó $x^3 = yy$, es evidente que la raiz
98. cúbica de x^3 es solo x, y que la de yy es $\mp y$. De donde resulta, que la parábola AM se ha de continuar en el ángulo BAE que está al lado del ángulo BAD: de suerte que si por un punto qualquiera P de la linea AB, tiramos una paralela

la á DE, encontrará la parábola entera MAM' en dos puntos M, M' que estarán á igual distancia del punto P. Fig.

Es constante que todos estos tres casos están cifrados en la equacion $x^m = y^n$; porque si m y n fuesen ambos pares, se sacaria de cada miembro la raiz quadrada quantas veces se pudiera, con lo que se reduciria por fin la equacion á otra, en la qual el uno de los esponentes sería impar por precision. Tambien se puede siempre suponer que m es mayor que n; porque si fuese menor, y tubiéramos, por egemplo, $aax = y^3$, con referir los puntos de la parábola AM á los de la linea DE, y llamar AK, x; KM, y, sacaríamos estotra equacion $x^3 = ayy$, que tambien espresaria la naturaleza de la misma parábola AM, en la qual m es mayor que n. 99.

De la Conchoide.

233 Supongamos que siendo BD, AH dos rectas indefinitas que se cortan á ángulos rectos en el punto A, la DB se mueva al rededor del punto B, que se llama el *Polo*: de manera que siempre pase sobre la GH, que llamaremos la *Directriz*, y que en qualquiera posicion que esté BD, sus partes QM, AD y Qm, Ad &c. sean siempre iguales la una á la otra; la curva que pasare por todos los puntos M, D, M' será la *Conchoide superior*, y la que pasare por todos los puntos mdm' se llamará la *Conchoide inferior.*

234 Para sacar la equacion de esta curva, tiraremos la MP perpendicular á AH, y llamaremos $AD = QM$, a; AB, b; PM, y; AP, x; del triángulo rectángulo QPM, sa-

Fig. sacaremos $PQ = \sqrt{(aa - yy)}$, y $AQ = x - \sqrt{(aa-yy)}$. Sentado esto, los triángulos semejantes BAQ, QPM darán $BA : AQ :: MP : PQ$, esto es $b : x - \sqrt{(aa - yy)} :: y : \sqrt{(aa - yy)}$: multiplicando estremos y medios, saldrá $xy - y\sqrt{(aa - yy)} = b\sqrt{(aa - yy)}$; trasladando á un solo miembro todo lo que está multiplicado por el radical, y reduciendo, saldrá $xy = (b + y)\sqrt{(aa - yy)}$, y quadrando $x^2y^2 = (b + y)^2 \times (aa - yy)$; esta será la equacion de la conchoide superior.

235 Para sacar la de la conchoide inferior, tiraremos la ordenada mF que llamaremos y, y será x la abscisa AF; QF será $\sqrt{(aa - yy)}$, y $AQ = x + \sqrt{(aa - yy)}$. Sentado esto, de los triángulos semejantes QAB, QFm, sacaremos $QA : AB :: QF : Fm$, ó $x + \sqrt{(aa-yy)} : b :: \sqrt{(aa-yy)} : y$; luego $xy + y\sqrt{(aa - yy)} = b\sqrt{(aa - yy)}$; luego $xy = (b - y)\sqrt{(aa - yy)}$, y quadrando, será $x^2y^2 = (b - y)^2 \times (aa - yy)$ la equacion de la conchoide inferior.

Es la conchoide una curva geométrica. Porque 1.° la podemos concebir trazada por un movimiento continuo, con suponer que la linea BD ó BM pasa siempre por el centro del círculo MHm, corriendo siempre dicho centro sobre la directriz GH, y señalando la interseccion continua M una curva MDM'. 2.° La relacion entre cada punto M de la curva, y de la recta GH se espresa exactamente por una equacion, que es siempre la misma respecto de todos los puntos de la curva. 3.° Se verifica en la conchoide lo dicho (10) acerca de las curvas geométricas. Las abs-

abscisas positivas se toman en la linea *AH* desde *A* ácia *G*, Fig.
y las abscisas negativas desde *A* ácia *H*; las ordenadas *MP* son todas paralelas á *BA*. La directriz *GH* es el ege y *D* el vértice de la curva.

De la Cisoide.

236 Despues de trazado el semicírculo *AHB*, y tirada la tangente indefinita *BG*, tírense desde el punto *A* á la tangente, una infinidad de lineas *AG*, *Ag*, que todas cortarán la circunferencia del semicírculo. Hágase $AD = FG$, $Ad = fg$ &c. la linea curva *ADd* que pasa por todos los puntos *D*, *d* se llama *Cisoide*, cuyo inventor fue Diocles. Por medio del otro semicírculo se trazaría la otra porcion *AK* de la misma curva. 101.

Para hallar la equacion de la cisoide respecto de uno de sus puntos qualquiera *D*, tirarémos desde el punto *D* la perpendicular *DC* á *AB*, y desde el punto *F* donde la *ADG* corta la circunferencia del círculo, la *FE* tambien perpendicular á *AB*; será $AC = EB$, porque siendo paralelas las dos lineas *CD*, *EF*, cortarán proporcionalmente los lados *AG*, *AB* del triángulo *ABG*; pero en virtud de la construccion $AD = FG$, será, pues, tambien $AC = EB$.

Sentado esto, el diámetro *AB* es el ege de la cisoide; *A*, su vértice; las abscisas *AC*, *AE* se toman en el ege; y las ordenadas *CD*, *Ed* son paralelas. Llamemos el ege *AB*, a; la abscisa $AC = BE$, x; la ordenada *CD*, y; será $AE = AB - EB = a - x$, y $(EF)^2 = AE \times EB = ax - xx$; será por consiguiente $EF = \sqrt{(ax - xx)}$.

Fig. 101. Los triángulos equiángulos ACD, AEF dán $AC:CD::AE:EF$, esto es, $x:y::a-x:\sqrt{(ax-xx)}$. Luego multiplicando estremos, y medios, tendremos $ay-xy=x\sqrt{(ax-xx)}$; quadrando ambos miembros, resultará $a^2y^2-2axyy+xxyy=ax^3-x^4$, y dividiéndolos por $a-x$, sacaremos $x^3=ayy-xyy$, que será la equacion de la cisoide.

La cisoide pasa por el punto H, que está en medio de la semicircunferencia; porque si desde el centro C' tiramos la $C'H$ perpendicular al diámetro, será paralela á la base BL del triángulo ABL. Tendremos, pues, $AC':C'B::AH:HL$, pero $AC'=C'B$; luego $AH=HL$, y será A uno de los puntos de la cisoide.

Las razones con que hemos probado que la conchoide es una curva algebráica, manifiestan que lo es tambien la cisoide.

De los Lugares geométricos.

237 Toda linea que está cifrada en una equacion qualquiera suele llamarse el *Lugar* de dicha equacion, de manera que lo mismo es hallar el lugar de una equacion propuesta, que trazar la linea recta ó curva que representa. Por consiguiente para hallar el lugar de una equacion indeterminada, es menester, segun llevamos dicho (12) darla succesivamente varios valores á la abscisa x, con lo que se transformará la variable y que es la ordenada, en cantidad incógnita, cuyos diferentes valores penderán de los

los que se le dieren succesivamente á la abscisa x; y la linea recta ó curva que pasare por los estremos de todos los diferentes valores de la ordenada y, hallados por este camino, será el lugar de la equacion propuesta. Fig.

Es de suma importancia la doctrina de los lugares geométricos, pues en ella estriba la construccion geométrica de las equaciones. Pero como yá hemos declarado en el tomo segundo de esta obra los métodos que sirven para construir las equaciones del primero y segundo grado, nos ceñirémos á tratar de los lugares geométricos cuya construccion es indispensable para la resolucion geométrica de las equaciones de tercero y quarto grado.

Como todos estos lugares representan alguna de las tres secciones cónicas de que hemos tratado, manifestarémos su construccion por el mismo orden que hemos guardado en la investigacion de las propiedades de las espresadas curvas.

De los Lugares pertenecientes á la parábola.

238 Sean dos rectas incógnitas é indeterminadas 102.
AP que llamarémos x; PM, que llamarémos y; y e, m, 103.
n, r, s lineas rectas dadas.

1.° Despues de tomada en la linea AP la parte AB 102.
$= m$, tirarémos las rectas $BE = n$, $AD = r$, paralelas á PM y del mismo lado que ella; por el punto A la recta AE que llamarémos e, y por el punto D la recta indefinita DG paralela á AE; en la DG tomaremos la parte

Fig. $DC = s$ ácia PM, y con el diámetro CG, cuyo parámetro sea $CH = p$, y las ordenadas sean rectas paralelas á PM, trazarémos una parábola CM que coja ácia el mismo lado que AP. La porcion de esta parábola que estuviere dentro del ángulo PAD, que forma la AP con la AD tirada por el punto fijo A paralelamente á PM y ácia el mismo lado, será el lugar de la equacion general ó fórmula siguiente

$$\left.\begin{array}{l} yy - \frac{2n}{m} xy + \frac{nn}{mm} xx - 2ry + \frac{2nr}{m} x + rr \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{ep}{m} x + ps \end{array}\right\} = 0$$

Porque si desde un punto qualquiera M de dicha porcion de parábola, tiramos la linea PM que forme con AP un ángulo dado ó tomado á arbitrio APM, y que encuentre las paralelas AE, DG en los puntos F, G; los triángulos semejantes ABE, APF darán $AB : AE :: AP : AF$ ó DG, esto es $m : e :: x : DG = \frac{ex}{m}$. Darán tambien los mismos triángulos $AB : BE :: AP : PF$, esto es $m : n :: x : PF = \frac{nx}{m}$; y por consiguiente GM ó $PM - PF - FG = y - \frac{nx}{m} - r$, y CG ó $DG - DC = \frac{ex}{m} - s$. Pero la propiedad de la parábola (60) dá $(GM)^2 = CG \times CH$, cuya equacion se transforma en la fórmula general propuesta, con substituir en lugar de las lineas sus valores analyticos; luego &c.

103. 2.° Por el punto fijo A tirarémos una recta indefinita AQ paralela á PM y del mismo lado; tomarémos en dicha linea la parte $AB = m$, y tirarémos $BE = n$ paralela á AP del mismo lado que PM, y por los puntos in-

indeterminados A, E la linea AE que llamarémos e; y tomando en la AP la parte $AD = r$ del mismo lado que PM, tirarémos la recta indefinita DG paralela á AE, en la qual tomarémos la parte $DC = s$ tambien del mismo lado que PM. Concluída esta preparacion, con el diámetro CG cuyo parámetro sea $CH = p$, y las ordenadas sean rectas paralelas á AP, trazarémos una parábola CM que coja ácia el mismo lado que AQ. La porcion de esta parábola que estuviere dentro del ángulo BAP, será el lugar de esta segunda equacion general ó fórmula Fig.

$$\left.\begin{array}{r} xx - \frac{2n}{m}yx + \frac{nn}{mm}yy - 2rx + \frac{2nr}{m}y + rr \\ - \frac{ep}{m}y + ps \end{array}\right\} = 0$$

Porque si por uno de sus puntos qualquiera M tiramos la linea MQ paralela á AP, que encuentre las paralelas AE, DG en los puntos F, G; serán semejantes los triángulos ABE, AQF, y darán las dos proporciones siguientes. 1.° $AB : AE :: AQ = PM : AF = DG$, esto es, $m : e :: y : DG = \frac{ey}{m}$. 2.° $AB : BE :: AQ : QF$, esto es, $m : n :: y : QF = \frac{ny}{m}$. Luego GM ó $QM - QF - FG = x - \frac{ny}{m} - r$ y CG ó $DG - DC = \frac{ey}{m} - s$. Y como la propiedad de la parábola dá $(GM)^2 = CG \times CH$, sacarémos la espresada fórmula, con substituir en esta última equacion en lugar de las lineas sus valores analýticos.

239 Acerca de las dos fórmulas que hemos dado conviene hacer dos prevenciones de suma importancia. 1.° En la primera está el quadrado yy sin fraccion, y en la segunda lo está el quadrado xx. 2.° En ambas fórmulas los quadra-

 dos

Fig. dos xx é yy están con las mismas lineas, por manera que el quadrado $\frac{nn}{mm}$ de la mitad de la fraccion $\frac{2n}{m}$ que multiplica el rectángulo xy, multiplica tambien el uno de los quadrados xx ó yy; de donde hemos de inferir que si el rectángulo xy faltase en alguna de las dos fórmulas, tambien faltaria el quadrado $\frac{nnxx}{mm}$ ó $\frac{nnyy}{mm}$, porque en este caso sería nula la fraccion $\frac{2n}{m}$.

240 Sentado esto, será facil construir el lugar de una equacion dada, tal que no lleve el rectángulo xy, y falte por lo mismo uno de los quadrados xx é yy; ó que si llevare el rectángulo xy, lleve tambien con unos mismos signos ambos quadrados xx é yy, por manera que el quadrado de la mitad de la fraccion que multiplicare xy sea igual á la fraccion que multiplicare el quadrado de la una de las dos incógnitas. Suponemos que el uno de dichos dos quadrados está sin fraccion alguna.

Esto se conseguirá comparando cada término de la equacion dada con su correspondiente en la primera fórmula, si llevare el quadrado yy sin fraccion; ó con su correspondiente en la segunda fórmula, si llevare sin fraccion el quadrado xx. De la comparacion de dichos términos homólogos, se inferirán los valores de las cantidades e, m, n, p, r, s que servirán para trazar del mismo modo que antes una parábola que será el lugar de la equacion propuesta. Pero será indispensable tener presente

241 1.° Que se podrá tomar la linea $AB = m$ posi-
102. tiva y de la longitud que se quisiese. 2.° Siendo dadas las
103. lineas $AB = m$, y $BE = n$, será tambien dada la linea

AE

$AE = e$, pues es dado el ángulo ABE. 3.° Quando $BE =$ Fig.
$n = 0$, la linea AE se confunde con AB, esto es con AP en la construccion de la primera fórmula, y con AQ en la construccion de la segunda; en cuyo supuesto será $AB = m = AE = e$, porque entonces coincidirán los puntos B, E. 4.° Quando fuere negativo el valor de alguna de las cantidades n, r, s, se deberá tirar la linea que representare del lado opuesto respecto de PM, pero se tirará del mismo lado si fuere positivo, conforme lo hemos practicado antes (238).

242 Si acaso el valor del parámetro $CH = p$ fuese negativo, deberá trazarse la parábola en una direccion contraria á la propuesta (238): quiero decir ácia el otro lado respecto de AP, para construir la primera fórmula, y al otro lado respecto de AQ para construir la segunda. Todo esto lo aclararán los egemplos siguientes.

243 Cuestion I. *Construir el lugar de la equacion* $yy - 2ay - bx + cc = 0$.

Como el quadrado yy está en la propuesta sin fraccion, nos valdremos de la primera fórmula (238), y de la comparacion de los términos homólogos sacaremos 1.° $\frac{2n}{m} = 0$, porque como la propuesta no lleva el rectángulo xy, le podemos considerar como si le multiplicase cero; de donde sacarémos $n = 0$, y por consiguiente (241) $m = e$. Borraremos, pues, en la fórmula todos los términos que llevan $\frac{n}{m}$, substituirémos en lugar de m su valor e, y sacaremos $yy - 2ry - px + rr + ps = 0$. 2.° De la compa-

Fig. racion de $-2ry$ con $-2ay$, que son dos términos homólogos, sacaremos $r = a$. 3.° De $-px = -bx$, sacaremos $p = b$. 4.° Finalmente la comparacion de los términos homólogos que no llevan ninguna de las dos incógnitas x é y, dán $rr + ps = cc$, y substituyendo en lugar de r y p sus valores respectivos a y b, sacaremos $s = \frac{cc-aa}{b}$, que será negativa quando a fuere mayor que c, segun suponemos. Como de la comparacion de los dos primeros términos no sacaríamos nada, hemos escusado compararlos. Una vez determinados los valores de n, r, p, s, construiremos el lugar imitando la construccion de la segunda fórmula (238), y teniendo presente lo prevenido (241).

104. Ya que $BE = n = 0$, los puntos B y E coinciden, y la linea AE se confunde con AP (241); por este motivo tiraremos por el punto fijo A la linea $AD = r = a$ paralela á PM, y del mismo lado, por ser positivo su valor. Tiraremos despues DG paralela á AP, en la qual tomaremos $DC = \frac{aa-cc}{b} = -s$ del lado opuesto á PM; porque $s = \frac{cc-aa}{b}$ que es un valor negativo. Finalmente, con el diámetro CG, cuyo parámetro sea $CH = p = b$, y las ordenadas sean rectas paralelas á PM, trazaremos una parábola (218), y sus dos porciones OMM, RMS, comprehendidas dentro del ángulo PAO que forma la linea AP con la AO tirada paralelamente á PM, y del mismo lado, será el lugar de la equacion propuesta.

Porque si por uno qualquiera M de sus puntos tiramos la MP que forme con AP el ángulo dado ó arbitrario APM,

y

y que encuentre DG en el punto G, tendremos $GM = y$ Fig.
$- a$, ó $GM = a - y$, segun estuviere el punto M mas arriba ó mas abajo que el diámetro CG; y CG ó $DG + CD = x + \frac{aa - cc}{b}$, y por lo mismo (60) $(GM)^2 = CG \times CH$, ó $yy - 2ay + aa = bx + aa - cc$, ó $yy - 2ay - bx + cc = 0$, que es la misma equacion propuesta.

244 Si prolongáramos AO al otro lado de A ácia X; 104.
1.° la porcion indefinita SM de la parábola, comprehendida dentro del ángulo SAX, sería el lugar de todos los valores negativos de la incógnita y, correspondientes á los valores positivos de la otra incógnita x en la equacion propuesta. Porque si tomáramos AP mayor que AS, y tiráramos PM paralela á AX, y del mismo lado, que encuentra la porcion SM en M; sería $PM = -y$, y por lo mismo la recta GM ó $GP + PM = a - y$, y se sacaria del mismo modo que antes la equacion propuesta, por medio de la propiedad de la parábola.

2.° La porcion RCO de la misma parábola, que está dentro del ángulo TAO opuesto al vértice al ángulo SAX, será el lugar de todos los valores positivos de la incógnita y en la equacion propuesta, correspondientes á los valores negativos de la otra incógnita x; porque con hacer $AP = - x$, se sacará la equacion propuesta.

3.° Si hubiere una porcion de dicha párabola dentro del ángulo TAX opuesto al vértice al ángulo PAO, sería el lugar de todos los valores negativos de la incógnita y, correspondientes á los valores negativos de la otra incógnita x.

Por

Fig. Por manera que la espresada parábola es el lugar cabal de todos los valores ya positivos, ya negativos de la incógnita y, que corresponden á todos los valores positivos y negativos de la otra incógnita x en la equacion $yy - 2ay - bx + cc = 0$.

Por donde se echa de ver que en este egemplo hay
104. dos valores positivos PM, PM de la incógnita y, que corresponden á un mismo valor AP de la otra incógnita x, quando dicha linea es menor que AS; que hay un valor positivo PM, y un valor negativo $-PM$ quando AP es mayor que AS; que no hay mas que un valor positivo SV de y, siendo el otro cero, quando $AP = AS$; que hay dos valores positivos PM, PM de la incógnita y, correspondientes al mismo valor negativo $-AP$ de la incógnita x, quando AP es menor que AT; que dichos dos valores llegan á ser iguales cada uno á la tangente TC, quando $AP = AT$; y finalmente, que si tomáramos $AP = -x$ mayor que AT, entónces la aplicada PM no encontraría la parábola en punto alguno, y no habría por consiguiente valor alguno positivo ó negativo de la incógnita y, que pudiese corresponder á dicho valor negativo $-AP$ de la otra incógnita x; quiero decir que en este caso ambos valores de la incógnita y serían imaginarios.

Todo lo que acabamos de decir se aplica igualmente á los demás egemplos que traeremos, así respecto de la parábola, como respecto de las demás secciones cónicas; por ma-

manera que la seccion cónica que resultare de la construc- Fig.
cion, será no solo el lugar de todos los valores positivos de la incógnita x; sino tambien el lugar de todos los valores positivos y negativos de la incógnita y, correspondientes á todos los valores positivos y negativos de la otra incógnita x.

245 Cuestion II. *Construir el lugar de la equacion* $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = 0$.

Por estar aquí sin fraccion el quadrado yy, usarémos, como en la cuestion antecedente, de la primera fórmula (238); y de la comparacion de los términos homólogos sacaremos 1.° $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$, que dá $n = -b$, haciendo $m = a$ (241). 2.° $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$, que dá $n = -b$; 3.° $r = -c$; 4.° $\frac{2nr - ep}{m} = -b$, y por lo mismo $p = \frac{ab + 2bc}{e}$, despues de substituidos en lugar de m, n, r sus valores $a, -b, -c$. 5.° $rr + ps = cc$, que dá $s = 0$, con substituir en lugar de rr su valor cc. Una vez determinados los valores de m, n, r, p, s, construirémos el lugar de la equacion propuesta imitando la construccion de la primera fórmula (238) como sigue.

Tomarémos en la linea AP la parte $AB = m = a$; 105.
tiraremos las rectas $BE = b = -n$, $AD = c = -r$ paralelas á PM, y del lado opuesto, porque $n = -b$, y $r = -c$ son valores negativos. Por los puntos determinados A, E tiraremos la linea $AE = e$ que es dada, y por el punto D la linea DG paralela á AE. Hecho esto, como $DC = s$ es cero, el punto C coincide con D, por cu-

Fig. cuyo motivo con el diámetro DG, cuyo parámetro sea $DH = p = \frac{ab+2bc}{e}$, y las ordenadas sean rectas paralelas á PM, trazaremos (218) una parábola; su porcion OM que está dentro del ángulo PAH, donde suponemos que han de estár todos los puntos M, será el lugar de la equacion propuesta.

Porque si por uno qualquiera de sus puntos M, tiramos la MP que forme con la AP el ángulo dado ó arbitrario APM, y que encuentre las paralelas AE, DG en los puntos F, G; los triángulos ABE, APF serán semejantes, y darán las dos proporciones siguientes 1.° $AB : AE :: AP : AF = DG$, esto es $a : e :: x : DG = \frac{ex}{a}$. 2.° $AB : BE :: AP : PF$, ó $a : b :: x : PF = \frac{bx}{a}$. Luego $GM = PM + PF + FG = y + \frac{bx}{a} + c$. Y como la propiedad de la parábola dá $(GM)^2 = GD \times DH$, tendremos $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy - bx + cc = 0$, despues de substituidos en lugar de las lineas sus valores analýticos, y traspasados todos los términos al primer miembro.

105. 246 Acerca de esta construccion hay que hacer algunas prevenciones importantes. 1.° Si la linea AP no cortára la parábola y no hiciera mas que tocarla, ó estubiera toda fuera de la curva, se inferiría que ninguno de los puntos M que buscamos, podria estár dentro del ángulo PAH, conforme supusimos al tiempo de hacer la construccion; y no habria por consiguiente valor alguno positivo de la incógnita y, que correspondiese á un valor positivo de la otra incógnita x, fuese la que se quisiere su lon-

longitud. Esta prevencion es transcendental á todos los casos parecidos al propuesto, así respecto de la parábola, como respecto de todas las demás secciones cónicas. Fig.

247 2.° Si en lugar de hacer $AB = m = a$ la hiciéramos igual á otra cantidad distinta de a, fuese la que fuese, los valores de $BE = n$, y $AE = e$ serían distintos á la verdad; pero las razones $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$ permanecerían las mismas; porque en el triángulo ABE el ángulo ABE es dado, y lo es tambien la razon del lado AB al lado AE, que en este egemplo es $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$. Y como en los valores de p, r, s no puede haber otras razones que $\frac{n}{m}$, $\frac{e}{m}$, se sigue que dichos valores serán siempre unos mismos qualquiera valor positivo que se le dé á la línea $AB = m$; de suerte que hemos hecho $m = a$ solo para que saliese menos complicada la construccion.

248 Cuestion III. *Construir el lugar de la equacion* $xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = 0$.

Por llevar esta equacion el quadrado xx sin fraccion, uso de la segunda fórmula (238); y de la comparacion de los términos homólogos saco 1.° $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$, que dá $n = -b$, con hacer $m = a$. 2.° $\frac{nn}{mm} = \frac{bb}{aa}$; y por ser $m = a$, sale $n = -b$, lo mismo que antes. 3.° $r = c$. 4.° $\frac{2nr - ep}{m} = b - \frac{2bc}{a}$, que dá $p = -\frac{ab}{c}$, con substituir en lugar de m, n, r sus valores respectivos a, $-b$, c. 5.° $rr + ps = 0$, porque la propuesta no lleva término alguno conocido que se pueda comparar con el término todo conocido $rr + ps$ de la fórmula; de donde sacaremos

Fig. mos $s = -\frac{rr}{p} = \frac{ecc}{ab}$, con substituir en lugar de r y p sus valores c y $-\frac{ab}{e}$. Una vez determinados los valores de las cantidades m, n, r &c. construyo el lugar que se pide usando de la construccion de la segunda fórmula, y teniendo presente lo prevenido (241 y 242).

106. A este efecto tiro por el punto fijo A una linea indefinita AQ paralela á PM, tomo en dicha linea la parte $AB = m = a$; y por el punto B tiro $BE = b = -n$ paralela á AP, y del lado opuesto á PM, por ser negativo el valor de n; y por los puntos determinados A, E tiro la linea $AE = e$ que es dada. Tomo en la AP la parte $AD = r = c$ ácia el lado de PM, tiro la recta indefinita DG paralela á AE, en la qual tomo la parte $DC = s = \frac{ecc}{ab}$ del lado PM. Hecho esto, con el diámetro GC cuyo parámetro es $CH = \frac{ab}{e} = -p$, y las ordenadas lineas paralelas á AP, trazo (218) una parábola que coja (242) ácia el lado opuesto á AQ, por ser negativo el valor de $p = -\frac{ab}{e}$. La porcion OMR de esta parábola, que está dentro del ángulo PAB, será el lugar que se pide.

Porque si por uno qualquiera M de sus puntos, tiro la MQ paralela á AP, que encuentre las paralelas AE, DG en los puntos F, G, los triángulos ABE y AQF serán semejantes. Tendremos pues $AB : AE :: AQ = PM : AF = DG$, ó $a : e :: y : DG = \frac{ey}{a}$. 2.° $AB : BE :: AQ : QF$, esto es, $a : b :: y : QF = \frac{by}{a}$. Luego $GM = QM + FQ - FG = x + \frac{by}{a} - c$, ó $GM = FG - FQ - QM =$

$c - \frac{by}{a} - x$, segun á qué lado del diámetro CD estubiere el punto M; y la abscisa $CG = CD - DG = \frac{ecc}{ab} - \frac{ey}{a}$. Pero por la propiedad de la parábola (60) $(GM)^2 = CG \times CH$, esto es $xx + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}yy - 2cx + by - \frac{2bc}{a}y = 0$ despues de substituidos en lugar de las líneas sus valores &c. Fig.

249 Se viene á los ojos que si de la comparacion de los términos homólogos resultase $p = 0$, sería imposible la construccion de la parábola. Pero entónces la equacion propuesta podrá siempre bajar un grado, por manera que será el lugar de una linea recta, y esto lo manifiestan las fórmulas mismas (238). Porque si en la primera borramos los términos que llevan p, sale $yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr = 0$, cuya raiz quadrada es $y - \frac{nx}{m} - r = 0$, ó $y = \frac{nx}{m} + r$, cuyo lugar es una linea recta que se construirá por lo dicho (29).

250 Cuestion IV. *Hallar el lugar de la equacion* $xx - ay = 0$.

Por estar sin fraccion el quadrado xx en la propuesta, uso de la segunda fórmula (238); y de la comparacion de los términos homólogos saco 1.º $\frac{2n}{m} = 0$, porque falta xy en la propuesta; $n = 0$, y por lo mismo (241) $m = e$. 2.º $\frac{nn}{mm} = 0$, porque tambien falta yy, de donde infiero $n = 0$. 3.º $r = 0$, porque no tiene la propuesta término alguno que lleve la primera potencia de x; por lo que, borrando en la fórmula todos los términos en que están $\frac{n}{m}$ y r, y substituyendo en lugar de e su valor

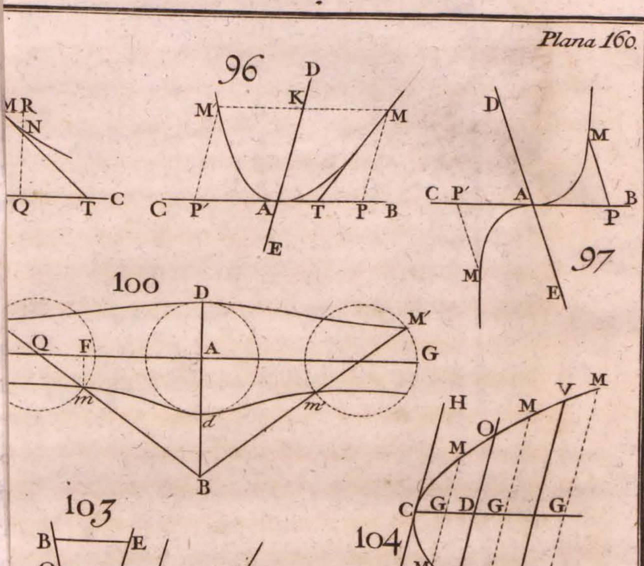
Fig. lor m, resulta $xx - py + ps = 0$, cuyos términos compararé con los de la propuesta. 4.° de $-py = -ay$ saco $p = a$. 5.° Como no lleva la propuesta término alguno enteramente conocido que comparar con ps, se sigue que $ps = 0$, y que por lo mismo $s = 0$. Una vez determinados por este medio los valores de n, r, p, s, servirán para construir el lugar que se pide, imitando la construccion de la segunda fórmula (238), y teniendo presente lo prevenido (241).

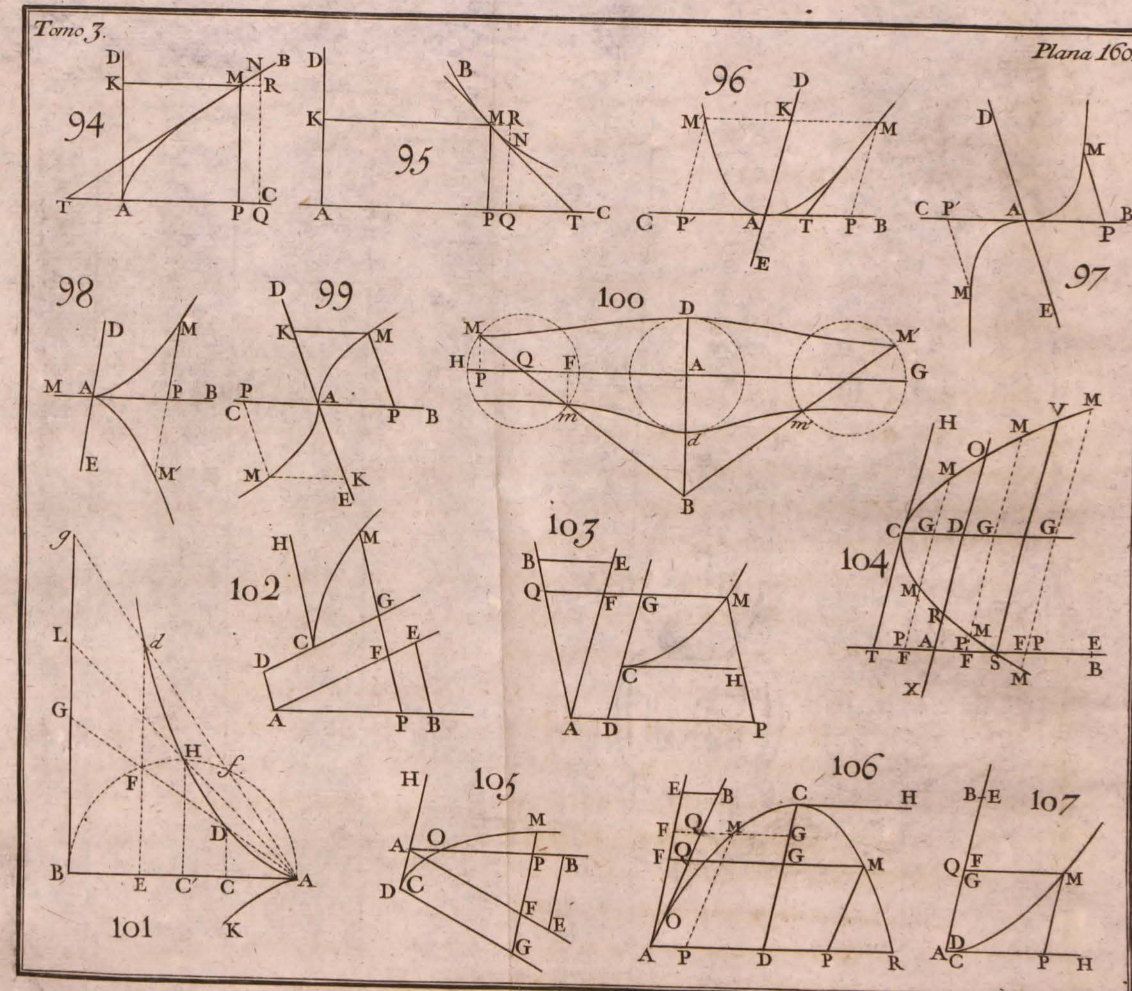
107. Porque $BE = n = 0$, la linea AE coincide con AQ tirada paralelamente á PM y del mismo lado, lo propio digo de DG, porque $AD = r = 0$. Pero ya que $CD = s = 0$, el punto C coincide con D que coincide con A segun acabamos de ver. Por consiguiente trazo una parábola (218) con el diámetro AQ, cuyo parámetro el $AH = p = a$, y cuyas ordenadas sean rectas MQ paralelas á AP; y la porcion indefinita AM que está dentro del ángulo PAQ es el lugar que busco.

Porque si por uno qualquiera M de sus puntos tiramos las rectas MP, MQ paralelas á AQ, AP, tendremos por la propiedad de la parábola (60) $(QM)^2 = AQ \times AH$, esto es $xx = ay$, y $xx - ay = 0$ que es la misma equacion propuesta.

251 Es constante que si substituimos en la fórmula general (238) en lugar de m, n, r, s, p los valores que se hallaren comparando sus términos con los de la equacion propuesta, sea la que fuere, con tal que tenga

las


Plana 160.
96
97
100
103
104
106
107


Tomo 3.
Plana 160.
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107

las condiciones especificadas en la cuestion, que la espresada fórmula se transformará en la equacion propuesta; y por consiguiente que si tomamos dichos valores en la construccion de la fórmula, el lugar de la fórmula general se transformará en el de la equacion propuesta. Luego &c. Fig.

De los Lugares pertenecientes á la elipse ó al círculo.

252 Sean dos lineas rectas incógnitas é indetermi- 108.
nadas AP, que llamarémos x, y PM, que llamarémos y; y sean tambien m, n, p, r, s, t lineas rectas dadas.

En la linea AP tomarémos la parte $AB = m$; y tirando las rectas $BE = n$, $AD = r$ paralelas á PM y del mismo lado que ella, tirarémos por el punto A la recta AE que es dada, y la llamarémos e; y por el punto D, la recta indefinita DG paralela á AE, en la qual tomarémos la parte $DC = s$ del lado de PM, y al uno y otro lado del punto C, las partes CK, CL cada una igual á t; trazaremos despues una elipse (218) con el diámetro $LK = 2t$, cuyo parámetro sea $KH = p$, y las ordenadas sean rectas paralelas á PM. La porcion OMR de la espresada elipse, comprendida dentro del ángulo PAD que forma la linea AP con la AD tirada por el punto fijo A paralelamente á PM y del mismo lado, será el lugar de la equacion general ó fórmula que sigue

$$\left.\begin{array}{l} yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr \\ \qquad + \frac{eep}{2mmt} \qquad\qquad - \frac{2eps}{2mt} - \frac{ptt}{2t} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{pss}{2t} \end{array}\right\} = 0$$

Fig. Porque si por un punto qualquiera M de dicha porcion de elipse tiramos la MP que forme con AP el ángulo dado ó arbitrario APM, y que encuentre las paralelas AE, DG en los puntos F, G; serán semejantes los triángulos ABE, APF, y sacaremos AF ó $DG = \frac{ex}{m}$, y $PF = \frac{nx}{m}$. Tendremos, pues, $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, y $CG = \frac{ex}{m} - s$. Pero la propiedad de la elipse (112 y 93) dá $KL : KH :: LG \times GK$ ó $(CK)^2 - (CG)^2 : (GM)^2$; esto es, $2t : p :: tt - ss + \frac{2esx}{m} - \frac{eexx}{mm} : yy - \frac{2n}{m} xy - 2ry + \frac{nn}{mm} xx + \frac{2nr}{m} x + rr = \frac{ptt - pss}{2t} + \frac{2epsx}{2mt} - \frac{eepxx}{2mmt}$. Luego&c.

Si el diámetro $KL = 2t$ y su parámetro $KH = p$ fuesen iguales, sería siempre $(GM)^2 = LG \times GK$; y por consiguiente si fuese recto el ángulo CGM, la elipse sería entónces un círculo cuyo diámetro sería la linea KL.

253 Es evidente que en esta fórmula están siempre los quadrados yy y xx con unos mismos signos, y que quando está tambien el rectángulo xy, el quadrado $\frac{nn}{mm}$ de la mitad de la fraccion $\frac{2n}{m}$ que multiplica dicho rectángulo, ha de ser menor que la fraccion $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$ que multiplica el quadrado xx.

254 En virtud de esto será facil construir el lugar de una equacion dada, en la qual estén los dos quadrados xx é yy con los mismos signos sin el rectángulo xy, ó con él, de modo que el quadrado de la mitad de la fraccion que le multiplica, sea menor que la fraccion que multiplica el quadrado xx. En todo esto suponemos que esté sin fraccion el quadrado yy.

Pa-

Para cuyo fin se cotejarán los términos de la equacion propuesta con sus homólogos en la fórmula general (252), de cuyo cotejo se sacarán los valores de las cantidades m, n, p, r, s, t, y con ellos se trazará conforme hemos dicho (252), y teniendo presente lo prevenido (241), una elipse que será el lugar de la equacion propuesta. Fig. 109

255 Cuestion I. *Hallar el lugar de la equacion* $yy + xy + \frac{1}{2}xx - 2ay + bx + cc$, *en la qual el quadrado de* $\frac{1}{2}$ *mitad de la fraccion* $\frac{1}{1}$ ó 1 *que multiplica* xy, *es menor que la fraccion* $\frac{1}{2}$ *que multiplica* xx.

De la comparacion de los términos de la fórmula con sus homólogos en la propuesta, sacaremos 1.° $\frac{2n}{m} = -1$; porque como no hay en este caso fraccion alguna literal que multiplique el rectángulo xy, le podemos considerar como multiplicado por la unidad, y por consiguiente si hacemos $m = a$, tendremos $n = -\frac{1}{2}a$. 2.° $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = \frac{1}{2}$, de donde sacaremos $\frac{p}{t} = \frac{mm-2nn}{ee} = \frac{aa}{2ee}$, substituyendo en lugar de m y n sus valores respectivos a, $-\frac{1}{2}a$; y por consiguiente $p = \frac{aat}{2ee}$. 3.° $r = a$. 4.° $\frac{2nr}{m} - \frac{2eps}{2mt} = b$, y substituyendo en lugar de $m, n, r, \frac{p}{t}$ sus valores respectivos a, $-\frac{1}{2}a$, a, $\frac{aa}{2ee}$, sale $s = \frac{-2ae-2eb}{a}$. 5.° $rr - \frac{ptt}{2t} + \frac{pss}{2t} = cc$, y por lo mismo $tt = ss + \frac{2trr}{p} - \frac{2tcc}{p} = ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa}$, despues de substituido en lugar de $\frac{p}{t}$, r sus valores $\frac{aa}{2ee}$, a, que hemos hallado. Una vez hallados por este camino los valores $m, n, r, s, p, t,$ se trazará la elipse imitando la construccion dada (252), y tenien-

Fig. do presente lo prevenido (241), del modo siguiente.
109. En la linea AP se tomará la parte $AB = m = a$, y tirando paralelamente á PM y del mismo lado la $AD = r = a$, y del lado opuesto la recta $BE = \frac{1}{2}a = -n$, porque $n = -\frac{1}{2}a$ que es un valor negativo; se tirará por el punto A la recta $AE = e$, que es dada, y por el punto D la recta DG paralela á AE, en la qual se tomará la parte $DC = \frac{2ae+2be}{a} = -s$ del lado opuesto á PM; y al uno y otro lado del punto C, las partes CK, CL cada una igual á $t = \sqrt{(ss + 4ee - \frac{4ccee}{aa})}$. Se trazará despues una elipse (218) con el diámetro LK, cuyas ordenadas sean rectas paralelas á PM, y cuyo parámetro sea la linea $KH = p = \frac{aat}{2ee}$. Su porcion OMR que está dentro del ángulo PAD, será el lugar de la equacion propuesta.

Porque si por uno de sus puntos M, sea el que fuere, tiramos la linea PM que forme con AP el ángulo dado ú arbitrario APM, y que encuentre las paralelas AE, DG en los puntos F, G; serán semejantes los triángulos ABE, APF. Tendremos pues $AB : AE :: AP : AF$ ó DG, esto es, $a : e :: x : DG = \frac{ex}{a}$; y $AB : BE :: AP : PF$, ó $a : \frac{1}{2}a :: x : PF = \frac{1}{2}x$. Por consiguiente $GM = y + \frac{1}{2}x - a$, y CG ó $DG + DC = \frac{ex}{a} - s$, por ser $DC = -s$. Pero la propiedad de la elipse (112 y 93) dá $KL : KH :: LG \times GK$ ó $(CK)^2 - (CG)^2 : (GM)^2$, esto es $2t : \frac{aat}{2ee} :: tt - ss + \frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa} : yy + xy - 2ay + \frac{1}{2}xx - ax + aa$. Si en lugar de $tt - ss$ y s substituimos sus valores respectivos $4ee - \frac{4ccee}{aa}$ y $-\frac{2ae-2be}{a}$, multiplicamos

des-

despues los estremos y los medios, y dividimos ambos productos por $2t$, sacaremos la misma equacion propuesta. Fig.

256 Si acaso $ss + 4ee$ fuese igual ó menor que $\frac{4ccee}{aa}$, el valor de t sería nulo ó imaginario, y sería imposible trazar la elipse que debería ser el lugar de la equacion propuesta. Y como dicha equacion incluiría por precision algun absurdo, se sigue que ninguna linea podría ser su lugar; quiero decir que todos los valores de la incógnita y, que deberían corresponder á todos los valores positivos y negativos de la otra incógnita x, serían todos imaginarios.

Esto lo hace patente la fórmula (252) general, porque trasladando algunos términos, se transforma en $yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr = \frac{ptt - pss}{2t} + \frac{2pesx}{2mt} - \frac{eepxx}{2mmt}$, en cuya equacion el primer miembro es el quadrado de $y - \frac{n}{m}x - r$; y el segundo es el quadrado de t menos el quadrado de $s - \frac{ex}{m}$, multiplicado por la fraccion $\frac{p}{2t}$. Es evidente que si el valor del quadrado tt fuere nulo ó negativo, será negativo el valor del espresado segundo miembro, y por consiguiente en ambos casos tendremos un quadrado, esto es, el primer miembro igual á un valor negativo, que es una contradiccion manifiesta.

257 Cuestion II. *Construir el lugar de la equacion* $\mathrm{yy} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{xy} + \mathrm{xx} + \mathrm{cy} + \mathrm{fx} - \mathrm{ag} = 0$; *en el supuesto* (253) *de ser* $\frac{\mathrm{bb}}{4\mathrm{aa}}$ *menor que la fraccion* $\frac{1}{1}$ *ó* 1 *que multiplica* xx, *esto es, de ser* b *menor que* 2a.

De la comparacion de los términos de la propuesta con sus homólogos en la fórmula general (252), sacare-

Fig. mos 1.° $\frac{2n}{m} = -\frac{b}{a}$; y haciendo $m = a$, sacaremos $n = -\frac{1}{2}b$. 2.° $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = 1$; y substituyendo en lugar de m y n sus valores a y $-\frac{1}{2}b$, sacaremos $\frac{p}{t} = \frac{4aa-bb}{2ee}$, y $p = \frac{4aat-bbt}{2ee}$. 3.° $r = -\frac{1}{2}c$. 4.° $s = \frac{bce-2afe}{4aa-bb}$. 5.° $t = \sqrt{\left(ss + \frac{ccee+4agee}{4aa-bb}\right)}$, de donde sacaremos la siguiente construccion.

110. En la linea recta indefinita AP tomaremos la parte $AB = m = a$, y tiraremos paralelamente á PM, y del lado opuesto las rectas $BE = \frac{1}{2}b = -n$, $AD = \frac{1}{2}c = -r$; por el punto A tiraremos la recta $AE = e$, que es dada, y por el punto D la recta DG paralela á AE, en la qual tomaremos la parte $DC = s = \frac{bce-2afe}{4aa-bb}$ del mismo lado que PM, si fuere bc mayor que $2af$, conforme suponemos; y del otro lado, si fuese menor; tomaremos despues al uno y otro lado del punto C, las partes CK y CL igual cada una de ellas á $t = \sqrt{\left(ss + \frac{ccee+4agee}{4aa-bb}\right)}$. Hecho esto, trazaremos (218) una elipse con el diámetro $LK = 2t$, cuyas ordenadas sean rectas paralelas á PM, y el parámetro una linea $KH = p = \frac{4aat-bbt}{2ee}$. Su porcion OR será el lugar de la equacion propuesta.

Porque si por uno qualquiera de sus puntos M tiramos la recta MP que forme con AP el ángulo dado ú arbitrario APM, y que encuentre las paralelas AE, LK en los puntos F, G; será $PF = \frac{bx}{2a}$, y AF ó $DG = \frac{ex}{a}$; será pues $MG = MP + PF + FG = y + \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$, y $CG = \frac{ex}{a} - s$, ó $s - \frac{ex}{a}$. Pero la propiedad de la elipse es que $LK : KH :: LG \times GK : (GM)^2$ ó $2t : \frac{4aat-bbt}{2ee} :: tt - ss +$

$\frac{2esx}{a}$

$\frac{2esx}{a} - \frac{eexx}{aa} : yy + \frac{b}{a}xy + cy + \frac{bbxx}{4aa} + \frac{bc}{2a}x + \frac{1}{4}cc$. Si en lugar de $tt - ss$, y s substituimos sus valores respectivos $\frac{ccee + 4agee}{4aa - bb}$ y $\frac{bce - 2afe}{4aa - bb}$, multiplicamos despues los estremos y medios, y dividimos por $2t$, resultará la equacion propuesta. Fig.

Si el ángulo AEB fuese recto, el ángulo CGM lo sería tambien; y el diámetro $LK = 2t$ sería igual al parámetro $KH = \frac{4aat - bbt}{2ee}$, pues $ee = aa - \frac{1}{4}bb$, por ser rectángulo el triángulo AEB. En este caso la elipse sería un círculo, cuyo radio sería la recta CK ó $CL = t = \sqrt{(ss + \frac{1}{4}cc + ag)}$, y $DC = s = \frac{bc - 2af}{4e}$, con lo que sería mucho mas sencilla la construccion.

258 Cuestion III. *Hallar el lugar de la equacion* $yy + xx - ax = 0$.

De la comparacion de los términos de la propuesta con sus homólogos en la fórmula general (252), sacaremos 1.° $\frac{2n}{m} = 0$, pues una vez que no está el término xy, le hemos de suponer multiplicado por cero; de donde sacaremos $n = 0$, y por lo mismo $m = e$. 2.° $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = 1$, esto es $\frac{p}{2t} = 1$, despues de substituidos en lugar de m y n sus valores 0 y e, y finalmente $p = 2t$. 3.° $r = 0$, porque una vez que en la propuesta no está la primera potencia de la incógnita y, la hemos de suponer multiplicada por cero; por lo que, si borramos en la fórmula general (252) todos los términos que llevan $\frac{n}{m}$ y r, y substituimos en lugar de e y $\frac{p}{2t}$ sus valores m y 1, se transformará en estotra $yy + xx - 2sx - tt + ss = 0$, cuyos términos hemos de co-

Fig. cotejar con los de la propuesta. 4° $2s = a$, y $s = \frac{1}{2}a$. 5.° $ss - tt = 0$, porque no tiene la propuesta término alguno enteramente conocido, y por lo mismo $tt = ss = \frac{1}{4}aa$, y sacando la raiz quadrada, $t = \frac{1}{2}a$. Una vez determinados estos valores, construiremos la elipse practicando lo que sigue.

111. Ya que $BE = n = 0$, AE coincide con AP, que tambien coincide con DG, por ser tambien $AD = r = 0$; por manera que el punto D coincide con el punto A. Por cuyo motivo tomaremos en la AP la parte $AC = s = \frac{1}{2}a$ del lado de PM; y al uno y otro lado del punto C, las partes CK, CL cada una igual á $t = \frac{1}{2}a$ (en el caso actual el punto L coincide con A); trazaremos despues con el diámetro AK (218), cuyas ordenadas sean rectas paralelas á PM, y cuyo parámetro sea la linea $KH = p = 2t = a$, una elipse que será el lugar de la equacion propuesta.

Porque si por uno qualquiera M de sus dos puntos tiramos la recta MP, que forme con AP el ángulo dado ó arbitrario APM, tendremos (112 y 93) $AK : KH :: AP \times PK : (PM)^2$, esto es, $a : a :: ax - xx : yy$. De donde sale $yy + xx - ax = 0$.

Se viene á los ojos que si el ángulo APM fuese recto, la elipse sería un círculo cuyo diámetro seria la linea $AK = a$.

259 Hay dos casos en que el lugar de la equacion propuesta es un círculo.

1.° Quando ambos quadrados xx é yy están con los mis-

mismos signos, y sin quebrados en la equacion, que tambien lleva el rectángulo xy, siendo al mismo tiempo recto el ángulo AEB. Esto sucede quando tirando AF perpendicular á PM, la razon entre PF y AP, que es la misma que hay entre BE y AB, tiene por esponente la mitad de la fraccion que multiplica el rectángulo xy. El lugar de la equacion será en este caso un círculo, conforme hemos visto (254), y la misma fórmula general está diciendo el por qué. Fig.

Porque de la comparacion de los términos homólogos que llevan el quadrado xx, sacaremos esta equacion $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt} = 1$; de donde saldrá $\frac{p}{2t} = \frac{mm-nn}{ee} = 1$, porque el triángulo rectángulo AEB dá $mm = nn + ee$. Pero una vez que el ángulo AEB es recto, el ángulo CGM que forma el diámetro LK con sus ordenadas, será tambien recto; y por consiguiente por ser el diámetro LK igual á su parámetro KH, se infiere que la elipse será en este caso un círculo.

2.° Quando los quadrados xx é yy están ambos en la propuesta con los mismos signos, y sin fraccion en la equacion que no lleva el rectángulo xy, siendo al mismo tiempo recto el ángulo APM, su lugar siempre será un círculo, conforme hemos visto (258), y se prueba por la misma fórmula general.

Porque una vez que el rectángulo xy no está en la equacion propuesta, la fraccion $\frac{2n}{m}$ de la fórmula será nula ó cero, y por lo mismo $BE = n = 0$, y $m = e$. De donde resulta 1.° que el diámetro LK es paralelo á la linea

AP,

Fig. AP, y que por consiguiente siendo el ángulo CGM, que forma con sus ordenadas, igual al ángulo APM, será recto. 2.° Que la fraccion $\frac{nn}{mm} + \frac{eep}{2mmt}$ que multiplica el quadrado xx en la fórmula, será $\frac{p}{2t}$, y será por lo mismo $\frac{p}{2t} = 1$; quiero decir, que el diámetro LK será igual á su parámetro KH. La elipse que es el lugar de la equacion propuesta, será por consiguiente un círculo en este caso. Y como entonces la fórmula general se transforma en estotra

$$\left.\begin{array}{r} yy + xx - 2ry - 2sx + rr \\ - tt \\ + ss \end{array}\right\} = 0;$$

se podrá, si se quisiere abreviar este cálculo, hacer uso de esta fórmula para hallar en virtud del cotejo de sus términos con los de la propuesta, los valores de r, s, t, que sirven para trazar el círculo, que será su lugar.

De los Lugares pertenecientes á la hypérbola referida á sus diámetros.

260 Suponiendo lo mismo que para la elipse (252),
112. con el diámetro $LK = 2t$, cuyo parámetro sea $KH = p$,
113. y las ordenadas sean rectas paralelas á PM, trazaremos (218) una hypérbola ó dos hypérbolas opuestas. Su porcion MO, ó sus porciones comprehendidas dentro del ángulo PAD que forma la linea AP con la linea AD, tirada por el punto fijo A paralelamente á PM y del mismo lado, será el lugar de esta fórmula ó equacion general

$$\left.\begin{array}{l} yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr \\ \quad - \frac{eep}{2mmt} \qquad\qquad + \frac{2eps}{2mt} \pm \frac{ptt}{2t} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{pss}{2t} \end{array}\right\} = 0$$ Fig.

en la qual será $+\frac{ptt}{2t}$ quando el diámetro LK fuere un primer diámetro, y $-\frac{ptt}{2t}$ quando fuere un segundo diámetro.

Porque si por uno qualquiera M de sus puntos tiramos la linea MP que forme con AP el ángulo dado ó arbitrario APM, y que encuentre las paralelas AE, DG en los puntos F, G; tendremos por la propiedad de la hypérbola (149 y 191) $KL : KH\,(CG)^2 \pm (CK)^2 : (GM)^2$, esto es, $2t : p :: \frac{eexx}{mm} - \frac{2esx}{m} + ss \pm tt : \frac{peexx}{2mmt} - \frac{2epsx}{2mt} + \frac{pss}{2t} \pm \frac{ptt}{2t} = yy - \frac{2n}{m}xy - 2ry + \frac{nn}{mm}xx + \frac{2nr}{m}x + rr$. Luego &c.

Si el diámetro $KL = 2t$, y su parámetro $KH = p$ fuesen iguales, la hypérbola será equilátera.

261 Se infiere de lo que acabamos de decir 1.° que los dos quadrados xx é yy están siempre con signos diferentes en esta fórmula, quando no lleva el rectángulo xy; ó quando está dicho rectángulo, siendo $\frac{eep}{2mmt}$ mayor que $\frac{nn}{mm}$. 2.° que pueden estar con los mismos signos, pero con la condicion de que esté el rectángulo xy, y que el quadrado $\frac{nn}{mm}$ de la mitad de la fraccion que le multiplica, sea mayor que la fraccion $\frac{nn}{mm} - \frac{eep}{2mmt}$ que multiplica el quadrado xx.

262 En virtud de esto se podrá construir el lugar de una equacion dada en que esten ambos quadrados xx é yy con signos diferentes, ó con los mismos signos, con tal que esté el rectángulo xy, y que el quadrado de la mitad de la fraccion que le multiplica, sea mayor que la fraccion

Fig. cion que multiplica el quadrado xx. Tambien suponemos que el quadrado yy esté sin fracciones, conforme manifestarémos en los egemplos.

263 Cuestion I. *Hallar el lugar de la equacion* $yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{f}{a}xx + 2cy - 2gx - hh = 0$, *en el supuesto de ser el quadrado* $\frac{bb}{aa}$ *mayor que* $\frac{f}{a}$.

De la comparacion de los términos homólogos de la propuesta con los de la fórmula general, sacaremos 1.° $\frac{2n}{m} = -\frac{2b}{a}$, y por consiguiente, si hacemos $m = a$, tendremos $n = -b$. 2.° $\frac{eep}{2mmt} - \frac{nn}{mm} = -\frac{f}{a}$, luego $\frac{p}{2t} = \frac{bb-af}{ee}$, y $p = \frac{2bbt-2aft}{ee}$. 3.° $r = -c$. 4.° $\frac{2nr}{m} + \frac{2eps}{2mt} = -2g$, y substituyendo en lugar de $m, n, r, \frac{p}{2t}$ sus valores respectivos que acabamos de hallar, sacaremos $s = \frac{-bce-age}{bb-af}$. 5.° $\mp tt = ss - \frac{2rrt-2hht}{p} = ss - \frac{eecc-eehh}{bb-af}$, es á saber $+tt$ quando el quadrado ss es mayor que $\frac{eecc-eehh}{bb-af}$, y $-tt$ quando es menor, porque el quadrado tt ha de ser positivo; estos dos casos son distintos. Una vez determinados los valores de m, n, r, s, t, p, construiremos el lugar, imitando lo que practicamos antes (260).

114. Tomaremos en la linea AP la parte $AB = a$, y tira-
115. remos paralelamente á PM y del lado opuesto las rectas $BE = b = -n$, $AD = c = -r$; por los puntos A, E tiraremos la recta $AE = e$, que es dada, y por el punto D la recta indefinita DG paralela á AE, en la qual tomaremos la parte $DC = \frac{eag+ebc}{bb-af} = -s$ del lado opuesto á PM, y al uno y otro lado del punto C las partes CL, CK igual cada una de ellas á $t = \sqrt{\left(ss - \frac{eecc-eehh}{bb-af}\right)}$ ó $\sqrt{\left(\frac{eecc+eehh}{bb-af} - ss\right)}$, se-

gun

gun fuere ss mayor ó menor que $\frac{eecc+eehh}{bb-af}$. Hecho esto, con Fig.
el diámetro LK, cuyas ordenadas sean rectas paralelas á PM, y cuyo parámetro sea la linea $KH = p = \frac{2bbt-2aft}{ee}$, trazaremos una hypérbola; previniendo que LK ha de ser un pri- 114.
mer diámetro en el primer caso, y un segundo diámetro en 115.
el segundo caso; la porcion OM de la espresada hypérbola, será el lugar de la equacion propuesta.

Porque si por uno qualquiera M de sus puntos tiramos una paralela PM á la AD, que encuentre las lineas AB, AE, DG en los puntos P, F, G; será $PF = \frac{bx}{a}$, y $AF = DG = \frac{ex}{a}$, y por consiguiente $MG = y + \frac{bx}{a} + c$, CG ó $DG + CD = \frac{ex}{a} - s$, por ser $CD = -s$. Pero la propiedad de la hypérbola dá $LK : KH :: (CG)^2 \pm (CK)^2 : (GM)^2$, esto es, $2t : \frac{2bbt-2aft}{ee} :: \frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \pm tt : yy + \frac{2b}{a}xy + 2cy + \frac{bb}{aa}xx + \frac{2bc}{a}x + cc$; y si en lugar de $ss \pm tt$ y s substituimos sus valores respectivos $\frac{ccee+eehh}{bb-af}$ y $\frac{-bce-age}{bb-af}$, multiplicamos despues los estremos y los medios, y dividimos por $2t$, sacaremos la misma equacion propuesta.

264 Si acaso $ss = \frac{ccee-eehh}{bb-af}$, el valor de tt será cero, y será imposible la construccion de la hypérbola. Pero en este caso la equacion propuesta bajará siempre de grado; por manera que su lugar no será yá, como debiera, una ó dos hypérbolas opuestas, sino una ó dos lineas rectas. Con efecto en el egemplo propuesto hemos reducido la equacion propuesta á esta proporcion $ee : bb - af :: \frac{eexx}{aa} - \frac{2esx}{a} + ss \pm tt : yy + \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}xx + 2cy + \frac{2bc}{a}x + cc$; de lo que, borrando tt que es nulo, multiplicando los estremos y los me-

dios,

Fig. dios, y sacando de cada miembro la raiz quadrada, resultará $ey + \frac{ebx}{a} + ec = \left(\frac{ex}{a} - s\right) \times \sqrt{(bb - af)}$; y substituyendo en lugar de $-s$ su valor $\frac{bce + age}{bb - af}$, y dividiendo ambos miembros por e, se sacará esta equacion $y + \frac{bx}{a} + c = \frac{x\sqrt{(bb - af)}}{a} + \frac{ag + bc}{\sqrt{(bb - af)}}$, ó $y = \frac{-b + \sqrt{(bb - af)}}{a} x + \frac{ag + bc}{\sqrt{(bb - af)}} - c$, que con hacer $\frac{n}{m} = \frac{b - \sqrt{(bb - af)}}{a}$, y $p = \frac{ag + bc}{\sqrt{(bb - af)}} - c$, se transforma en estotra $y = p - \frac{n}{m}x$, cuyo lugar es una linea recta por lo dicho (29).

La razon de esto se saca facilísimamente de la misma fórmula general; porque si en la espresada fórmula general borramos el término $\pm \frac{ptt}{2t}$ en que está el quadrado tt, que suponemos $= 0$, se transformará, con trasladar algunos términos, y sacar la raiz quadrada, en estotra $y - \frac{n}{m}x - r = \left(\frac{ex}{m} - s\right) \sqrt{\frac{p}{2t}}$ ó $\left(s - \frac{ex}{m}\right) \sqrt{\frac{p}{2t}}$ que no lleva mas que potencias lineares de las incógnitas x é y, y cuyo lugar será por consiguiente lineas rectas.

265 Cuestion II. *Trazar el lugar de la equacion* $yy - xx + 2ay + ax = 0$.

De la comparacion de los términos homólogos sacaremos 1.° $\frac{2n}{m} = 0$, porque falta el término xy; luego $n = 0$, y por consiguiente $m = e$. 2.° $\frac{p}{2t} = 1$; luego $p = 2t$. 3.° $r = -a$. 4.° $\frac{2ps}{2t} = a$, y $s = \frac{1}{2}a$. 5.° $rr \mp \frac{ptt}{2t} - \frac{pss}{2t} = 0$, y por tanto $\mp tt = ss - \frac{2rrt}{p} = -\frac{3}{4}aa$, con substituir en lugar de r, $\frac{2t}{p}$, s sus valores respectivos $-a$, 1, $\frac{1}{2}a$; de donde inferiremos que en el último término de la fórmula se ha de tomar $-tt$, y no $+tt$, para que el valor de tt sea positivo. Construiremos el lugar como sigue.

Ya

Ya que $AD = r = -a$, tiraremos por el punto A paralelamente á PM, y al lado opuesto la linea $AD = a$; y como $BE = n = 0$, tiraremos por el punto D la recta DG paralela á AP, en la qual tomaremos la parte $DC = s = \frac{1}{2}a$ del mismo lado de PM, y al uno y otro lado del punto C las partes CL, CK cada una igual á $t = \sqrt{\frac{3}{4}aa}$. Despues con el segundo diámetro LK, porque hemos tomado $-tt$ en el último término de la fórmula, cuyas ordenadas sean rectas paralelas á PM, y el parámetro sea la recta $KH = p = 2t = LK$, trazaremos una hypérbola, cuya porcion OM será el lugar de la equacion propuesta. Fig. 116.

Porque si por uno qualquiera M de sus puntos tiramos una paralela MP á AD, que encuentre las rectas AP, DG en los puntos P, G; tendremos $MG = y + a$, CG ó $DG - DC = x - \frac{1}{2}a$, y por la propiedad de la hypérbola $LK : KH :: (CG)^2 + (CK)^2 : (GM)^2$, esto es $2t : 2t :: xx - ax + \frac{1}{4}aa + tt : yy + 2ay + aa$, que se transforma en la equacion propuesta con substituir $\frac{3}{4}aa$ en lugar de tt. Es patente que la hypérbola es equilátera.

266 Acerca de esta construccion hemos de considerar que quando los dos quadrados xx é yy se hallan con distintos signos y sin fraccion en una equacion en que no está el rectángulo xy; su lugar siempre será una hypérbola equilátera. Porque la fraccion $\frac{2n}{m}$ de la fórmula será nula ó cero, y por consiguiente $BE = n = 0$, y $m = e$. Luego la fraccion $\frac{nn}{mm} - \frac{eep}{2mmt}$ que multiplica el quadrado xx en la fórmula llega á ser $-\frac{p}{2t}$, y será $-\frac{p}{2t} = 1$; quiero decir, que

el

Fig. el diámetro LK será igual á su parámetro KH, ó lo que es lo propio, la hypérbola será equilátera. Y como en este caso la fórmula general se tranforma en estotra

$$\left.\begin{array}{r} yy - xx - 2ry + 2sx + rr \\ \mp tt \\ - ss \end{array}\right\} = 0$$

podrá servir para hallar los valores de r, s, t, estos servirán para trazar la hypérbola equilátera, que será el lugar de la equacion propuesta; con lo que se abreviará el cálculo.

De los Lugares que pertenecen á la hypérbola comparada con sus asýmtotas.

267 Formemos con las dos lineas $AP = x, PM = y$ un ángulo arbitrario APM, y supongamos que $m, n, p\,r, s$ representen lineas rectas dadas.

1.° Tomarémos en la linea AP la parte $AB = m$; y
117. despues de tiradas las rectas $BE = n$, $AD = r$, paralelas á PM y del mismo lado; tiraremos por el punto A la recta dada $AE = e$, y por el punto D la recta indefinita DG paralela á AE, y tomando en ella las partes $DC = s$, $CK = e$ ácia el lado que coge AP, tirarémos paralelamente á PM y del mismo lado la recta indefinita CL, y la $KH = p$. Hecho esto, trazarémos (210 y 211) entre las asýmtotas CL, CK una hypérbola que pase por el punto H, y será el lugar de la fórmula siguiente

$$\left.\begin{array}{r} xy - \frac{n}{m}xx - \frac{ms}{e}y + \frac{ns}{e}x + \frac{mrs}{e} \\ - rx - mp \end{array}\right\} = 0.$$

Por-

Porque $GM = y - \frac{nx}{m} - r$, $CG = \frac{ex}{m} - s$, y la Fig.
propiedad de la hypérbola (171) dará $CG \times GM = CK \times KH$ ó $\frac{exy}{m} - sy - \frac{enxx}{mm} + \frac{nsx}{m} - \frac{erx}{m} + rs = ep$; de donde sacarémos, despejando el término xy, y escribiendo en orden los demás términos, la misma fórmula.

2.° Por el punto fijo A tirarémos una linea indefi- 118.
nita AQ paralela á PM y del mismo lado que ella; y despues de tomada en dicha linea la parte $AB = m$, tirarémos $BE = n$ paralela á AP y del mismo lado, y por los puntos indeterminados A, E la linea AE, que llamarémos e; tomarémos en la AP la parte $AD = r$ del mismo lado de PM; tirarémos la recta indefinita DG paralela á AE, en la qual tomarémos las partes $DC = s$, $CK = e$ del lado que coge PM, y tirarémos paralelamente á AP y del mismo lado, la recta indefinita CL, y la $KH = p$. Trazarémos finalmente (210 y 211) entre las asýmtotas CL, CK una hypérbola que pasará por el punto H, y será el lugar de la fórmula siguiente

$$xy - \frac{n}{m}yy - \frac{ms}{e}x + \frac{ns}{e}y + \frac{mrs}{e} = 0$$
$$- ry - mp.$$

Porque si desde uno qualquiera M de sus puntos, tiramos la MQ paralela á AP, y que encuentre las paralelas AE, DG en los puntos F, G; los triángulos semejantes ABE, AQF darán $AB : AE :: AQ$ ó $PM : AF$ ó DG, esto es, $m : e :: y : DG = \frac{ey}{m}$; y $AB : BE :: AQ : QF$, esto es, $m : n :: y : QF = \frac{ny}{m}$. Luego $GM = x - \frac{ny}{m} - r$, $CG = \frac{ey}{m} - s$. Y como por la propiedad de la hypérbo-

Fig. la $CG \times GM = CK \times KH$, sacarémos la misma fórmula con substituir en lugar de las lineas sus valores analyticos, y despejar el término xy.

268 Se echa de ver 1.° que el término xy nunca falta en ninguna de las dos fórmulas (267); porque como no está multiplicado por fraccion ninguna, no se la puede suponer nula para conseguir que desaparezca xy. 2.° Que no pueden llevar mas que el uno de los quadrados xx ó yy, que se desaparecerá quando fuere nula la fraccion $\frac{n}{m}$ que le multiplica.

269 Ya podremos hallar el lugar de toda equacion que llevare el rectángulo xy, y ninguno de los dos quadrados xx é yy, ó no mas que el uno de ellos.

Para conseguirlo, despejarémos la cantidad xy, y cotejarémos los términos de la equacion propuesta con sus correspondientes en la primera fórmula, quando llevare el quadrado xx, y con los de la segunda, si llevare el quadrado yy, y con los términos de qualquiera de las dos fórmulas á arbitrio, quando no llevare ni xx ni yy. Del cotejo de los términos homólogos inferirémos los valores de las cantidades m, n, p, r, s, que servirán para trazar una hypérbola entre sus asýmtotas conforme hemos hecho poco há (267), teniendo presente que se habrán de tomar en lados opuestos á AP ó PM las lineas cuyos valores fueren negativos.

270 Cuestion I. ¿*Qual es el lugar de la equacion* $xy - \frac{b}{a} xx - cy = 0$?

Por

Por llevar la propuesta el quadrado xx, cotejo sus términos con los de la primera fórmula, y saco 1.° $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$, y si hago $m = a$, sacaré $n = b$. 2.° $\frac{ms}{e} = c$; luego $s = \frac{ec}{a}$. 3.° $\frac{ns}{e} - r = 0$, porque en la propuesta no está la primera potencia de x, y por consiguiente $r = \frac{bc}{a}$. 4.° $\frac{mrs}{e} - mp = 0$, porque no hay en la propuesta ningun término constante; luego $p = \frac{rs}{e} = \frac{bcc}{aa}$. Y como los valores de $AP = m$, $BE = n$, $CD = s$, $AD = r$, $KH = p$ son todos positivos, construyo el lugar del mismo modo que antes (267). Fig.

Porque $GM = y - \frac{bx}{a} - \frac{bc}{a}$, CG ó $DG - DC = \frac{ex - ec}{a}$, y por la propiedad de la hypérbola será $CG \times GM = CK \times KH$, que será la misma equacion propuesta, si substituimos en lugar de las lineas sus valores analýticos. 117.

271 Cuestion II. *Construir el lugar de la equacion* $xy + \frac{b}{a} yy - cy - ff = 0$.

Por llevar esta equacion el quadrado yy, me valdré de la segunda fórmula; y de la comparacion de los términos homólogos sacaré 1.° $\frac{n}{m} = -\frac{b}{a}$, y si hago $m = a$, tendré $n = -b$. 2.° $\frac{ms}{e} = 0$, y $s = 0$. 3.° $r = c$. 4.° $mp = ff$, y $p = \frac{ff}{a}$; de donde inferiré la siguiente construccion.

Por el punto fijo A tiraré una linea indefinita AQ paralela á PM y del mismo lado que ella; y despues de tomada en dicha linea la parte $AB = m = a$, tiraré $BE = b = -n$ paralela á AP y al otro lado, y por los puntos A, E la linea $AE = e$. Tomaré en la AP la par- 119.

 te

Fig. te $AD = r = c$ del mismo lado que PM, y tiraré la recta indefinita DG paralela á AE, y porque coinciden uno con otro los puntos C, D, por ser $CD = s = 0$, tomo en dicha linea la parte $DK = e$ del lado que coge PM, y despues de tiradas paralelamente á AP y del mismo lado la linea $KH = p = \frac{ff}{a}$, y la recta indefinita DL, que en el caso actual coincide con AP, trazaré entre las asýmtotas DL, DK una hypérbola que pasará por el punto H, y será el lugar de la propuesta.

Porque si por uno qualquiera M de sus puntos tiro MQ paralela á AP, y que encuentre en los puntos F, G las paralelas AE, DG; será GM ó $MQ + QF - FG = x + \frac{by}{a} - c$, DG ó $AF = \frac{ey}{a}$, y por consiguiente $DG \times GM = \frac{exy}{a} + \frac{ebyy}{aa} - \frac{ecy}{a} = CK \times KH = \frac{eff}{a}$, de donde sacaré la misma equacion propuesta, con despejar la cantidad xy.

272 Si la diéramos á la linea arbitraria $AB = m$ un valor distinto de a, tambien serían otros los valores de $CK = e$, y $KH = p$, pero serían siempre unos mismos los valores del rectángulo $CK \times KH = ep$, y los de las rectas $AD = r$, $CD = s$; porque no hay en su espresion sino las razones $\frac{n}{m}$, $\frac{n}{e}$, $\frac{m}{e}$, que son constantes, porque en el triángulo ABE es dado el ángulo ABE, y es tambien dada la razon $\frac{n}{m} = \frac{b}{a}$ en el caso actual, cuya razon es la que hay entre $AB = m$, y $BE = n$. Y como la hypérbola que ha de pasar por el punto H, será siempre la misma (171), sea la que fuere la magnitud de las li-

neas

neas $CK = e$, y $KH = p$, con tal que no varíe el rectángulo $CK \times KH$; se infiere que se construirá siempre una misma hypérbola, sea el que fuere el valor de la línea $AB = m$. Fig.

273 Cuestion III. *Hallar el lugar de la equacion* $xy - ay + bx + cc = o$.

Por no llevar la propuesta ninguno de los dos quadrados xx é yy, está á nuestro arbitrio valernos de la que quisiéremos de las dos fórmulas generales. Nos valdremos, pues, de la primera, y cotejando sus términos con los de la propuesta, sacaremos 1.° $\frac{n}{m} = o$; luego $n = o$, y $m = e$; haremos $m = a$. 2.° $\frac{ms}{e}$ ó $s = a$. 3.° $r = -b$; pues $\frac{ns}{e} = o$. 4.° $rs - mp = cc$, y $p = -b - \frac{cc}{a}$. Una vez determinados los valores de m, n, r, s, p, construirémos el lugar como sigue.

Por ser $AD = r = -b$, tirarémos paralelamente 120. á PM y del lado opuesto la $AD = b$; y por ser $BE = n = o$, tirarémos la recta indefinita GD paralela á AP, y tomando en esta las partes $DC = s = a$, $CK = e = m = a$ del lado que coge AP, tirarémos la recta indefinita CL, y la $KH = b + \frac{cc}{a} = -p$ paralela á PM y del lado opuesto. Trazarémos despues la hypérbola opuesta á la hypérbola que pasare por el punto H, y tuviere por asýmtotas las rectas CL, CK; su porcion indefinita OM que está dentro del ángulo PAS, que forma la recta indefinita AP con la AS paralela á PM y del mismo lado, será el lugar de la propuesta.

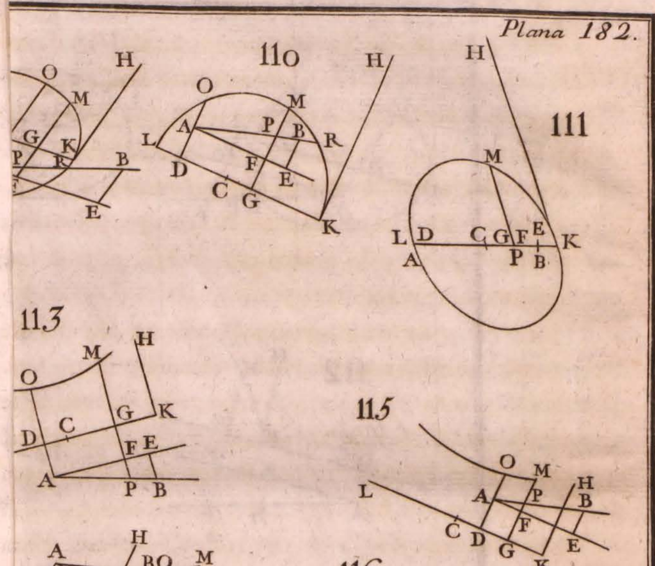
Fig. Porque GM ó $PG + PM = y + b$, y CG ó $CD - DG = a - x$; y por consiguiente $CG \times GM = ay - xy + ab - bx = CK \times KH = ab + cc$, de donde sacaremos la propuesta.

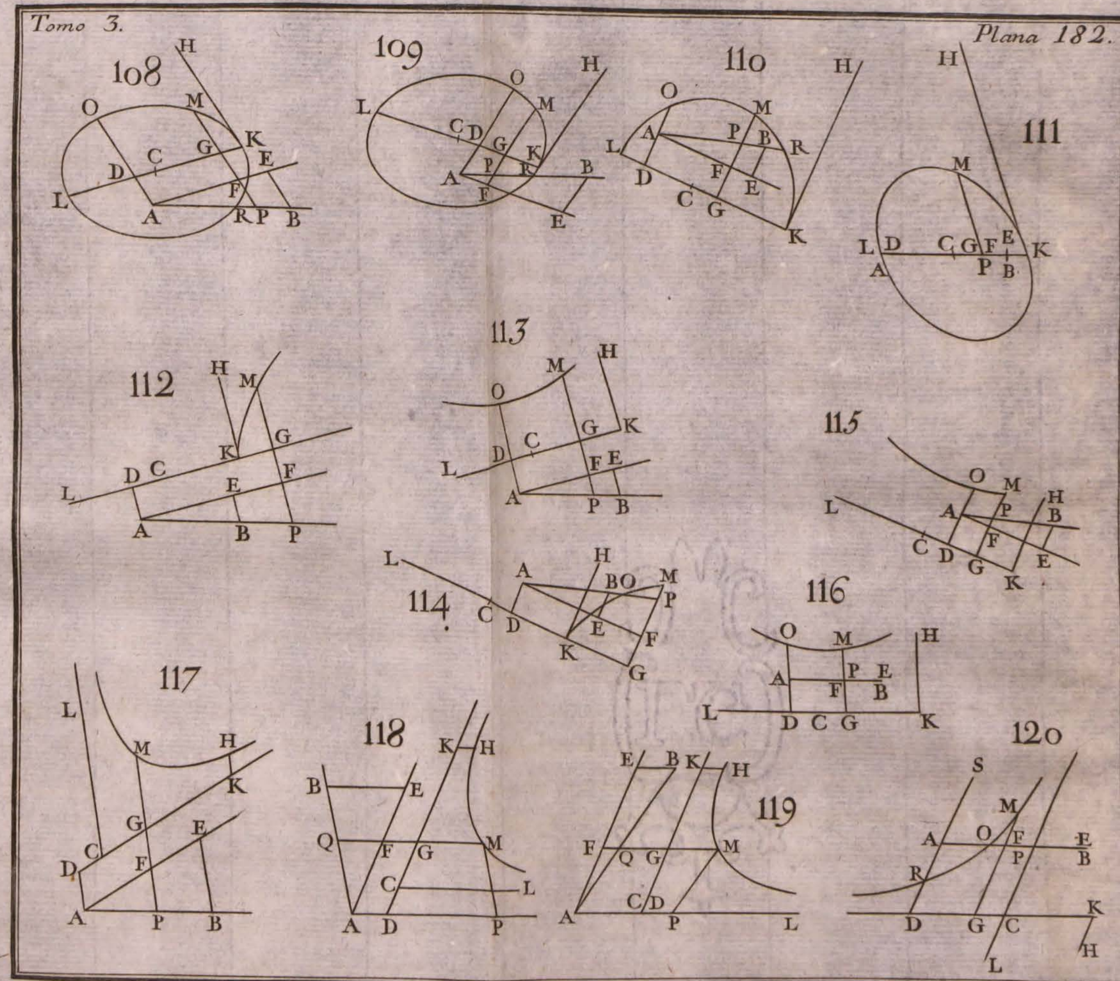
No hubiera servido trazar la hypérbola que pasaría por el punto H; porque ninguno de sus puntos estaría dentro del ángulo PAS, dentro del qual se supone que han de estar los puntos M.

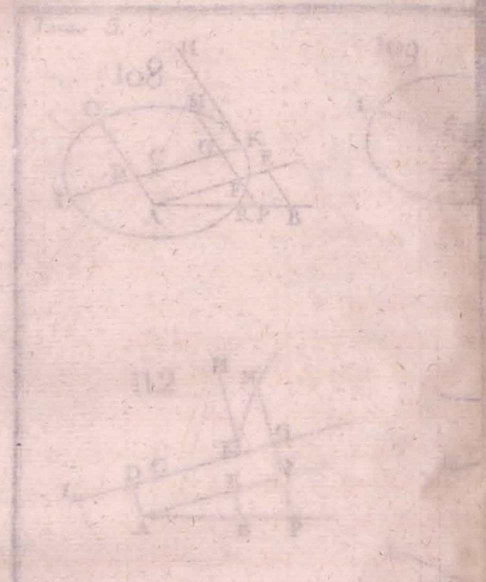
274 Si acaso de la comparacion de los términos de la fórmula con los de la propuesta resultare $p = 0$, sería imposible trazar la hypérbola que debería ser el lugar de la propuesta, pues sería nula su potencia que ha de ser igual al rectángulo pe. Pero en este caso siempre bajaría de grado la equacion, y sería su lugar una linea recta; porque si en la primera fórmula (167), por egemplo, borramos el término mp, se transformará en $xy - \frac{n}{m} xx - \frac{ms}{e} y + \frac{ns}{e} x - rx + \frac{mrs}{e} = 0$, que despues de dividida por $\frac{ex}{m} - s$ se transforma en $y - \frac{nx}{m} - r = 0$, cuyo lugar es (29) una linea recta.

275 Resulta, pues, de todo lo dicho en este asunto que no son mas que dos los casos principales que abraza; el primero es quando la propuesta no lleva la cantidad xy; el segundo es quando se halla xy en la propuesta.

En el primer caso hemos probado 1.° que el lugar será (240) una parábola, quando no hubiere en la propuesta mas que el uno de los dos quadrados yy ó xx. 2.° Si llevare ambos quadrados con el mismo signo, el lu-


Plana 182.
110
111
113
115
116
119
120


108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120


108
112
117
118

lugar será (254) una elipse ó un círculo. 3.º Si lleva- Fig.
re los dos quadrados con signos diferentes, el lugar será (262) una hypérbola ó dos hypérbolas opuestas comparadas con sus diámetros.

En el segundo caso, es á saber, quando la equacion llevare la cantidad xy: 1.º el lugar será (269) una hypérbola entre sus asýmtotas, si no llevare la propuesta ninguno de los dos quadrados xx é yy, ó no mas que el uno. 2.º Si llevare con signos diferentes los dos quadrados yy y xx, el lugar será (262) una hypérbola comparada con sus diámetros. 3.º Si llevare los dos quadrados con unos mismos signos, se desembarazará el quadrado yy de la fraccion que le acompañare, y el lugar será (240) una parábola quando el quadrado de la mitad de la fraccion que multiplicare xy, fuere igual á la fraccion que multiplicare xx; una (254) elipse ó un círculo, si fuere menor; y finalmente (262) una hypérbola ó dos hypérbolas opuestas comparadas con sus diámetros, si fuere mayor.

De la construccion Geométrica de las Equaciones del tercero y quarto grado.

276 Para construir las equaciones que no llevan mas que una incógnita, ó lo que es lo mismo, para hallar sus raices, introducimos en la equacion propuesta una incógnita mas, por manera que de ella se puedan sacar muchas equaciones que lleven todas las incógnitas, y tales

Fig. que haya por lo menos dos qualesquiera de dichas equaciones, que lleven entre las dos todas las cantidades conocidas que hay en la propuesta; porque sin esta circunstancia no sería posible resultase la propuesta de eliminar la nueva incógnita que hubierémos introducido. Despues escogemos entre todas las espresadas equaciones dos las mas sencillas de todas; construimos separadamente sus lugares, y sus puntos de interseccion dán las raices de la propuesta. Pide maña el introducir la nueva incógnita; porque es menester que los lugares que salieren de la propuesta, sean los mas sencillos que sea posible; por egemplo, si la equacion fuere del quarto grado, será indispensable que los lugares de las equaciones que de ella se originaren, no pasen del segundo grado; que entre dichos lugares haya siempre un círculo que es el mas sencillo de todos, y tambien una parábola, una hypérbola equilátera &c. Todo esto lo aclararán las proposiciones que vamos á sentar.

Construccion de las Equaciones del tercero y quarto grado por medio del círculo y de una parábola dada.

277 Propongámonos construir la equacion $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$, siendo x la incógnita, y a, b, c, d, f cantidades dadas; y sea y otra incógnita, tal que su rectángulo por la dada a, sea igual al rectángulo de $x + b$ por x. Sacaremos de este supuesto las equaciones siguientes.

1.ª $ay = xx + bx$, y quadrándola resultará $x^4 +$ Fig.
$2bx^3 + bbxx = aayy$: si en lugar de $x^4 + 2bx^3$ substituimos su valor $aayy - bbxx$ en la propuesta, sacaremos la siguiente equacion

2.ª $yy - \frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0$, y si en esta substituimos en lugar de xx su valor $ay - bx$ que dá la primera equacion; 1.º en $-\frac{bb}{aa}xx$; 2.º en $\frac{c}{a}xx$; 3.º en $-\frac{bb}{aa}xx + \frac{c}{a}xx$, resultarán las tres equaciones siguientes

3.ª $yy - \frac{bb}{a}y + \frac{b^3}{aa}x + \frac{c}{a}xx - dx - af = 0$;

4.ª $yy - \frac{bb}{aa}xx + cy - \frac{bc}{a}x - dx - af = 0$;

5.ª $yy + cy - \frac{bb}{a}y - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$.

Si de la quinta y última equacion restamos la primera $xx + bx - ay = 0$, y despues se la añadimos; resultarán las dos siguientes:

6.ª $yy + cy - \frac{bb}{a}y + ay - xx - bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$;

7.ª $yy + cy - \frac{bb}{a}y - ay + xx + bx - \frac{bc}{a}x + \frac{b^3}{aa}x - dx - af = 0$.

Todo esto sentado, si suponemos que las incógnitas x é y sean dos rectas AP, PM que formen un ángulo qualquiera APM; no hay duda en que el lugar de la primera equacion será (240) una parábola; el de la segunda será una parábola, una elipse, ó una hypérbola, segun fuere bb igual, menor, ó mayor que ac; el de la tercera será una elipse que se transformará en círculo (258 y 259) si fuere $c = a$, y el ángulo APM recto; el de la quarta será una hypérbola que será equilátera (265 y 266), si fuere $b = a$; el de la quinta será tambien una parábola; el de la sexta será una hypérbola equilátera; y finalmente el lugar de

121.

la

Fig. la séptima será un círculo, si el ángulo *APM* fuese recto.

278 Si en la propuesta hubiere $-2bx^3$ y no $+2bx^3$, sería preciso mudar en todas las equaciones los signos de todos los términos en que está b con dimension impar; y si faltase el segundo término, se deberian borrar todos los términos que llevaren b. Lo propio diremos de los demás términos de la propuesta acerca de las letras c, d, f que llevan. Pero es de observar que á pesar de todas las variaciones que pueden sobrevenir, el lugar de la primera equacion será una parábola, el de la sexta una hypérbola equilátera, y el de la tercera siempre será un círculo, si fuere recto el ángulo *APM*.

279 Hemos tomado la primera equacion $xx + bx = ay$, y no $xx - bx = ay$, ó $xx = ay$; porque despues de quadrada la equacion $xx + bx = ay$, los dos primeros términos del primer miembro son los mismos que los dos primeros términos de la equacion propuesta $x^4 + 2bx^3$ &c. De donde nace otra equacion cuyo lugar no es mas que del segundo grado, y que combinada de diferentes modos con la primera, sirve para hallar, segun hemos manifestado, otras muchas cuyos lugares no pasan del segundo grado, y se construyen facilmente, porque no llevan la cantidad xy; habiendo siempre entre ellas una, es á saber la última, que representa un círculo, en el supuesto de que forme x con y un ángulo recto.

121. 280 Cuestion I. *Hallar las raices de la equacion propuesta* $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$, *por me-*

medio de un círculo, y de una parábola. Fig.

Supondremos que x é y sean respectivamente dos líneas rectas AP, PM, que formen una con otra un ángulo recto APM; construirémos (240) primero la parábola, que es el lugar de la primera equacion (277), y despues el círculo, que es el lugar de la séptima; sus intersecciones darán los diferentes valores de la incógnita x, que serán las raices de la equacion propuesta.

Para cuyo fin tomarémos en la linea AP prolongada 121.
al otro lado de A, la parte $AD = \frac{1}{2}b$; por el punto D tirarémos una paralela á PM, en la qual tomarémos la parte $DC = \frac{bb}{4a}$ del lado opuesto á PM; y con el ege CD cuyo origen esté en C, y el parámetro sea igual á la dada a, trazarémos una parábola MCM. Hecho esto, tirarémos por el punto fijo A una paralela AQ á PM, en la qual tomarémos la parte $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}c = \mp g$ para abreviar; tirarémos paralelamente á AP la recta $BE = \frac{1}{2}d \pm \frac{bg}{a}$, es á saber, $-\frac{bg}{a}$ quando $AB = +g$, ó quando el valor de AB fuere positivo, y $+\frac{bg}{a}$ quando $AB = -g$; en la inteligencia de que tirarémos las dos lineas AB, BE, del lado de PM quando fuesen positivos sus valores, y del lado opuesto quando fuesen negativos. Llamando finalmente EA, m; trazarémos desde el centro E, y con el radio $EM = \sqrt{(mm + af)}$ un círculo; y tirando desde los puntos M donde dicho círculo corta la parábola, perpendiculares PM á la linea AP, las partes AP de esta linea serán las raices de la propuesta; es á saber, las positivas quando los puntos P

ca-

Fig. cayeren del lado donde hubiéremos supuesto que está PM al
221. tiempo de hacer la construccion, y las negativas quando cayeren del lado opuesto.

Porque si prolongamos MQ paralela á AP, que encuentre el ege CG en L; será ML ó $AP + AD = x + \frac{1}{2}b$; CL ó $MP + DC = y + \frac{bb}{4a}$; y por la propiedad de la parábola tendrémos $(ML)^2 = CL \times a$, esto es, $xx + bx + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb + ay$, ó $xx + bx = ay$, que es la primera equacion (277). Ahora bien, si prolongamos EB hasta que se encuentre con PM en R, y tiramos el radio EM; del triángulo rectángulo ERM sacarémos $(EM)^2 = (ER)^2 + (RM)^2 = (EB)^2 + 2EB \times BR + (BR)^2 + (PM)^2 - 2AB \times PM + (AB)^2 = (EB)^2 + (BA)^2 + af$ por construccion: quiero decir, que borrando en ambos miembros los quadrados $(EB)^2$, $(BA)^2$, y substituyendo en lugar de $2AB$ su valor $a + \frac{bb}{a} - c$, y en lugar de $2BE$ su valor $\frac{2bg}{a} - d$ ó $b + \frac{b^3}{aa} - \frac{bc}{a} - d$, y en lugar de BR ó AP y PM sus valores x é y, sacarémos la séptima equacion $yy + cy - ay - \frac{bb}{a}y + xx + bx + \frac{b^3}{aa}x - \frac{bc}{a}x - dx = af$, y si substituimos en esta en lugar de y su valor $\frac{xx+bx}{a}$, que dá la primera equacion, y en lugar de yy el quadrado de dicho valor, resultará la equacion propuesta $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$. Luego será AP una raiz positiva de la propuesta.

Si tomáramos $-x = AP$, y $-y = PM$, quando estas lineas están en los lados opuestos á los que hemos supuesto al tiempo de hacer la construccion; siempre sacaríamos

mos en virtud de la propiedad de la parábola la primera equacion, y la séptima por medio de la propiedad del círculo. Fig. 121.

281 Es evidente que podremos hacer que la construccion precedente sea general para todas las equaciones del tercero y quarto grado, y que nos valdremos para egecutarla de una parábola, cuyo ege tenga un parámetro igual á una linea dada a; 1.° si multiplicamos por su raiz x la equacion propuesta quando fuese de tercer grado; y tomamos (200 y sig.) una linea $2b$ igual á la suma de todas las que multiplicaren x^3, un rectángulo ac igual á la suma de los que multiplicaren xx, un cubo aad igual á la suma de los que multiplicaren x, y finalmente la cantidad a^3f igual á todos los términos conocidos de la propuesta; 2.° si mudamos en los valores de las lineas AD, DC, AB, BE, EM, que determinan la construccion de la parábola y del círculo, los signos de los términos en que está b levantado á una potencia de grado impar, si hubiere $-2bx^3$ en la propuesta, porque hemos supuesto (280) que en la general habia $+2bx^3$; y borramos todos los términos donde está b, si faltare el término $2bx^3$, porque entonces $b = 0$; practicando lo mismo respecto de los términos en que están c, d, f; 3.° si tomamos dichas lineas del lado de PM quando fueren positivas, y del lado opuesto si fuesen negativas. Será, pues, $AD = \pm \frac{1}{2}b$, es á saber, $-\frac{1}{2}b$ quando hubiere $+2bx^3$, y $+\frac{1}{2}b$ quando hubiere $-2bx^3$; $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \pm \frac{1}{2}c = \mp g$, es á saber, $-\frac{1}{2}c$ quando hay $+acxx$, y $+\frac{1}{2}c$ quando hubiere $-acxx$; $BE = \pm \frac{bg}{a} \mp \frac{1}{2}d$, es á saber $-\frac{bg}{a}$

quan-

Fig. quando $AB = g$, y hay $+ 2bx^3$, ó quando $AB = -g$, y hay $- 2bx^3$; y al contrario, $+ \frac{bg}{a}$ quando $AB = +g$, y hay $- 2bx^3$, ó quando $AB = - g$, y hay $+ 2bx^3$: quiero decir $- \frac{bg}{a}$ quando los valores de AB, AD fueren el uno positivo y el otro negativo, y $+ \frac{bg}{a}$ quando dichos dos valores fueren ambos positivos ó negativos; y tambien $+ \frac{1}{2}d$ quando hubiere $-aadx$, y $- \frac{1}{2}d$ si hubiere $+ aadx$; y finalmente $EM = \sqrt{(mm \mp af)}$, es á saber $+ af$, si hubiere $- a^3f$, y $- af$, si hubiere $+ a^3f$. De donde sacarémos la siguiente construccion geométrica que es general para todos los casos.

121. Dada una parábola MCM, cuyo ege es la linea CG y el parámetro $= a$, y dándola á la equacion propuesta esta forma $x^4 \mp 2bx^3 \mp acxx \mp aadx \mp a^3f = 0$; tirarémos una linea AB paralela al ege CG, del qual esté á la distancia $\frac{1}{2}b$, del lado derecho de dicho ege quando hubiere $+ 2bx^3$ en la propuesta, y del lado izquierdo quando hubiere $- 2bx^3$. Por el punto A donde la linea AB encuentra la parábola, tirarémos una perpendicular AD al ege CG; y tomarémos en dicho ege las partes $DF = \frac{1}{2}a$, $FG = 2CD$, siempre del lado opuesto á su origen C, y la parte $GK = \frac{1}{2}c$, ácia su origen C si hubiere $+ acxx$, y del lado opuesto si hubiere $- acxx$. Por los puntos determinados A, F tirarémos la recta indefinita AF, y por el punto K una perpendicular al ege, que encuentre AF en H; en cuya perpendicular tomarémos la parte $HE = \frac{1}{2}d$, del lado derecho quando hubiere $- aadx$, y del lado izquierdo si hu-

hubiere $+ aadx$. Hecho esto, trazarémos un círculo desde el centro E, y con el radio $EM = AE$, si no estuviere en la equacion el término a^3f, esto es, quando no fuere mas que del tercer grado; pero si fuere del quarto grado, llamaremos AE, m, y tomaremos el radio $EM = \sqrt{(mm \mp af)}$, es á saber, $+ af$ si hubiere $- a^3f$, y $- af$ si hubiere $+ a^3f$. Finalmente desde los puntos M, donde este círculo encontrare la parábola dada, tirarémos lineas perpendiculares MQ á la AB; serán estas perpendiculares las raices de la equacion propuesta; siendo las raices positivas las MQ que estuvieren del lado derecho de AB, y las negativas las que estuvieren del lado izquierdo. Fig. 121.

Porque si prolongamos HK hasta que encuentre la AB en el punto B, será por construccion BK ó $AD = \mp \frac{1}{2}b$, es á saber $- \frac{1}{2}b$ quando hay $+ 2bx^3$, y $+ \frac{1}{2}b$ quando hay $- 2bx^3$; y por la propiedad de la parábola, $CD = \frac{bb}{4a}$. Luego DG ó $DF + FG = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a}$, y DK ó $AB = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} \pm \frac{1}{2}c = \mp g$, es á saber, $- \frac{1}{2}c$ quando hay $+ acxx$, y $+ \frac{1}{2}c$ si hubiere $- acxx$; y el punto B estará del lado de PM quando $AB = + g$, esto es, quando fuere positivo su valor, y del lado opuesto si fuere negativo. Pero de los triángulos semejantes ADF, ABH inferirémos $DF : DA :: AB : BH$ ó $\frac{1}{2}a : \pm \frac{1}{2}b :: \mp g : BH = \pm \frac{bg}{a}$, es á saber, $+ \frac{bg}{a}$ si fueren ambos positivos ó negativos los valores de AD y AB, y $- \frac{bg}{a}$ si el uno fuere positivo y el otro negativo. Por consiguiente $BE = \pm \frac{bg}{a} \pm \frac{1}{2}d$, es á saber, $- \frac{1}{2}d$ si hubiere $- aadx$, y $+ \frac{1}{2}d$ si hu-

Fig. hubiere $+ aadx$; y es de notar que el punto E estará del lado de PM, quando fuere positivo el valor de BE, y del lado opuesto si fuere negativo. Luego se podrá determinar en todos los casos posibles por medio de esta construccion, el centro E del círculo, conforme conviniere.

122. Si no llevare la equacion propuesta el segundo término $2bx^3$, las lineas AB, AF coincidirian con el ege CG, de modo que los puntos A, D coincidirian con el origen C, pues $b = o$. Por consiguiente el punto G coincidiria con el punto F, y los puntos H, B con el punto K, con lo que se hace mas facil la construccion general. Porque en este caso bastaria tomar en el ege la parte $CF = \frac{1}{2}a$ siempre ácia dentro de la parábola, y la parte $FK = \frac{1}{2}c$, ácia el origen C quando hubiere $+ acxx$, y del lado opuesto si hubiere $- acxx$: tirar $KE = \frac{1}{2}d$ perpendicular al ege, del lado izquierdo si hubiere $+ aadx$, y del lado derecho si hubiere $- aadx$; y concluir lo demás como en la construccion general, teniendo presente que aqui $EC = m$.

121. Si faltare el término $acxx$, el punto K coincidirá con el punto G: si faltare el término $aadx$, el centro E del círculo estará en H.

282 Podemos dar una construccion todavia mas sencilla para las equaciones del tercer grado, con multiplicarlas por la incógnita mas ó menos la cantidad conocida del segundo término, es á saber, mas dicha cantidad, si el segundo término llevare el signo $-$; y menos dicha cantidad,

dad, si llevare el signo $+$; de donde resultará una equacion Fig.
del quarto grado despojada de segundo término.

Supongamos, por egemplo, que queramos sacar las raices de la equacion de tercer grado $x^3 - bxx + apx + aaq = 0$: la multiplicaremos por $x + b$, y resultará la equacion del quarto grado

$$\begin{aligned} x^4 &+ apxx + aaqx + aabq = 0 \\ &- bbxx + abpx \end{aligned}$$

que carece de segundo término. Nos valdremos, pues, de la construccion que hemos dado para esta casta de equaciones que no tienen segundo término, y resultará $CK = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$, $KE = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$, y el radio del círculo $EM = \sqrt{(mm - bq)}$; de donde sacaremos la siguiente construccion.

Tiraremos al ege CD una paralela que diste de él la cantidad b ácia la izquierda, y que encuentre la parábola en el punto A: por el origen C del ege tiraremos la recta CA, y en el punto O que está en medio de CA, levantaremos una perpendicular indefinita OG que encuentre el ege en el punto G. Tomaremos en el ege ácia su origen C la parte $GK = \frac{1}{2}p$, y despues de tirada por el punto K una perpendicular al ege, que encuentre la OG en el punto H, tomaremos en dicha perpendicular prolongada ácia H, la parte $HE = \frac{1}{2}q$, y desde el centro E, y con el radio EA trazaremos un círculo. Este círculo cortará la parábola en unos puntos M, tales que bajando desde ellos perpendiculares MQ al ege, las que estuvieren á la derecha, serán las raices

(Tiraremos line margin) 123.

Fig. positivas; y las que estuvieren á la izquierda, serán las raices negativas de la equacion propuesta $x^3 - bxx + apx + aaq = 0$.

Porque si tiramos las perpendiculares AD, OL al ege; tendremos en virtud de la construccion, $AD = b$, y por la propiedad de la parábola $CD = \frac{bb}{a}$. Luego ya que CA está dividida por el medio en O, los triángulos semejantes CAD, COL darán $OL = \frac{1}{2}b$, $CL = \frac{bb}{2a}$; y de los triángulos rectángulos semejantes CLO, OLG inferiremos $CL : LO :: LO : LG$, esto es $\frac{bb}{2a} : \frac{1}{2}b :: \frac{1}{2}b : LG = \frac{1}{2}a$, y por consiguiente CK ó $CL + LG - GK = \frac{1}{2}a + \frac{bb}{2a} - \frac{1}{2}p$. A mas de esto, los triángulos semejantes GLO, CKH darán $KH = \frac{bp}{2a}$, y $KH + HE$ ó $KE = \frac{1}{2}q + \frac{bp}{2a}$, que coge ácia el lado izquierdo del ege, conforme pide la construccion quando hay $+ aadx$. Es, pues, el punto E el centro del círculo cuyas intersecciones con la parabola dada determinarán todas las raices de la equacion del quarto grado $x^4 + apxx$ &c. Y como las raices de esta equacion son las de la propuesta $x^3 - bxx + apx + aaq = 0$, con una negativa $AD = b$; se sigue que dicho círculo pasará por el punto A.

Tambien probaremos por medio del cálculo, que es EA el radio del círculo que se pide. Porque si tiramos EB paralela al ege, inferiremos de los triángulos rectángulos EBA, EKC, $(EA)^2 = (EB)^2 + (BA)^2$, y $(EC)^2 = (CK)^2 + (KE)^2$; hemos, pues, de probar que $(EB)^2 + (BA)^2 = (EK)^2 + (KC)^2 - bq$, una vez que ha de ser $EM = \sqrt{(mm - bq)}$. Pero si substituimos en lugar de las lineas sus valores analyticos, sacarémos las mismas cantidades, y esto

es

es cabalmente lo que ha de suceder, si el radio $EM = EA$. Fig.

Haremos que sea general esta construccion 1.° Si tiramos del lado izquierdo del ege la paralela que dista de él la cantidad b, si hubiere $-bxx$ en la propuesta, y del lado derecho, si hubiere $+bxx$. 2.° Tomando en el ege $GK = \frac{1}{2}p$ del lado de su origen C quando hay $+apx$, y del lado opuesto si hubiere $-apx$. 3.° Si tomamos $HE = \frac{1}{2}q$ del lado izquierdo si hubiere $+aaq$, y del lado derecho si huviere $-aaq$.

283 Es de advertir 1.° que si el círculo no cortare mas que en dos puntos la parábola dada, será señal de que 123. la propuesta no tiene mas que dos raices reales si fuere del quarto grado, y no mas que una si fuere del tercer grado, siendo imaginarias las otras dos. Como el círculo no corta la parábola sino en dos puntos A, M, la equacion $x^4 + apxx - bbxx$ &c. no tiene mas raices reales que AD, MQ ambas negativas, porque están del lado izquierdo del ege. 2.° Si el círculo ni cortára ni tocára la parábola en punto alguno, las quatro raices serian imaginarias : este caso no puede suceder quando la equacion es del tercer grado, conforme lo manifiestan las construcciones precedentes. 3.° Si la tocare en un punto, la propuesta tendrá dos raices iguales cada una de ellas á la perpendicular tirada desde dicho punto : la razon es que podemos considerar un círculo que toca una parábola, como si la cortase en dos puntos infinitamente próximos el uno al otro, que se consideran como confundidos uno con otro en el punto de contacto. En este caso se

Fig. podria reducir la equacion propuesta á otra del segundo grado por lo dicho (II. 275), y sería inutil la parábola para hallar sus raices.

284 2.° De lo dicho (II. 242) podemos inferir, que si un círculo cortare una parábola en quatro puntos

122. M, desde los quales se bajen perpendiculares MQ al ege CF; la suma de las perpendiculares que estuvieren del lado derecho del ege, será igual á la suma de las que estuvieren del lado izquierdo.

Porque si tomamos en el ege de la parábola, desde su origen C ácia la parte interior de la curva, la parte CF igual á la mitad de su parámetro que llamaremos a, y desde el centro E del círculo la perpendicular EK al ege, y hacemos $FK = \frac{1}{2}c$, $KE = \frac{1}{2}d$, $(EC)^2 - (EM)^2 = af$; resultará de la construccion dada (281) que las perpendiculares MQ serán las raices de esta equacion $x^4 - acxx + aadx + a^3f = 0$, que carece de segundo término; siendo positivas las que están al lado derecho del ege, y negativas las que están al lado izquierdo.

Si el círculo pasára por el origen C del ege, es patente que una de las perpendiculares MQ sería nula ó cero, y habria por consiguiente al un lado del ege una perpendicular igual á las dos juntas que estuvieren al otro lado.

Si el círculo tocára la parábola en un punto, y la cortára en otros dos; se deberia tomar el duplo de la perpendicular tirada desde el punto de contacto; porque (283) podríamos considerar dicho círculo, como si cortára la pará-

rábola en dos puntos infinitamente próximos, que se confundieran uno con otro en el punto de contacto. Fig.

285 3.° Como no puede haber en Geometría producto alguno de mas de tres dimensiones, pues el sólido que es la cantidad mas compuesta, no tiene mas que tres; podremos dividir, si quisiésemos, todos los términos de una equacion propuesta que pasase del tercer grado, por una linea dada qualquiera, elevada á una potencia un grado menor que el número de las dimensiones de cada uno de sus términos; esto no destruirá la equacion, pero hará que cada uno de sus términos no represente sino lineas rectas. Si la equacion de quarto grado fuese, por egemplo, $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$; la dividiremos por a^3, y resultará $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{a^2} - \frac{dx}{a} - f = 0$, cuyos términos son todos de una dimension, y representa por lo mismo cada uno de ellos una linea recta. Suele servir para practicar estas divisiones, la linea que mas veces se halla repetida en los términos de la equacion, qual es en este caso la linea a, y suele tambien omitirse, haciendo que haga oficios de unidad, porque la unidad no altera la cantidad que multiplica ó divide. Asi, con hacer $a = 1$, escribiríamos $x^4 + 2bx^3 + cxx - dx - f = 0$ en lugar de $x^4 + 2bx^3 + acxx - aadx - a^3f = 0$, ó de $\frac{x^4}{a^3} + \frac{2bx^3}{a^3} + \frac{cxx}{a^2} - \frac{dx}{a} - f = 0$.

286 4.° Si despues de trazado el círculo que es el lugar de la última equacion (277), se construyese una seccion cónica que sea el lugar de otra qualquiera de las equaciones que sacamos allí mismo; las in-

Fig. terseccíones de estos lugares determinarán las raíces de la equacion propuesta; porque si por medio de sus equaciones se eliminâre la incógnita y, resultará la misma equacion propuesta. De donde resulta

Que se podrá construir dicha equacion 1.° por medio de un círculo y de una hypérbola equilátera, para cuyo fin servirán la séptima y sexta equacion (277). 2.° Por medio de un círculo y de una elipse cuyo ege paralelo
121. á AP esté con su parámetro en la razon de $a : c$, para cuyo fin servirán la séptima y tercera equacion. 3.° Por medio de un círculo y de una hypérbola cuyo ege paralelo á AP tenga con su parámetro la razon de $aa : bb$, para cuyo fin servirán la séptima y quarta equacion. Y como es arbitraria la linea a que sirve para reducir á ac todas las cantidades que multiplican xx; á aad las que multiplican x; y finalmente á a^3f las cantidades enteramente conocidas; se sigue que tomando en lugar de a una infinidad de lineas de diferentes tamaños, se podrá construir la propuesta por medio de una infinidad de círculos y elipses, ó hypérbolas equiláteras y no equiláteras, todas distintas unas de otras.

Hemos visto (281) que si tomamos en lugar de la unidad arbitraria a el parámetro del ege de una parábola dada, se puede construir la equacion propuesta por medio de un círculo y de la parábola dada, para cuyo fin nos valdremos de la primera y séptima equacion. Ahora probaremos como determinando la espresada linea a de cierto modo, se podrá construir la equacion propuesta por medio de un cír-

círculo y de una elipse, ó una hypérbola semejante á una elipse ó hypérbola dada. Porque una vez que, segun suponemos, es dada la razon de sus eges, será tambien dada la razon del ege paralelo á AP con su parámetro. Por consiguiente, si llamamos dicha razon dada $\frac{n}{m}$; tendremos, quando se tratare de la elipse, $\frac{c}{a} = \frac{n}{m}$, y por lo mismo $aa = \frac{acm}{n}$; de donde resulta que si se toma en lugar de la unidad arbitraria a, la raiz de un quadrado aa igual (II. 203) á una cantidad conocida ac que multiplica xx en la equacion propuesta, y está multiplicada por $\frac{m}{n}$, se construirá la equacion por medio de un círculo y de una elipse, cuyo ege paralelo á AP tendrá con su parámetro la razon de m á n, pues $\frac{n}{m} = \frac{c}{a}$, para cuyo fin servirán la séptima y tercera equacion. Pero quando se tratare de la hypérbola, tendremos $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$, y por consiguiente $a = b\sqrt{\frac{m}{n}}$; por donde se echa de ver que si en lugar de la unidad arbitraria a tomáramos este valor, y construyéramos la equacion por medio de la séptima y quarta equacion, el ege paralelo á AP de la hypérbola, que es el lugar de la quarta, será á su parámetro como m es á n, por ser $\frac{n}{m} = \frac{bb}{aa}$.

Satisfacese un reparo muy sustancial acerca del método que acabamos de proponer para la construccion geométrica de las Equaciones.

287 De lo que hemos dicho (276) podria inferirse que es arbitraria la eleccion de la una de las dos equaciones indeterminadas que sirven para construir una

Fig. equacion propuesta. Pero no lo es del todo, por el riesgo que se corre de que sean imaginarias las intersecciones que determinan las raices de la equacion que se ha de construir. Para esta construccion solo sirven lineas que tengan abscisas reales correspondientes á las ordenadas que son las raices de la equacion, ú ordenadas reales correspondientes á las abscisas que son las raices de la equacion propuesta. Porque de otro modo sucederá que las intersecciones que deberian determinar dichas raices serán imaginarias, y no se logrará el intento.

288 Es pues muy importante enseñar como se ha de precaber este inconveniente. Para cuyo fin es de advertir que si se busca generalmente en qué puntos se encuentran dos lineas algebráicas cuyas equaciones son dadas; se ha de considerar que quando dos lineas se encuentran tienen en el punto comun una abscisa y una ordenada comun. Por consiguiente, si fueran x é y las coordenadas de la una de las dos lineas, y z y u las coordenadas de la otra, en cada punto de concurso se verificarían las quatro equaciones siguientes: 1.° $x = z$, 2.° $y = u$. 3.° la equacion de la primera linea en x, y y constantes. 4.° la equacion de la segunda linea en z, u y constantes. Se podrá pues por medio de las dos primeras equaciones substituir en la quarta x en lugar de z, é y en lugar de u. Resultarán dos equaciones en x, y y constantes, que serán las de las dos lineas propuestas; y valiendose de ellas para eliminar y, resultará una equacion en x y constantes, cuyas raices x es-

espresarán todas las abscisas que corresponden á los puntos de concurso de ambas lineas. Y si por medio de dichas dos equaciones elimináramos x, sacaríamos una equacion en y y constantes, cuyas raices y serían todas las ordenadas correspondientes á los puntos de concurso. Fig.

Para determinar estos puntos, sería preciso buscar la abscisa y la ordenada de cada punto de concurso, indagando por medio de una y otra equacion, qué ordenadas corresponden á las abscisas que lo son de los puntos de concurso; ó, si acomodára mas, se buscaría qué abscisas corresponden á las ordenadas que la equacion en y y constantes dá como ordenadas pertenecientes á los puntos de concurso. Con esto se sabria de fijo quales puntos son comunes á las dos curvas, esto es, quales son verdaderamente los puntos de concurso.

289 Esto sería muy preciso, porque aunque sea cierto que para cada punto de concurso hay una raiz x en la equacion de x y constantes, y una raiz y en la equacion de y y constantes; no podemos inferir recíprocamente que para cada raiz x, ó cada raiz y haya un punto de concurso. La razon es, que cada raiz x solo está diciendo que con una misma abscisa las dos lineas tienen una misma ordenada, pero no manifiesta si las dos ordenadas son reales. El cálculo no dice que las dos lineas concurran, sino que la abscisa y la ordenada son iguales, cuya igualdad puede verificarse entre cantidades imaginarias igualmente que entre cantidades reales. En cu-

yo

Fig. yo caso podemos decir que á dichas abscisas comunes corresponden intersecciones imaginarias, que el cálculo averigua del mismo modo que las reales. Lo propio puede suceder respecto de las raices y. Pero el cálculo que para esta comprobacion se habria de egecutar, sería penoso y en muchos casos impracticable.

290 Quando x ó y no pasa del primer grado en la una de las dos equaciones; si se hallare, por egemplo, y en este caso, es constante que á cada abscisa no corresponde mas que una ordenada, que por lo mismo jamás podrá ser imaginaria, por no haber cantidad ninguna radical en su espresion. Por lo mismo, cada raiz real de la equacion de x y constantes señala un punto de concurso real y no imaginario. Si fuese x la que no pasare del primer grado en la una de las dos equaciones propuestas; será cierto que á cada raiz real de la equacion de y y constantes corresponderá un punto de concurso real.

Sirvan de egemplo estas dos equaciones $yy + 2ax = 0$, y $yy + 4xx - 10ax - 16aa = 0$. Si eliminamos y sacarémos $4xx - 12ax - 16aa = 0$, que tiene dos raices ámbas reales, $x = 4a$, y $x = -a$. Substituyamos ahora la primera raiz $4a$ en lugar de x en las dos equaciones propuestas; se transformarán en $yy + 8aa = 0$, que no tiene mas que dos raices imaginarias $y = + 4a\sqrt{-2}$ é $y = -4a\sqrt{-2}$. Á la abscisa $4a$ corresponden en cada curva dos ordenadas iguales. De esto no se puede inferir que hay dos intersecciones, porque

son

son imaginarias las dos ordenadas, y las intersecciones lo Fig. son tambien. Substituyamos ahora en las equaciones propuestas la segunda raiz $-a$ en lugar de x; ambas se transformarán en $yy - 2aa = 0$, que tiene dos raices reales $y = +a\sqrt{2}$, $y = -a\sqrt{2}$. Luego la abscisa $-a$ tiene en cada curva dos ordenadas reales é iguales, la una positiva y la otra negativa, que dán por consiguiente dos puntos de interseccion reales, el uno mas arriba y el otro mas abajo de la linea de las abscisas.

291 En otros muchos casos sucede lo mismo que en este; es á saber, que una sola abscisa, ó una sola ordenada dá muchos puntos de interseccion. Es muy posible que una misma abscisa tenga en ambas lineas muchas ordenadas, entre las quales haya mas de una comun á las dos curvas. En este caso habrá mas intersecciones que raices reales en la equacion de x y constantes, pues una sola y misma raiz dá mas de una interseccion.

Supongamos que sean $yy + xx - aa = 0$, é $yy + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 xx - (a-b)^2 = 0$ las dos equaciones propuestas; si eliminamos y, sacaremos esta equacion $4axx - (2a-b)(a+b)^2 = 0$, que no tiene mas que dos raices $+\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa-ab)}$, y $-\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa-ab)}$. Se equivocaría el que formára juicio de que no se encuentran mas que en dos puntos las dos curvas que las dos equaciones propuestas representan. Porque á cada raiz x corresponden dos intersecciones, como es facil verificarlo substituyendo en cada equacion en lugar de x sus valores. Si substi-

Fig. tuimos el primero $+\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa-ab)}$, sacaremos $yy-\frac{2aa+ab}{4aa}(a-b)^2=0$, que tiene dos raices reales, es á saber, $+\frac{a-b}{2a}\sqrt{(2aa+ab)}$, y $-\frac{a-b}{2a}\sqrt{(2aa+ab)}$. Luego á la abscisa positiva $x=+\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa-ab)}$ corresponden dos intersecciones, la una mas arriba y la otra mas abajo del ege de las abscisas. Tambien corresponden otras dos á la abscisa negativa $x=-\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa-ab)}$; con lo que son quatro en todo las intersecciones.

292 Todo esto presupuesto, supongamos que queramos construir, por egemplo, la equacion $x^4+15a^3x+14a^4=0$, y queramos conseguirlo introduciendo y, por medio de estas dos equaciones $x^3-ayy=0$, y $xyy+15a^2x+14a^3=0$ que, con eliminar y, dán la misma equacion $x^4+15a^3x+14a^4=0$. Si tomáramos AB y AD por los dos eges, hallaríamos que la equa-
124. cion $x^3-ayy=0$ dá la curva EAF que del lado de las abscisas positivas tiene dos ramos iguales y semejantes, al uno y al otro lado del ege de las abscisas, pero que del lado de las abscisas negativas no tiene ramo alguno, por ser imaginarias todas las ordenadas $y=\sqrt{\frac{x^3}{a}}$, quando son negativas las abscisas x. Hallaríamos al contrario que la equacion $xyy+15a^2x+14a^3=0$ representa una curva GCH, que está toda entera del lado de las abscisas negativas, porque x positiva dá la imaginaria $y=\sqrt{\left(-\frac{15a^2x+14a^3}{x}\right)}$. Por consiguiente, no se podrán encontrar estas dos curvas EAF, GCH. Pero no por esto hemos de inferir que la equacion $x^4+15a^2x+14a^3=0$ no tie-

ne

ne sino raices imaginarias; porque sabemos que á intersecciones imaginarias pueden corresponder raices reales (289). Fig.
Y de hecho, si buscamos las ordenadas que en ambas curvas corresponden á la abscisa $-a$; hallarémos que son iguales una con otra, é iguales á $\pm a\sqrt{-1}$. Luego la abscisa $x = -a$, ó por mejor decir la equacion $x + a = 0$, es una raiz de $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$. Si buscáramos tambien las ordenadas de la abscisa $-2a$, hallaríamos en cada curva $\pm 2a\sqrt{-2}$. Por consiguiente, la abscisa $-2a$ tiene en ambas curvas una misma ordenada, bien que imaginaria, y dicha abscisa $x = -2a$, ó por mejor decir $x + 2a = 0$, es tambien una raiz real de la equacion $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$.

Por consiguiente el número de las intersecciones reales de dos lineas puede ser menor que el número de las raices reales de la equacion que por medio de las dos lineas se quiere construir.

293 Pero tambien puede suceder que el número de las intersecciones de dos lineas sea mayor que el número de las raices de la equacion; porque puede suceder que muchas intersecciones no den mas que una raiz, y esto sucede quando muchos puntos de concurso no tienen mas que una misma ordenada, ó una misma abscisa.

Supongamos, por egemplo, que hayamos de construír la equacion $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$ con las dos equaciones indeterminadas $x^3 - ayy = 0$, y $xyy - 15a^2x + 14a^3 = 0$, que reproducen la equacion propuesta con eli-

mi-

Fig. minar y. La primera $x^3 - ayy$ de estas dos equaciones dá,
125. como antes, la curva EAF que está toda del lado de las abscisas positivas. Pero la segunda equacion $xyy - 15a^2x + 14a^3 = 0$ representa una curva compuesta de tres porciones separadas GBH, IK, ik. Las dos últimas están del lado de las abscisas negativas, y la primera del lado de las abscisas positivas. Si consideramos con algun cuidado la equacion $xyy - 15a^2x + 14a^3 = 0$, ó $yy = \frac{15a^2x - 14a^3}{x}$, hallaremos que el ege de las abscisas divide la porcion GBH en dos ramos iguales y semejantes, que salen desde el punto B estremo de la abscisa $AB = \frac{14}{15}a$: que á una abscisa positiva menor que AB no corresponden mas que ordenadas imaginarias; pero que empezando en B, quanto mas crecieren las abscisas, tanto mas crecerán tambien las ordenadas, sin que lleguen jamás á ser mayores que $a\sqrt{15}$, á la qual no llegan á ser iguales las ordenadas, sino quando la abscisa es infinita. La curva GBH encuentra la curva EAF en quatro puntos M, N, n, m. No por esto hemos de concluir que la equacion $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$ tiene quatro raices reales. Porque las intersecciones M, m, bien que tengan dos ordenadas $MP = 2a\sqrt{2}$, y $mP = -2a\sqrt{2}$, no tienen mas que una sola abscisa $AP = x = 2a$; y las intersecciones N, n, bien que tengan dos ordenadas $NQ = +a$, y $nQ = -a$, no tienen mas que una sola abscisa $AQ = x = a$. Por lo que, las quatro intersecciones M, N, n, m no dán mas que dos raices; es á saber, $x - 2a = 0$, y $x - a = 0$. Y la equacion $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$ no tiene mas raices

rea-

reales. Porque si la dividimos por $x - 2a = 0$, y el cociente por $x - a = 0$, ó si de una vez dividimos dicha equacion por el producto $(x - 2a)(x - a) = 0 = xx - 3ax + 2aa$, será el cociente la equacion $xx + 3ax + 7aa = 0$, que no tiene mas que dos raices imaginarias que son $3a + \frac{1}{2}a\sqrt{-19}$, y $3a - \frac{1}{2}a\sqrt{-19}$. Fig.

294 Se precave el inconveniente de que sean mas ó menos las intersecciones que las raices reales de la equacion que se ha de construir, tomando para esto dos equaciones, tales que en la una no haya mas que la primera potencia de la variable y que se ha de eliminar. Porque en virtud de esto, esta variable que espresa las ordenadas de las lineas cuya interseccion ha de construir la equacion, no tiene mas de un valor en la equacion donde no lleva mas que la primera potencia, cuyo valor no puede ser imaginario. Luego á cada x real corresponde una sola y, pero real. Habrá por consiguiente tantas intersecciones cabalmente (290) quantas raices reales.

Para aclarar todo esto con un egemplo, volvamos á considerar las equaciones (292 y 293) $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$, y $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$, y en lugar de valernos para construirlas de la equacion $x^3 - ayy = 0$, valgámonos de $xx - ay = 0$, en que no pasa y del primer grado. Substituyamos en el primer término de las propuestas ay en lugar de xx; y se transformarán en $aayy + 15a^3x + 14a^4 = 0$, y $aayy - 15a^3x + 14a^4 = 0$, ó dividiendo por aa, en $yy + 15ax + 14a^2 = 0$, y

yy

Fig. $yy - 15ax + 14a^2 = 0$. Construiremos pues la primera equacion $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$ por medio de las intersecciones de las curvas que están cifradas en las dos equaciones $xx - ay = 0$, y $yy - 15ax + 14aa = 0$; y la segunda equacion $x^4 - 15a^3 + 14a^4 = 0$ por medio de las intersecciones de las curvas cifradas en las dos equaciones $xx - ay = 0$, y $yy - 15ax + 14aa = 0$.

La primera equacion $xx - ay = 0$ representa una
126. curva *CAM* compuesta de dos ramos iguales y semejan-
127. tes *AC*, *AM*, que saliendo del origen *A* se estienden al infinito ácia la derecha y ácia la izquierda mas arriba del ege de las abscisas.

126. Si con esta curva combinámos la curva *EBM* cifrada en la equacion $yy + 15ax + 14aa = 0$, que tambien consta de dos ramos iguales y semejantes *BM*, *BE*, que salen del estremo *B* de la abscisa $AB = -\frac{14}{15}a$, y se estienden al infinito ácia la izquierda, mas arriba y mas abajo del ege de las abscisas; las intersecciones *M*, *N* de las dos curvas *CAM*, *EBM* darán las dos raices de la equacion $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$. Bajando las ordenadas *MP*, *NQ*, tendremos las abscisas $AP = -2a$, y $AQ = -a$, que dán á conocer las raices $x = -2a$, y $x = -a$, ó $x + 2a = 0$ y $x + a = 0$ de dicha equacion. Y como no tiene mas que estas dos raices reales, las curvas *CAM*, *EBM* no se encontrarán sino en dichos dos puntos *M* y *N*.

127. Pero si con la curva *CAM* cifrada en la equacion $xx -$

ay

$ay = 0$, combinamos la curva EBM cifrada en la equacion $yy - 15ax + 14aa = 0$, que no se distingue de la curva EBM de la figura antecedente, sino en que aquella está á la izquierda, y esta á la derecha, pues las dos equaciones no se diferencian sino por el signo de x: sacarémos las raices reales de la equacion $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$. Si bajamos desde los puntos de interseccion M, N las ordenadas MP, NQ, tendremos las abscisas $AP = 2a$, y $AQ = a$, que manifiestan las raices reales $x = 2a$ y $x = a$, ó $x - 2a = 0$, y $x - a = 0$ de dicha equacion. Y en este caso como en el antecedente hay tantas intersecciones como raices reales, ni mas ni menos. Fig.

Resolucion de algunas cuestiones indeterminadas.

295 Cuestion I. *Dados dos puntos* A *y* B, *hallar otro punto* M, *tal que tirando las rectas* MA, MB, *estén siempre una con otra en la razon de* a : b. 128.

I. Como la cuestion no hace mencion de ángulo ninguno dado tirarémos por el punto M, que suponemos ser uno de los que se piden, la MP perpendicular á AB, por ser mas acomodado el ángulo recto; llamarémos AP, x; PM, y; AB, c; y de los triángulos rectángulos APM, BPM sacaremos $(AM)^2 = xx + yy$, $(BM)^2 = cc - 2cx + xx + yy$. Pero por la cuestion $(AM)^2 : (BM)^2 :: aa : bb$, ó $xx + yy : cc - 2cx + xx + yy :: aa : bb$. De aquí sacarémos despues de multiplicados los estremos y los medios, y dividiendo por $bb - aa$, esta equacion $yy +$

Fig. $xx + \frac{2aacx}{bb-aa} - \frac{aacc}{bb-aa} = 0$, en que están cifradas las condiciones de la cuestion, y cuyo lugar se construye por lo dicho (252) del modo siguiente.

128. En la AP tomarémos la parte $AC = \frac{aac}{bb-aa}$ del lado opuesto á PM; y desde el centro C, y con el radio CD ó $CE = \frac{abc}{bb-aa}$ trazarémos la circunferencia de un círculo; y su porcion DMO compreendida dentro del ángulo PAO, que forman la linea AP y la recta AO tirada paralelamente á PM y del mismo lado, será el lugar de la equacion que hemos sacado.

Porque si por uno qualquiera M de sus puntos tirámos MP perpendicular á AB, la propiedad del círculo dará $(CD)^2 - (CP)^2$ ó $EP \times PD = (PM)^2$, esto es, la misma equacion que hemos hallado, con tal que en lugar de las lineas se substituyan sus valores analýticos.

Si los puntos M estuvieran dentro del ángulo EAR opuesto al vertíce al ángulo BAO, sacaríamos con hacer $AP = -x$, y $PM = -y$, la misma equacion que antes, así por la condicion de la cuestion, como por la propiedad de la porcion RME de la misma circunferencia que hemos trazado; de donde resulta que dicha porcion será el lugar de todos los puntos M, quando estuvieren dentro del ángulo RAE. Y si supusiéramos finalmente que los puntos M estuvieran dentro del ángulo BAR, y despues dentro del ángulo EAO, hallaríamos (con hacer $PM = -y$ quando estuvieren del otro lado de la linea AB; y $AP = -x$, quando cayere el punto P del

otro lado del punto fijo *A*) que las porciones *DR*, *EO* Fig.
de la misma circunferencia serían los lugares de dichos puntos, y por consiguiente toda la circunferencia cuyo diámetro es *DE*, será el lugar cabal de todos los puntos *M*.

II. Discurriendo del mismo modo que en el primer caso, sacarémos esta equacion $yy + xx - \frac{2aacx}{aa - bb} + \frac{aacc}{aa - bb} = 0$, cuyo lugar construirémos como sigue.

En la *AP* tomaremos la parte $AC = \frac{aac}{aa - bb}$ del lado de *PM*; y desde el centro *C*, con el radio *CD* ó $CE = \frac{abc}{aa - bb}$ trazarémos un círculo. Su circunferencia será el lugar de todos los puntos *M*. Se prueba del mismo modo. 129.

Si se repara en estos dos casos que la circunferencia cuyo diámetro es *DE*, y que es el lugar de todos los puntos *M*, ha de cortar la linea *AB* en dos puntos *D*, *E*, tales que $AD : DB :: a : b$, y $AE : EB :: a : b$; pues quando el punto *M* coincide con *D*, la recta *AM* es *AD*, y $BM = BD$; y tambien quando el punto *M* cae en *E*, la recta *AM* es *AE*, y *BM* es *BE*; se abreviarán mucho las construcciones precedentes. Porque se viene á los ojos que si dividimos la *AB*, prolongada ácia el lado que fuere menester, en dos puntos *D*, *E*, tales que $AD : DB :: a : b$, y $AE : EB :: a : b$; la linea *DE* será en ambos casos el diámetro del círculo que resuelve la cuestion.

III. Una vez que $a = b$, la equacion hallada se transformará en este caso en estotra $x = \frac{1}{2}c$; por consiguiente, si tomamos (29) *AP* igual á la mitad de *AB*, y tiramos la recta *PM* perpendicular á *AB*, la linea *PM*, 130.

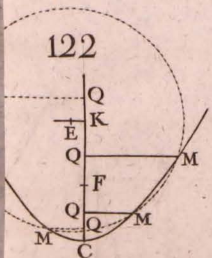
Fig. indefinitamente prolongada por ambos lados, será el lugar de todos los puntos *M*.

131. 296 Cuestion II. *Dadas de posicion dos rectas* DE, DN, *indefinitamente prolongadas al uno y al otro lado del punto* N, *y un punto* C *fuera de dichas lineas; imaginemos que el vertice de un ángulo dado* CEM *se mueva á lo largo de* DE, *de modo que su lado* EC *que encuentra* DN *en* N, *pase siempre por el mismo punto* C, *y que el otro lado* EM *sea siempre tercero proporcional á* NC, CE. *¿Qual será el lugar de todos los puntos* M?

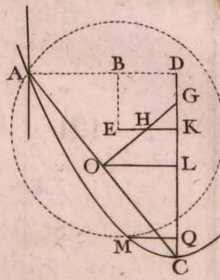
Tírense *CA* paralela á *DN*, y *CB* que forme en el punto *B* con la *DE* un ángulo igual al ángulo dado *CEM*, del lado que fuere menester, á fin de que coincidiendo *CE* con *CB*, la recta *EM* coincida con *DE*. Esto supuesto, pueden ocurrir tres casos: 1.° quando el vértice *E* del ángulo dado *CEM* se mueve en la recta *DE* del otro lado del punto *B* respecto de *A*: 2.° quando se mueve entre los puntos *B*, *A*: 3.° ó del otro lado del punto *A* respecto de *B*.

I. Quando el vértice *E* se mueve sobre la linea *DE* del otro lado del punto *B* respecto de *A*. Tirarémos del lado del punto *C* la linea *AQ* que forme con *DE* en el punto *A* el ángulo *BAQ* igual al ángulo *ABC*; tirarémos por uno de los puntos *M* que se piden y mirarémos como dado, la *MP* paralela á *AQ*, y que encuentre *DE* en *P*; de donde resultarán dos triángulos semejantes *CBE*, *EPM*; porque cada uno de los dos ángulos *CBE*, *EPM* es

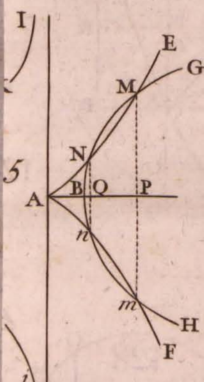
122



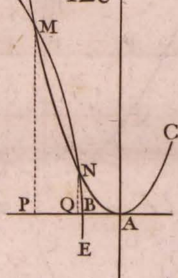
123



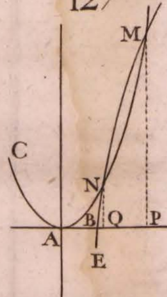
5

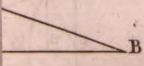


126

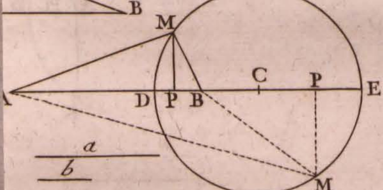


127

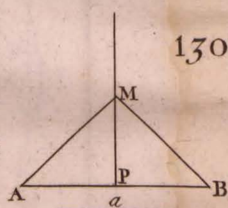


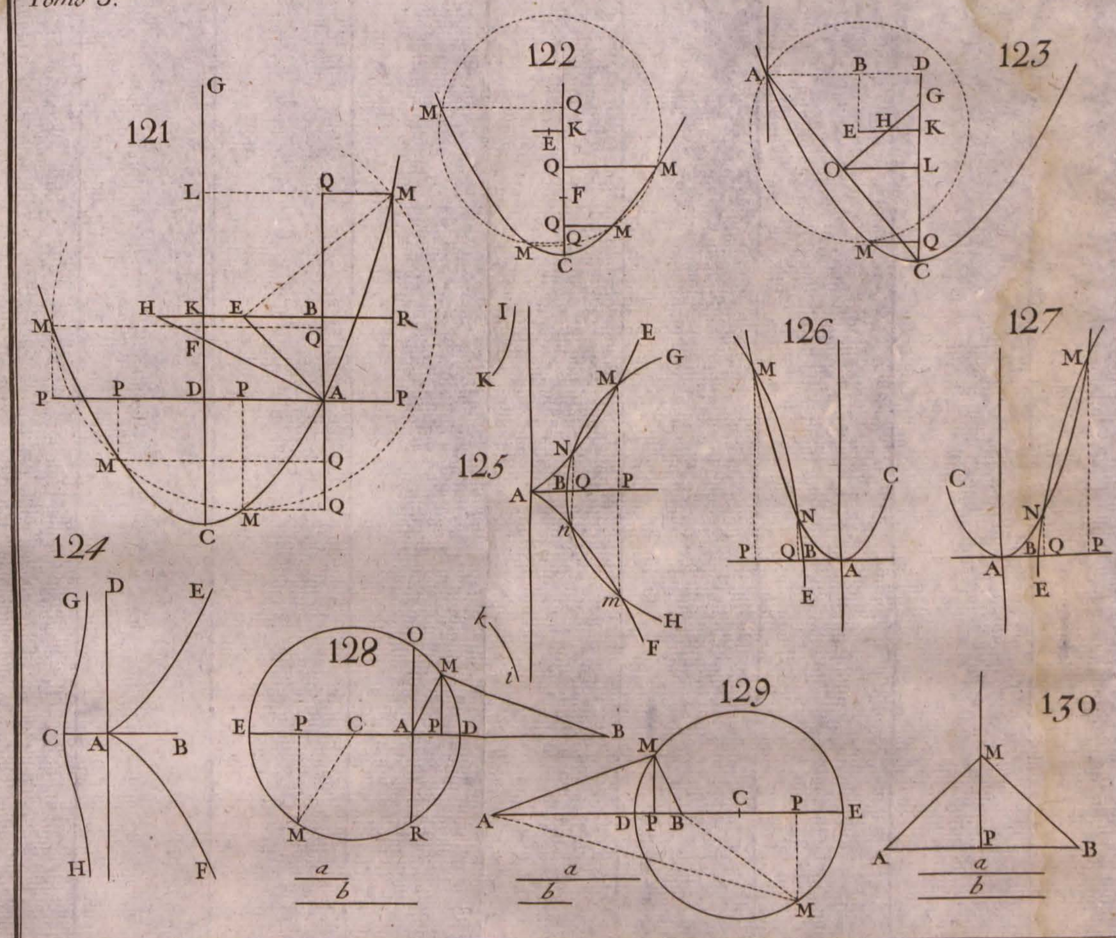


129



130




121
122
123
124
125
126
127
128
129
130

es igual al ángulo dado CEM, y son tambien iguales uno Fig.
con otro los ángulos BCE, PEM; porque en el triángulo CBE el ángulo esterno CEP ó $CEM + PEM$ vale tanto como los dos internos opuestos juntos BCE y CBE ó CEM.

Sentado esto, llamarémos AD, a; AB, b; BC, c; AP, x; PM, y; AE, z; y así de las paralelas DN, AC, como de la condicion de la cuestion inferirémos $AD : AE :: CN : CE :: CE : EM :: CB : EP :: BE : PM$; esto es, $a : z :: c : x - z :: z - b : y$; de donde sacarémos, multiplicando los estremos y medios, estas dos equaciones $ax - az = cz$, $ay = zz - bz$, que con hacer para abreviar, $f = a + c$, y eliminar z, se reducen á estotra $xx - \frac{bf}{a} x - \frac{ff}{a} y = o$ que no lleva mas que dos incógnitas x é y, y cuyo lugar, que es el que se pide, se construye (240) del modo siguiente.

En la linea AP tomarémos la recta $AF = \frac{bf}{2a}$ del la- 131.
do de PM; y tirando FL paralela á PM, tomarémos en dicha linea del lado opuesto á PM la parte $FG = \frac{bb}{4a}$. Con el diámetro GL cuyo origen sea el punto G, el parámetro $GH = \frac{ff}{a}$, y las ordenadas sean rectas LM paralelas á AP, trazarémos una parábola que coja ácia PM. La porcion indefinita OM de esta curva que está dentro del ángulo PAQ, será el lugar de todos los puntos M.

Porque si por uno qualquiera M de sus puntos tiramos la MQ paralela á AP, que encuentre en L el diámetro CL, será ML ó $PF = x - \frac{bf}{2a}$, $GL = y + \frac{bb}{4a}$, y por

Fig. la propiedad de la parábola $(ML)^2 = LG \times GH$, esto es,
131. $xx - \frac{bf}{a}x + \frac{bbff}{4aa} = \frac{ff}{a}y + \frac{bbff}{4aa}$, que despues de las transposiciones correspondientes se reduce á $xx - \frac{bf}{a}x - \frac{ff}{a}y = 0$, que es la equacion propuesta.

II. Quando el vértice *E* anda la parte *BA*. En este caso es evidente que los puntos *M* estarán del otro lado de *DE*, porque el ángulo dado *CEM* siempre será mayor que el ángulo *CEP* que vá menguando continuamente. Por este motivo será $PM = -y$; y como discurriendo del mismo modo que antes, sacaríamos la misma equacion, se infiere que la porcion *AGO* de la parábola que hemos trazado, será el lugar de todos los puntos *M*, porque sacaríamos tambien la equacion propuesta.

III. Quando el vértice se mueve del otro lado del punto *A* respecto del punto *B*. Es tambien evidente que todos los puntos *M* han de estár debajo de la linea *DE*; y hallarémos del mismo modo que en el primer caso $AD : AE :: CN : CE :: CE : EM :: CB : EP$, y por consiguiente $AD : CB :: AE : EP$. De donde se echa de ver que *EP* será mayor, menor ó igual á *EA*, segun fuere *CB* mayor, menor ó igual á *AD*; y que por lo mismo si prolongamos *AQ* mas ábajo de *DE* ácia *K*, todos los puntos *M* estarán dentro del ángulo *BAK* en el primero de estos tres casos, dentro de su suplemento *DAK* en el segundo, y finalmente sobre la recta *AK* en el tercero. Suponemos aquí que *CB* sea mayor que *AD*; y como de hacer $PM = -y$, por caer del otro lado de *AP*, no resulta la

mis-

misma equacion que en el primer caso, no nos pararémos en Fig.
su construccion. Por lo que, llamando como siempre *AP*, x; *PM*, y, sacarémos esta equacion $xx + \frac{bg}{a} x - \frac{gg}{a} y = 0$, en la qual $g = c - a$, cuyo lugar es una porcion indefinita *AM* de una parábola distinta de la precedente, que coge ácia el lado opuesto, y se construye (240) como sigue.

En la linea *AP*, y del otro lado de *PM* tomarémos 131.
la parte $AS = \frac{bg}{2a}$; tirarémos $ST = \frac{bb}{4a}$ paralela á *AQ*, del lado opuesto á *PM*; con el diámetro *TS*, cuyo origen sea *T*, el parámetro una linea $= \frac{gg}{a}$, y las ordenadas sean rectas paralelas á *AP*, trazarémos una parábola que coja ácia *PM*. Su porcion indefinita *AM* que está dentro del ángulo *PAK*, será el lugar de todos los puntos *M* en este último caso, en que suponemos que *CB* es mayor que *AD*.

Es pues evidente que el lugar de todos los puntos *M* se compone de dos porciones indefinitas de diferentes parábolas, cogiendo la una *AGOM* ácia *C*, y la otra *AM* ácia el lado opuesto, y ambas salen de un mismo origen *A*; porque como el lado *CE* del ángulo dado *CEM* coincide con *CA* paralela á *DN*, es evidente que *CN* llega á ser infinita, y que por lo mismo *EM* es nula ó cero, porque siempre se verifica que *NC* : *CE* :: *CE*: *EM*, quiero decir que el punto *M* se confunde con el punto *E* que coincide con *D*. Por donde se echa de ver que *AF* es una ordenada al diámetro *FG*, y *AS* una ordenada al diámetro *ST*; de donde sacaremos la construccion siguiente que es general.

Fig. En la linea indefinita AP al uno y otro lado del punto
131. B, tomaremos las partes BO, BR cada una igual á la quarta proporcional á las tres lineas DA, AB, BC; por los puntos F, S que están en medio de AO y AR respectivamente, tiraremos las rectas FG, ST paralelas á AQ, cada una igual á la tercera proporcional á $4AD$ y AB; es á saber, FG del lado opuesto al punto C, y ST del mismo lado. Hecho esto, trazarémos dos parábolas distintas, siendo GF el diámetro de la una, y FA su ordenada; y TS el diámetro de la otra, y su ordenada SA: sus porciones indefinitas $MAGOM$ serán el lugar cabal de todos los puntos M.

Porque BO ó $BR = \frac{bc}{a}$, y por lo mismo AF ó $\frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}b + \frac{bc}{2a} = \frac{bf}{2a}$; y AS ó $\frac{1}{2}AR = \frac{bc}{2a} - \frac{1}{2}b = \frac{bg}{2a}$. Luego &c.

Observemos de paso, que si el ángulo dado, cuyo vértice se mueve á lo largo de DE, fuese igual al suplemento del ángulo CEM, sin haber en lo demás variacion alguna: quiero decir, que los puntos M estuviesen en la linea EM prolongada al otro del punto E: el lugar de todos los puntos M serian las porciones restantes de las dos parábolas que acabamos de trazar.

297 Cuestion III. *Dada de posicion una recta indefi-*
132. *nita* AP, *con dos puntos fijos* A, C, *el uno en dicha recta y el otro fuera; trácese una parábola* AM, *cuyo parámetro sea una linea qualquiera, y el ege la linea* AP *cuyo origen esté en* A; *y desde el punto dado* C *tírese una perpendicular* CM *á dicha parábola. Se pide el lugar de todos los puntos* M, *que*

son

son infinitos, pues con mudar continuamente el parámetro se Fig.
podrán trazar una infinidad de parábolas distintas, que to- 132.
das tendrán el mismo ege AP, *cuyo origen estará en* A.

Por el punto dado C tirarémos la CB perpendicular á AP, y por uno de los puntos M, las rectas MP, MK paralelas á BC, AP, y la tangente MT. Llamarémos AB, a; BC, b; AP, x; PM, y, y será $CK = b - y$, $MK = a + x$. Como por la cuestion el ángulo CMT es recto, los triángulos rectángulos TPM, CKM serán semejantes, porque si de los ángulos rectos CMT, KMP restamos el mismo ángulo KMT, los residuos CMK, TMP serán iguales. Luego $TP : PM :: CK : KM$ ó (63 y 64) $2x : y :: b - y : a + x$; de donde sacarémos $yy - by + 2xx + 2ax = 0$, cuyo lugar es (252) una elipse que construirémos (254) del modo siguiente.

Tirarémos $AD = \frac{1}{2}b$ perpendicular á AP del lado de PM, y la recta indefinita DL paralela á AP, y tomarémos en esta linea la parte $DE = \frac{1}{2}a$ del lado opuesto á PM, y al uno y otro lado del punto E las partes EF, EG iguales ambas á $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{8}bb)}$. Despues de esto trazarémos con el ege FG, cuyo parámetro sea una linea GH dupla de FG, una elipse. Su porcion AMO que está dentro del ángulo PAD, será el lugar de la equacion hallada, y de todos los puntos M, quando estuvieren dentro del espresado ángulo.

Porque con prolongar PM, si fuere menester, hasta que se encuentre con el ege FG en L, será la ordenada ML

=

Fig. $= \frac{1}{2}b - y$, y $EL = \frac{1}{2}a + x$, y por la propiedad de la
132. elipse $FL \times LG$ ó $(EF)^2 - (EL)^2 : (LM)^2 :: FG : GH ::$ $1 : 2$, esto es $\frac{1}{8}bb - ax - xx : \frac{1}{4}bb - by + yy :: 1 : 2$, que dá $\frac{1}{4}bb - 2ax - 2xx = \frac{1}{4}bb - by + yy$.

Si supusiéramos que los puntos M están dentro de los ángulos BAD, BAR, hallaríamos la misma equacion que antes, así por la cuestion, como por la propiedad de la elipse, previniendo que habríamos de hacer $AP = -x$, y $PM = -y$, quando el punto P cayese del otro lado del origen A y PM del otro lado de la linea AP. Por consiguiente, las porciones de la elipse trazada que estuvieren dentro de dichos ángulos, serán el lugar de dichos puntos.

Es de reparar que ninguno de los puntos M puede estar dentro del ángulo PAR opuesto al vértice al ángulo BAD dentro del qual está el punto dado C, desde el qual han de salir todas las perpendiculares á las parábolas. Porque si desde un punto qualquiera de los que están dentro del ángulo PAR, tiramos rectas como MP, MT perpendiculares á AP y CM, es evidente que los puntos PT caerán del mismo lado del punto A, y por consiguiente que la linea MT no podrá ser tangente en M conforme requiere la cuestion.

Si supusiéramos $AP = x = 0$, la equacion antecedente $yy - by + 2xx + ax = 0$, se transformaría en estotra $yy - by = 0$, cuyas raices son $y = 0$, é $y = b$; de donde resulta que si tiráramos AO paralela é igual á BC, el lugar de los puntos M pasaria por los dos puntos A, O.

Del

Del mismo modo harémos patente, que si el punto P estuviera del otro lado del origen A, é hiciéramos $AP = -x$ $= AB = a$, el espresado lugar pasaria por los puntos B, C: por manera que la elipse se ha de trazar al rededor del rectángulo $ABCO$. Fig.

298 Cuestion IV. *Imaginemos una infinidad de hypérbolas, tales que las asýmtotas de todas ellas sean las mismas rectas* AP, AO, *dadas de posicion, que forman una con otra un ángulo recto* PAO; *y concibamos que desde un punto dado* C *salgan una infinidad de perpendiculares como* CM *á dichas hypérbolas. ¿Quál será el lugar de todos los puntos* M, *donde cada una de dichas rectas* CM *encuentra la hypérbola á la qual es perpendicular?* 133.

Tirarémos las mismas lineas que en la cuestion antecedente, las nombrarémos con las mismas letras, y sacarémos del mismo modo esta proporcion $TP : PM :: CK : KM$, ó (177) $x : y :: b - y : a - x$, de donde sale esta equacion $yy - by - xx + ax = 0$, cuyo lugar (260 y 265) trazarémos como sigue.

En la asýmtota AO paralela á PM, tomarémos la parte $AD = \frac{1}{2}b$, y tirarémos DL paralela á AP; tomarémos en dicha linea la parte $DE = \frac{1}{2}a$ del lado de PM, y al uno y otro lado del punto E las partes EF, EG ambas iguales á $\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb\right)}$ ó $\sqrt{\left(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa\right)}$, segun fuere a mayor ó menor que b. Hecho esto, trazarémos con la linea FG, como primer ege en el primer caso, y como segundo en el otro caso, dos hypérbolas opuestas equiláteras. Sus

por-

Fig. porciones comprehendidas dentro del ángulo PAO serán el lugar de dicha equacion, y por consiguiente el de todos los puntos M.

Porque con prolongar PM, si fuere menester, hasta que encuentre el ege FG en L, tendrémos la ordenada $ML = \frac{1}{2}b - y$, y la parte $EL = x - \frac{1}{2}a$; y por la propiedad (202) de las hypérbolas equiláteras $(EL)^2 \pm (EF)^2 = (LM)^2$, ó $xx - ax + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb - by + yy$.

Si $a = b$, no se podrá egecutar la construccion precedente, porque será nulo el valor del semiege EF ó EG. Y como entonces la equacion hallada se transforma en esta $yy - ay - xx + ax = 0$, ó $yy - ay + \frac{1}{4}aa = xx - ax + \frac{1}{4}aa$, que despues de sacada la raiz quadrada, dá $y - \frac{1}{2}a = x - \frac{1}{2}a$ ó $y = x$, y $\frac{1}{2}a - y = x - \frac{1}{2}a$ ó $y = a - x$; se infiere que si concluimos el rectángulo $ABCO$, y tira-
134. mos las dos diagonales AC, BO, será el lugar de todos los puntos M.

Porque la diagonal AC es el lugar de la primera equacion $y = x$, y la otra diagonal BO es el lugar de la segunda equacion $y = a - x$.

135. 299 Cuestion V. *Dada de posicion en un plano una recta indefinita* BAP, *y dos puntos fijos* A, D, *el uno en dicha linea y el otro fuera; se pide el lugar de todos los puntos* M, *tales que tirando desde cada uno de dichos puntos á los dos puntos* A, D, *las rectas* MA, MD, *la linea* AM *siempre sea igual á la parte* ME *de la otra recta* DM, *que está entre el punto* M *y el punto* E *donde encuentra la linea* MP.

Ti-

Tiremos desde el punto dado D, y desde el punto M las perpendiculares BD, MP á la AP; llamemos AB, $2a$; BD, $2b$; AP, x; PM, y; será $AP = PE$, pues, segun suponemos, $AM = ME$. Pero de los triángulos semejantes EBD, EPM inferirémos $EB = AE - AB : BD :: EP : PM$, ó $2x - 2a : 2b :: x : y$; de donde se saca $xy - ay = bx$, cuyo lugar pertenece (267) á una hypérbola equilátera entre sus asýmtotas, y se construye como sigue. Fig. 135.

Despues de tirada la AD, la dividirémos en dos partes iguales en el punto C, por cuyo punto tirarémos las rectas CF, CG, la una paralela y la otra perpendicular á AP; trazarémos entre las asýmtotas CF, CG indefinitamente prolongadas al uno y otro lado del punto C, por los puntos D, A (210 y 211) las dos hypérbolas opuestas DM, AM que serán (201) equiláteras. Estas serán el lugar cabal de todos los puntos M.

Porque las asýmtotas CF, CG dividen las rectas AB, BD en dos partes iguales en los puntos L, K, pues el punto C divide por el medio la linea AD; y por consiguiente, quando los puntos P están en la AB prolongada indefinitamente ácia B, conforme hemos supuesto al tiempo de hacer el cálculo, la linea PL ó $CH = x - a$, $HM = y - b$, y por la propiedad de la hypérbola (170) $CH \times HM = CK \times KD$, ó $xy - ay - bx + ab = ab$, que dá $xy - ay = bx$.

Si supusiéramos que los puntos P están en la BA indefinitamente prolongada ácia A, ó en la parte determinada AB; sacaríamos igualmente la misma equacion $xy - ay = bx$,

Fig. bx, con tal que hiciéramos $AP = -x$, y $PM = -y$.

Resolucion de algunas cuestiones determinadas.

300 Cuestion I. *Entre dos rectas* a, b *hallar dos medias proporcionales.*

Si llamamos x la primera de las dos lineas que buscamos, la segunda será $\frac{xx}{a}$, pues $a : x :: x : \frac{xx}{a}$; tendremos, pues, $a : x :: \frac{xx}{a} : b$, que dá la equacion $x^3 = a^2b$, que ni la Geometría Elemental puede resolver, ni el Álgebra tampoco, sino es por aproximacion. Nos valdremos para resolverla de la equacion de segundo grado $xx = ay$; si en el primer miembro de $x^3 = aab$ ó $x \times xx = aab$, substituimos ay en lugar de xx, resultará la equacion $xy = ab$; tendremos, pues, las dos equaciones $xx = ay$, y $xy = ab$, que pertenecen á dos curvas distintas; correspondiendo la primera á una parábola, y la otra á una hypérbola, que servirán para la construccion de $x^3 = aab$.

136. Para construir dichas dos equaciones tirarémos las AC, AQ; de manera que formen una con otra un ángulo recto, que es mas acomodado. Tomarémos en la primera $AC = a$, y con esta linea como parámetro, siendo AQ el ege, trazarémos la parábola ATM. Tomarémos en la otra linea la $AB = ab$, y concluido el paralelogramo $ACDB$ trazarémos entre las asýmtotas AQ, AC la hypérbola MD que pasará por el punto D. Estas dos curvas no tienen mas punto de concurso que M. Tirarémos las MP, MQ perpendiculares á las rectas AC, AB; será AP ó MQ la primera x de las

las dos medias proporcionales entre AC, AB, y AQ ó MP Fig.
será la segunda $= \frac{xx}{a}$.

301 Cuestion II. *Dado un ángulo* BAC, *y un punto* 137.
D *dentro del mismo ángulo; trazar un círculo que pase por el punto dado* D, *toque el lado* AB *en algun punto* P, *y corte en el otro lado* AC *una parte* OC *igual á una linea dada* 2a.

Desde el punto dado D tirarémos la DA, que pase por el vértice A del ángulo dado; la DP que pase por el punto de contacto P, y encuentre en H el lado AC prolongado; la DE paralela á AC; y la perpendicular DB al lado AB; y despues de dividida por el medio en Q la parte interceptada $OC = 2a$, llamarémos AP, x; AQ, z; DH, t; AE, m; AB, g; BD, b; DE, f; AD, n. La propiedad del círculo dará $(AP)^2 = CA \times AO$, ó $(AQ)^2 - (QO)^2$; esto es, $xx = zz - aa$, y por consiguiente $zz = xx + aa$. A mas de esto, los triángulos semejantes PED, PAH dán $AE : AP :: DH : HP$, esto es, $m : x :: t : HP = \frac{tx}{m}$; y $PE : ED :: AP : AH$, esto es, $m - x : f :: x : AH = \frac{fx}{m-x}$. Luego $HQ = z + \frac{fx}{m-x}$, y $CH \times HO$ ó $(HQ)^2 - (QO)^2 = zz + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{(m-x)^2} - aa = xx + \frac{2fxz}{m-x} + \frac{ffxx}{(m-x)^2}$ (con substituir en lugar de zz su valor $xx + aa$) $= DH \times HP = \frac{ttx}{m}$ por la propiedad del círculo; y dividiendo por x, sacarémos esta equacion $x + \frac{2fz}{m-x} + \frac{ffx}{(m-x)^2} = \frac{tt}{m}$. Pero PD ó $DH - HP = \frac{mt - tx}{m}$, y por ser rectángulo el triángulo DBP, $(PD)^2 = \frac{mmtt - 2mttx + ttxx}{mm} = xx - 2gx + gg + bb = xx - 2gx + nn$, substituyendo en lugar de $bb + gg$ su valor nn; luego inferirémos $\frac{tt}{m} = \frac{mxx - 2gmx + mnn}{(m-x)^2} =$

x

Fig. $x + \frac{2fz}{m - x} + \frac{ffx}{(m - x)^2}$; multiplicando por $m - x$, y trasladando el término $\frac{ffx}{(m-x)^2}$, resultará $mx - xx + 2fz = \frac{mxx - 2gmx - ffx + mnn}{m - x} = \frac{mxx - mmx - nnx + mnn}{m - x}$, porque del triángulo rectángulo *DEB* sale $ff = bb + gg - 2gm + mm = nn - 2gm + mm$; esto es, ya que sale cabal la division, $mx - xx + 2fz = - mx + nn$, ó $2fz = xx - 2mx + nn$. Quadrando finalmente cada miembro, y substituyendo en lugar de zz su valor $xx + aa$, sacarémos la equacion de quarto grado

$$\begin{array}{llll} x^4 - 4mx^3 & + 4mmxx & - 4mnnx & + n^4 = 0 \\ & - 4ff & - 4aaff & \\ & - 2nn & & \end{array}$$

Cuyas raíces hallarémos por medio de un círculo y de una parábola dada, ó de otra seccion cónica qualquiera, y darán tales valores de $AP = x$, que si tiramos PM perpendicular á AP, tirando PD, y haciendo el ángulo PDM igual al ángulo DPM, el punto M donde concurren los lados DM, PM del triángulo isósceles DPM, será el centro del círculo que se pide, cuyo radio será igual á MP ó MD. Ó si nó, tómese en el lado AB la parte $AP = x$, y en el otro lado AC la parte $AQ = \sqrt{(xx + aa)}$, y tirando á dichos lados las perpendiculares PM, QM; el punto M donde concurrieren, será el centro del círculo que se pide.

138. 302 Cuestion III. *Dado un círculo cuyo centro está en* A, *siendo* AM *su radio, y dos puntos* E, F *en un mismo plano; hallar en la circunferencia dentro del ángulo* EAF, *el punto* M,

M, *tal que si se tiran las rectas* AM, EM, FM, *los dos ángulos* AME, AMF *sean iguales.* Fig. 138.

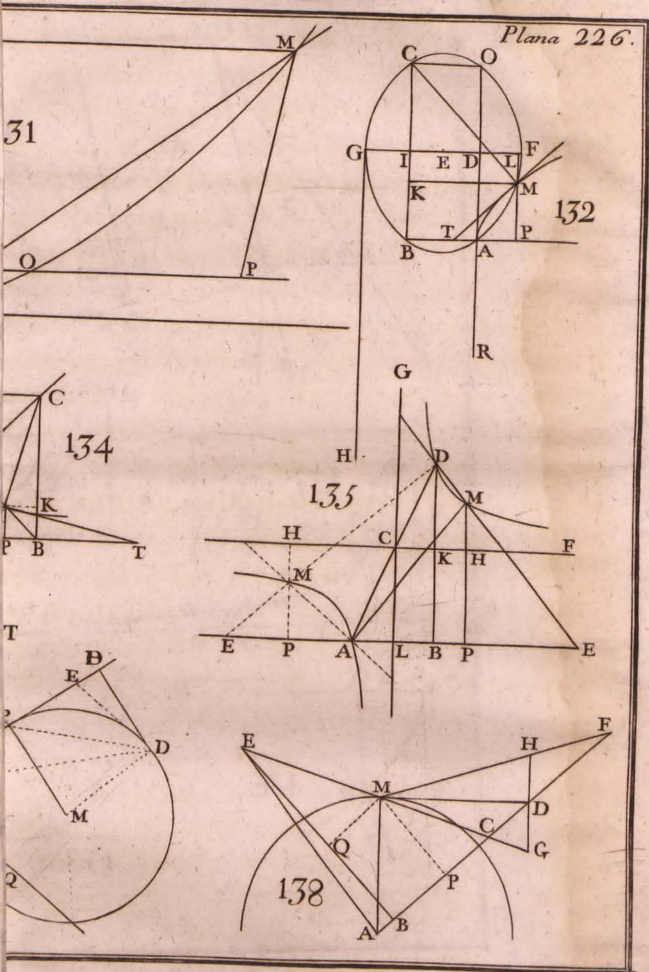
Es patente que si las lineas AE, AF fuesen iguales una con otra, la linea que dividiese por medio el ángulo EAF, cortaría la circunferencia en el punto que se pide. Por lo que, supondrémos que dichas dos lineas son desiguales, y para mayor claridad, que la linea AE es menor que AF. Sentado esto,

Por el punto M, que mirarémos como dado, tirarémos la recta MD perpendicular al radio AM, y por el punto D donde encuentra AF, la recta GH paralela á AM, que encuentre en H la MF, y en G la EM prolongada que corta en C la recta AF; de los triángulos semejantes FAM, FDH sacarémos esta proporcion AM, $DH :: AF : FD$; y de los triángulos semejantes CAM, CDG estotra $AM : DG :: AC : CD$. Pero la linea $DG = DH$, una vez que por la cuestion los ángulos AME, AMF han de ser iguales, y lo serán por lo mismo los ángulos DMH, DMG. Luego $AF : FD :: AC : CD$, y $AF + FD : AF :: AC + CD$ ó $AD : AC$. Sentado esto, tirémos las EB, MP perpendiculares á AF, y la MQ perpendicular á EB; llamémos AM, a; AB, b; EB, c; AF, d; AP, x; PM, y. De los triángulos rectángulos semejantes APM, AMD sacarémos $AP : AM :: AM : AD$, esto es, $x : a : a : AD = \frac{aa}{x}$, y por consiguiente $FD = d - \frac{aa}{x}$; y de los triángulos semejantes EQM, MPC inferirémos EQ ó $EB - MP : QM$ ó $AP - AB :: MP : PC$, esto es, $c - y :$

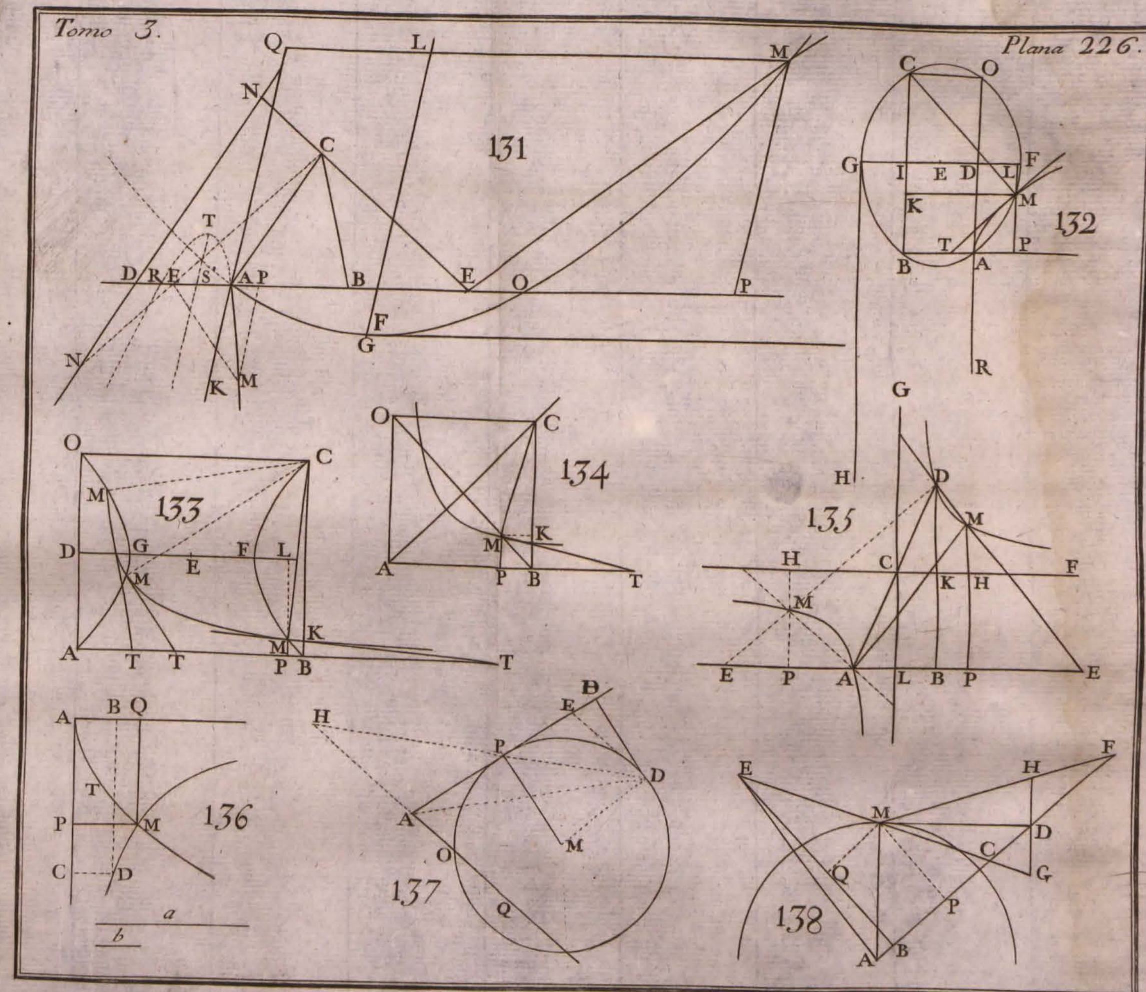
$x-b::y:PC=\frac{xy-by}{c-y}$. Luego AC ó $AP+PC=\frac{cx-by}{c-y}$, y substituyendo en la proporcion antecedente $AF+FD$: $AF::AD:AC$ en lugar de las lineas sus valores analýticos, sacarémos, despues de multiplicados los estremos y los medios, esta equacion $2cdxx-aacx-2bdxy+aaby+aady=aadc$, que, si dividimos por $2cd$, y hacemos para abreviar $b+d=f$, se reducirá á $xx-\frac{b}{c}xy-\frac{aa}{2d}x+\frac{aaf}{2cd}y-\frac{1}{2}aa=0$, cuyo lugar, que es una hypérbola entre sus asýmtotas, se construirá por lo dicho (269) y cortará la circunferencia del círculo en el punto M.

Si quisiésemos sacar una equacion que no llevára mas incógnita que x, nos valdríamos de la equacion del círculo $xx+yy=aa$, y substituyendo en ella en lugar de yy el quadrado de y que dá la equacion precedente, resultaría una equacion del quarto grado que no llevaría mas incógnita que x, y que tendria una de sus raices igual al valor que se pide de AP.

ELE-


Plana 226.
31
132
134
135
138

Tomo 3. Plana 226.



ELEMENTOS
DEL CÁLCULO INFINITESIMAL.

INTRODUCCION.

303 EN todas las reglas que hemos declarado hasta aquí para calcular la cantidad, hemos prescindido de los incrementos ó decrementos que la pueden sobrevenir para llegar á un estado determinado. Es de suma importancia atender tambien á estos incrementos ó decrementos, ó á las razones que entre ellos puede haber, por lo mucho que esto facilita averiguar las razones de las cantidades mismas. Quando en la consideracion de las cantidades queremos atender á sus decrementos ó incrementos, podemos hacerlo con dos miras distintas y aun opuestas; porque de la consideracion de las cantidades podemos pasar á la de sus incrementos ó decrementos, ó podemos considerar los incrementos para averiguar en qué razon están unas con otras las cantidades. Estos dos respectos con que se pueden calcular las cantidades, forman las dos partes del cálculo conocido con el nombre de *Cálculo infinitesimal*, cuyo asunto abraza quanto encierran estas dos cuestiones: 1.° *Dadas las cantidades, hallar qué razon hay entre sus incrementos.* 2.° *Dados los incrementos de las cantidades, averiguar la razon de las cantidades mismas.*

Pero como entre una cantidad qualquiera y la misma cantidad aumentada ó disminuida hay una diferencia igual al incremento ó decremento que padeció; este es el moti-

Fig. tivo de llamarse cálculo diferencial el ramo de la analysis que enseña quanto conduce para la resolucion de la primera de estas dos cuestiones; cuyo cálculo tambien se llama *Cálculo fluxionario* ó *de las Fluxiones*, *Cálculo de los infinitamente pequeños*. Hablarémos por lo mismo frequentísimamente en adelante de cantidades infinitamente pequeñas tan dificiles de concebir para muchos como el infinito de que hablamos en otro lugar. Es, pues, importantísimo que demos de estas cantidades la idea mas cabal y exacta que podamos, y lo egecutarémos en habiendo sentado algunas proposiciones que son muy fundamentales en toda esta materia.

304 *Si la diferencia de dos cantidades mengua continuamente, de modo que al fin llegue á ser menor que qualquiera cantidad asignable ó dada; las dos cantidades serán iguales.*

Porque si no fuesen iguales, se podria señalar su diferencia, ó sería su diferencia una cantidad asignable, cuya consecuencia desdice del supuesto.

305 *Si la razon de dos cantidades fuese tal, que siendo siempre uno mismo el antecedente, la diferencia que entre él, y su consecuente hubiere, vaya continuamente menguando hasta que llegue á ser menor que qualquiera cantidad dada; las dos cantidades serán iguales.*

Porque en virtud de lo dicho (304) el antecedente será igual á su consecuente: luego serán tambien iguales las dos cantidades, cuya razon espresaren.

Si

306 *Si en una linea curva* ABG *consideramos un ar-* Fig.
co MN *infinitamente pequeño, esto es, menor que qualquiera* 139.
cantidad dada, y tiramos por los estremos de dicho arco las ordenadas MP, NQ *al ege ó diámetro* AC, *y las paralelas* MR, NS *á dicho diámetro; los paralelogramos* PQRM, PQNS *se podrán tomar cada uno por el espacio* PQNM *comprehendido entre las ordenadas* PM, QN, *la linea recta* PQ, *y el pequeño arco* MN *de la curva.*

Todos los puntos de una linea curva ó se ván apartando continuamente de su diámetro, ó se le ván acercando mas, y mas; ó finalmente la linea curva se compone de partes de las quales las unas se apartan mas y mas de su diámetro, y las otras se le acercan mas y mas. Porque es evidente que no puede haber en una linea curva porcion alguna cuyos puntos estén todos á la misma distancia de su diámetro; pues dicha porcion no sería una linea curva sino una recta paralela al diámetro.

Supongamos, pues, 1.° que el arco *MN* sea de una curva *AMB* cuyos puntos se ván apartando todos de su diámetro *AC*. Si tomamos desde *A* hasta mas allá del punto *N* el arco *MO* de una cantidad finita; y si despues de tirada la ordenada *OF* paralela á *MP*, tiramos las rectas *OD*, *ME* paralelas al diámetro *AC*; es evidente que el espacio curvilineo *PFOM* será mayor que el paralelogramo inscripto *PFEM*, y menor que el paralelogramo circunscripto *PFOD*. Pero si imaginamos que el punto *O* se mueva en la curva ácia el punto *M*, es evidente que el paralelogra-

Fig. mo $MEOD$, que es la diferencia que vá del paralelogramo
139. inscripto al circunscripto al arco OM, menguará continuamente hasta que al fin será nulo ó cero en el instante que el punto O llegare á M. Por consiguiente, quando el punto O llegare á N; ó, lo que es lo mismo, estuviere infinitamente cerca de M, el paralelogramo $MEOD$, que entonces será $MRNS$, será menor que qualquiera cantidad dada. Luego (304) los paralelogramos $PQRM$, $PQNS$ llegarán á ser entonces iguales, y por lo mismo cada uno de ellos llegará á ser igual al espacio curvilineo $PQMN$.

Supongamos 2.° que el arco $M'N'$ esté en una curva $BM'G$, cuyos puntos se arriman mas y mas á su diámetro CG. Se viene á los ojos que la demostracion será la misma que en el primer supuesto, con sola la diferencia de que el paralelogramo $PQNS$ que en el primer caso era circunscripto, será inscripto en este segundo supuesto.

Supongamos 3.° Que la linea curva ABG se componga de muchas porciones, de las quales las unas como AB se vayan apartando del diámetro AC, y las otras como BG se le vayan al contrario arrimando continuamente. Los puntos que como B separan dichas porciones, no pueden estar en los arcos MN, $M'N'$, porque en este caso el punto B estaría mas inmediato al punto M ó M', que el punto N, ó N', cuya consecuencia es contraria al supuesto que hemos hecho de estar los puntos N,N' infinitamente inmediatos á los puntos M ó M'. Luego queda comprehendido este último caso en alguno de los dos primeros.

De

307 De la última proposicion inferiremos 1.° que si tiramos, donde quisiésemos, una ordenada *CB* paralela á *PM*, é imaginamos que la porcion de curva *AB* está dividida en un número infinito de arcos infinitamente pequeños como *MN*; el espacio *ACB* comprehendido entre las rectas *AC*, *CB*, y la porcion de curva *AB*, será igual á la suma de todos los paralelogramos como *PQRM* ó *PQNS*. Se infiere tambien que el espacio *MPCB* comprehendido entre las rectas *MP*, *PC*, *CB*, y la porcion *MB* de la curva, será igual á la suma de todos los espresados paralelogramos que cupieren en dicho espacio; lo mismo decimos de toda la curva. Fig. 139.

308 2.° Si estuviere una figura qualquiera *CMDOC* entre dos paralelas *CE*, *DF*, é imaginamos entre dichas paralelas dos rectas *MO*, *NL* infinitamente cerca la una de la otra, y paralelas á las lineas *CE*, *DF*; el espacio *OMNL* que dichas paralelas interceptarán en la figura *CMDOC* será igual al rectángulo de la una de ellas, como de *MO*, multiplicada por su distancia *MR* ú *OS*. 140.

Porque si tiramos *AB* perpendicular á las paralelas *CE*, *DF*, cuya perpendicular encuentra las paralelas *MO*, *NL* en los puntos *P*, *Q*; es evidente por lo dicho (306) que el espacio *MPQN* es igual al rectángulo *PMRQ*, y el espacio *POLQ* igual al rectángulo *POSQ*; luego $MPQN = PM \times PQ$, y $POLQ = PO \times PQ$; restando la segunda equacion de la primera, tendremos $MPQN - POLQ = OMNL = (PM - PO) \times PQ = OM \times PQ$.

 3.°

Fig. 140. 309 3.° De lo que acabamos de decir se colige que si estuvieren las dos figuras *CMDOC*, *EGFHE* entre dos paralelas *CE*, *DF*, y fuesen tales, que tirando entre dichas paralelas, donde se quisiese, una linea *MH* paralela á las rectas *CE*, *DF*, las partes *MO*, *GH* de dicha linea comprehendidas en las figuras *CMDOC*, *EGFHE* tuvieren una con otra una razon dada; las dos figuras tendrán tambien una con otra la misma razon dada.

Porque si imaginamos otra paralela *NK* infinitamente próxima á *MH*, y tiramos una perpendicular *AB* á las paralelas *CE*, *DF*, cuya perpendicular encuentra las paralelas *MH*, *NK* en los puntos *P*, *Q*; es evidente (308) que el espacio $OMNL = OM \times PQ$, y tambien que el espacio $GHKI = GH \times PQ$. Serán, pues, dichos espacios :: *MO* : *GH*; y como lo mismo probarémos, tírese la *MH* por donde se quisiere, se sigue que la suma de todos los espacios *MNLO*, esto es, el espacio total *CMDOC* será á la suma de todos los espacios *GHKI*, esto es, al espacio total *EGFHE*, en la misma razon dada.

Por el mismo término probaríamos que la porcion *MDO* de la figura *CMDOC*, es á la porcion correspondiente *GFH* de la otra figura *EGFHE* en la razon dada; lo propio dirémos de las porciones restantes *CMO*, *EGH*.

Es patente que si la razon dada fuese la razon de igualdad, quiero decir, que si las partes *MO*, *GH* de la recta *MH* fuesen iguales, los espacios *CMDOC*, *EGFHE*, y sus porciones correspondientes *MDO*, *GFH*,

y

y *CMO*, *EGH* serian tambien iguales. Fig.

310 *Si suponemos en una linea curva qualquiera un ar-* 141.
co MN *infinitamente pequeño, é imaginamos las tangentes* MT, NT *que concurren en el punto* T, *la subtensa* MN, *y la recta* NS *perpendicular á* MT *prolongada; podremos tomar por el arco* MN *su subtensa* MN, *ó la suma de las dos tangentes* MT, NT, *ó finalmente la recta* MS.

Toda linea curva es por precision ó siempre cóncava ácia una misma parte, ó formada de muchas porciones, de las quales siendo las unas cóncavas ácia un lado, las otras lo son ácia el lado opuesto. Los puntos que separan estas porciones (306) no pueden estar en los arcos infinitamente pequeños *MN*, porque entonces estarian mas cerca del punto *M* que el punto *N* contra lo supuesto. Podemos, pues, siempre suponer que el arco *MN* es porcion de una curva que es constantemente cóncava ácia un mismo lado.

Sentado esto, si tomamos en la curva un arco *MO* de una cantidad finita, y tiramos la subtensa *OM*, la tangente *OG*, y la *OD* paralela á *NS*; es evidente 1.° Por ser el triángulo *MDO* rectángulo en *D*, que la tangente *MD* es menor que la subtensa *MO*, y menor, con mas razon que el arco *MNO*; por manera, que el arco *MNO*, y la subtensa *MO* son cada una mayor que *MD*, y cada una menor que la suma de las dos tangentes *MG*, *OG*. 2.° Es evidente, por tener el arco *MNO* vuelta su concavidad ácia un mismo lado, que si por un punto qualquiera *N* del arco *MO* tiramos una tangente *TR*, los puntos *T*, *R* donde encontrará

las

Fig. las tangentes MG, OG estarán entre los puntos M, G, y O, G. Por consiguiente el ángulo OGD, que es esterno respecto del triángulo TGR, será mayor que el ángulo RTG, ó NTS.

En virtud de todo esto, si tiramos las rectas ME, MF paralelas respectivamente á las tangentes OG, NT, y que encuentran la recta DO en los puntos E, F, é ímaginamos que el punto O se mueva en la curva ácia el punto M; es evidente que el ángulo OGD, ó su igual EMD irá continuamente menguando hasta desvanecerse en el instante que el punto O llegáre á M, porque entonces la tangente OG se confunde con la tangente MD; de donde se sigue que la linea ME mengua continuamente, hasta que en aquel instante es igual á MD. Luego quando el punto O llegáre á N, esto es, infinitamente cerca del punto M, la linea ME, que entonces será MF, no discrepará de la tangente MD, sino de una cantidad menor que qualquiera dada; luego (305) las lineas TN, TS, que están en la misma razon que las lineas MD, MF por ser semejantes los triángulos MFD, TNS, serán iguales. Luego las dos tangentes MT, TN juntas serán iguales á la recta MS, igualmente que al arco MN, y á la subtensa MN.

311 Ya que en el supuesto de estar el punto N infinitamente próximo al punto M, el ángulo FMD ó su igual NTS es infinitamente pequeño; se sigue que en el triángulo MTN, el ángulo interno NMT, que es menor que el exterior NTS, será tambien infinitamente pequeño, esto es me-

menor que qualquiera ángulo dado, y que por consiguiente no se podrá tirar por el punto *M* ninguna linea recta dentro del ángulo *TMN*. Luego las dos lineas *MT*, *NM* se confunden una con otra, y podemos por consiguiente mirar una tangente como una linea recta que pasa por dos puntos de una linea curva infinitamente inmediatos el uno al otro. Fig.

312 Si imaginamos que una linea curva qualquiera esté dividida en un número infinito de arcos infinitamente pequeños como *MN*; es evidente que si en lugar de dichos arcos tomamos sus subtensas, resultará un polýgono de una infinidad de lados, cada uno infinitamente pequeño, cuyo polýgono se podrá tomar por la linea curva, pues (310) no discrepará de ella. Fuera de esto, los pequeños lados del espresado polýgono, prolongados ácia ambos lados, serán las tangentes de dicha curva, pues cada uno pasará por dos de sus puntos infinitamente inmediatos el uno al otro. 141.

313 El rumbo que hemos seguido para probar las proposiciones sentadas poco há (304 y sig.) dá bastante á entender qué especie de cantidades son las que llamamos infinitamente pequeñas; no son cantidades realmente existentes, ni tampoco supone su existencia el cálculo infinitesimal; son cantidades menores que qualesquiera dadas; son el límite al qual se acercan, sin alcanzarle jamás, las cantidades que van menguando, del mismo modo que el infinito es, segun digimos (I. 186), el límite al qual se

van

Fig. van aproximando las cantidades que concebimos como continuamente crecientes.

142. Con la mira de manifestar aun mejor la naturaleza de estos infinitamente pequeños, supondrémos que se nos ofrezca tirar en el punto *A* una tangente á la curva *CAB*. Tomarémos desde luego á arbitrio dos puntos *A* y *B* en dicha curva, y tirarémos por ellos la secante *AB*, indefinitamente prolongada ácia *Z* y *X*, y por los dos puntos *A* y *B* de la curva las dos ordenadas *AD*, *BE* perpendiculares al ege *CE*. Es evidente que la posicion de la secante pende de la distancia *DE* que hay entre las dos ordenadas, que es la diferencia de las dos abscisas *CE*, *CD*, y de la diferencia *BO* de las mismas ordenadas; de suerte que si conociésemos dichas diferencias, ó la razon entre la distancia de las ordenadas y su diferencia, conoceríamos la posicion de la secante. Imaginemos que el uno de los dos puntos *A*, *B* de la curva, el punto *B* por egemplo, se vaya arrimando continuamente al punto *A*, y que por el punto *A*, que suponemos fijo, se haya tirado una tangente *AP* á la curva; se echa de ver que la secante *AB* tirada por los dos puntos *A*, *B*, de los quales suponemos que el uno se vá arrimando al otro, se acercará continuamente á la tangente, hasta llegar á ser la tangente misma, quando llegaren á confundirse en solo un punto los dos puntos *A* y *B*. Es, pues, la tangente el límite de las secantes, el término al qual se arriman mas

y

y mas, sin que jamás le puedan alcanzar mientras fueren secantes, pero al qual se pueden acercar quanto se quisiere. Pero, segun acabamos de ver, la posicion de la secante se determina por la razon entre la diferencia *BO* de las ordenadas y su distancia *DE*; luego si buscamos el límite de esta razon, esto es, el valor al qual se aproxima mas y mas esta razon á medida que la una de las ordenadas se arrima á la otra, este límite determinará la posicion de la tangente, pues la tangente es el límite de las secantes. Fig.

314 Para mayor esplicacion repetirémos lo que acabamos de decir respecto de una curva en general, aplicándolo al círculo. Supongamos, pues, que al círculo *AEB* le queramos tirar una tangente en el punto *E*, cuya tangente supondrémos que sea la *TEL*. Tirarémos la *EM* perpendicular, y la *EH* paralela al diámetro *AB*; tirarémos tambien por los estremos del arco *EI* la secante *EI*; finalmente tomarémos la *EH* igual á una linea dada, y tirarémos paralelamente á las ordenadas la *GFN* que pase por el punto *I*, y la *HL* que encuentre en *L* la tangente, y en *K* la secante. 143.

Es evidente que puede menguar el arco *EI* de modo que llegue á ser menor que qualquiera arco dado; luego el ángulo *GEI* ó *LEK* será entónces menor que qualquiera ángulo dado. Porque si tiramos el diámetro *ECP* y la *IP*, el ángulo $GEI = P$ (I. 372 y I. 374); pero en el supuesto de ser el arco *EI* menor que qualquiera arco dado,

do, el ángulo P será menor que qualquiera ángulo dado; luego el ángulo GEI ó LEK será tambien menor que qualquiera ángulo dado en el mismo supuesto. Por consiguiente, la linea LK llegará á ser menor que qualquiera linea dada; luego la razon $LH : HE$ será á la verdad mayor que la razon $KH : HE$, pero la diferencia de estas dos razones será menor que qualquiera dada; luego al fin llegan á ser iguales las dos razones. Pero la razon $LH : HE$ es la misma que la razon $GF : FE$, y la razon $KH : HE$ es la misma que la razon $IF : FE$ luego las dos razones $GF : FE$ y $IF : FE$ llegan á ser por último iguales. Y como la razon $GF : FE$ es la misma que la razon de la ordenada á la subtangente, ó la razon $EM : MT$; la razon $IF : FE$ llega á ser por último igual á la razon $EM : MT$. Pero FI es la diferencia de las ordenadas EM, IN, y MN es la diferencia de las abscisas AM, AN; luego finalmente la diferencia de las ordenadas es á la diferencia de las abscisas como la ordenada EM á la subtangente MT. Por consiguiente una vez averiguado á qué razon es por último igual la razon entre la diferencia de la ordenada y la diferencia de la abscisa, quedará determinada la subtangente, y será facil tirar la tangente.

315 El cálculo que averigua el límite de la razon entre la diferencia finita de dos cantidades dadas, y la diferencia finita de otras dos cantidades que tienen con las dos primeras una analogía conocida, es el que llamamos propiamente *Cálculo diferencial.*

Es

316 Es evidente que quanto menor fuere cada una de dichas diferencias, tanto mas se acercará su razon al límite que se busca, pues tanto mas se acercará á confundirse el punto *B* con el punto *A*. Es tambien evidente que mientras estas diferencias no son enteramente nulas, su razon no es rigurosamente igual al límite; y que quando son nulas, ya no hay entre ellas razon alguna, porque no hay razon entre dos cosas que no existen. Pero el límite de la razon que habia entre dichas dos cantidades quando eran todavía algo, no es por esto menos real; y el valor de este límite es el que encamina, segun hemos visto, á determinar la posicion de la tangente. Fig. 142.

Con un egemplo aclararémos mejor lo que acabamos de decir acerca del límite de las razones. Supongamos dos cantidades, tales que la una sea igual al duplo mas al quadrado de la otra, por manera que llamando la primera a y la segunda b sea $a = 2b + bb$. Es evidente 1.° que la razon entre a y b será siempre mayor que el número 2, mientras a y b tuvieren algun valor 2.° que la razon entre a y b se aproximará tanto mas á valer 2, quanto menor fuere b, y que dicha razon podrá acercarse quanto se quisiere al número 2, tomando la primera cantidad tan pequeña como fuere menester, pues quanto menor fuere b, tanto menor será bb (II. 182). Por consiguiente será el número 2 el límite de la razon de dichas dos cantidades; quando llegare á ser nula b, tambien llegará á ser a evidentemente nula, en cuyo caso no habrá ni podrá ha-

haber razon alguna entre *a* y *b*; pero es tambien cierto y evidente que mientras fueren algo, será el número 2 el límite de su razon.

317 Como la razon de las diferencias se acerca tanto mas á su límite, quanto menores son dichas diferencias; por este motivo se supone el límite de la razon representado por la razon entre las diferencias infinitamente pequeñas. Pero esta razon entre diferencias infinitamente pequeñas, no es mas que un modo abreviado de espresar una nocion mas exacta y rigurosa, esto es, el límite de la razon de las diferencias finitas. Porque las diferencias infinitamente pequeñas ó no existen realmente, ó por lo menos no es menester suponer que existen realmente, para determinar exacta y rigurosamente dicho límite.

318 Hemos de prevenir que nunca se consideran en este cálculo como iguales las cantidades ó razones entre las quales hay alguna diferencia, sea la que fuere; solo por razon de ser su diferencia menor que qualquera cantidad asignable, se demuestra sin riesgo de incurrir en ningun paralogismo, que la diferencia llega por último á desaparecerse y ser nula; por cuyo motivo las cantidades ó razones llegan finalmente á ser iguales; su igualdad solo se verifica en el límite al qual se van acercando mas y mas las cantidades ó razones, bien que quizá nunca le alcancen, segun llevamos dicho. En las demostraciones que hacemos por este cálculo, no despreciamos cantidad alguna ni grande ni chica, solo decimos que las cantidades y ra-

razones son iguales quando llega á ser ninguna su diferencia. Fig.

319 Verdad es que en el límite suelen ser nulas las cantidades. Pero no por esto deja de ser utilísimo considerar lo que pasa en el límite, porque otras cantidades que en el límite no se desvanecen, y tenian la misma razon que las primeras, adquieren en el límite la proporcion que le caracteriza. Por egemplo las dos razones *IF*: *FE* y *GF*: *FE* discrepan á la verdad la una de la otra, pero discrepan de una cantidad menor que qualquiera cantidad asignable; luego en el límite serán iguales. Este límite está en el punto *E*, quando se confunden con él los puntos *G*, *I*, *F*, en cuyo supuesto todas las lineas *GF*, *IF*, *EF* son enteramente nulas. Pero las lineas *LH*, *KH*, *EH* proporcionales á las primeras, no se desvanecen en el límite, y se mantienen en el estado de finitas, y allí mismo las dos razones *LH*: *HE* y *KH*, *HE* son verdaderamente iguales. Por lo que, quando atendemos á la proporcion que tienen en el límite las cantidades que totalmente se desvanecen, determinamos la razon que en dicho límite tienen las cantidades homólogas á las primeras, que en el límite no se desvanecen, y se mantienen en la clase de finitas.

320 Todo esto acabaria de aclarar, si quedase alguna duda, qué cosa entendemos por diferencial, fluxiones, elementos, cantidades infinitésimas, ó infinitamente pequeñas. Todas estas denominaciones que tenemos por sinónimas no significan sino diferencias menores, que qualesquie-

Fig. ra cantidades dadas, de las quales se pueden inferir con seguridad las igualdades, ó últimas razones que se verifican en el límite. Pero no me canso de repetirlo, estas cantidades, ó razones no discrepan las unas de las otras sino de una diferencia menor que qualquiera cantidad dada, luego á lo último, y en el límite llegan á ser iguales. Para abreviar usamos de una espresion compendiosa, y atribuimos la igualdad que solo se verifica en el límite, á cantidades ó razones entre las quales hay una diferencia menor que qualquiera cantidad dada; no porque creamos que puedan ser iguales las cantidades ó razones mientras hubiere entre ellas alguna diferencia, sino porque estamos seguros de que la última diferencia, la que corresponde al límite, llega á ser nula, y entonces las cantidades, y razones son iguales. Este artificio no perjudica á la evídencia y claridad de las demostraciones que por referirse únicamente al caso del límite, se fundan por precision en las últimas igualdades, y proporciones de las cantidades. Estas se consiguen con omitir, y mirar como nulas las diferencias menores que qualquiera cantidad dada. No se desprecian, pues, en el cálculo diferencial diferencias que, aunque pequeñas, son no obstante algo, ni se consideran como iguales cantidades entre las quales hay alguna diferencia. Porque quando decimos que son iguales las cantidades ó las razones cuya diferencia es infinitamente pequeña, esto es menor que qualquiera cantidad dada, no queremos decir que sean iguales mientras fuere algo su di-

fe-

ferencia, sino solo en el límite, donde dicha diferencia es Fig.
nula, y se puede despreciar. Por lo que, omitir las diferencias menores que qualesquiera cantidades dadas, no es otra cosa que determinar las igualdades, y proporciones que realmente se verifican en el límite.

321 Lo que digimos en otro lugar (II. 184) acerca de los infinitos de varias órdenes, se aplica de suyo á las diferentes órdenes de infinitamente pequeños. Quando decimos que una cantidad es infinitamente pequeña de segunda orden, esto es, infinitamente pequeña respecto de otra cantidad que tambien es infinitamente pequeña, solo queremos dár á entender que la razon entre la primera de dichas dos cantidades y la segunda es siempre tanto menor, quanto menor suponemos la segunda cantidad, y que podemos suponer dicha razon tan pequeña, como quisiésemos, imaginando la segunda cantidad tan pequeña, como para esto se requiere.

Si fuere x infinitamente pequeña, lo será tambien la razon $\frac{x}{1}$; y por la naturaleza de la multiplicacion será xx infinitamente pequeña de segunda orden, pues cada uno de sus dos factores es infinitamente pequeño; y como $xx : x :: x : 1$, resulta que quanto menor fuere x, tanto menor será la razon $\frac{xx}{x}$.

Si atendemos á que $HK : KL :: FI : IG$; resultará que quando KL, FI fueren menores que qualesquiera cantidades dadas, será GI una quarta proporcional á HK, cantidad dada, y á los dos infinitamente pe- 143.

Fig. queños LK, FI, que llamamos infinitamente pequeños de primera orden; podremos, pues, llamar GI un infinitamente pequeño de segunda orden. Ahora bien: así como hemos de suponer que en el límite son iguales las dos LH, HK que no discrepan sino de la cantidad infinitamente pequeña KL, habremos tambien de suponer iguales una con otra las dos cantidades infinitamente pequeñas GF, IF, que no discrepan sino de la cantidad GI, que respecto de ellas es infinitamente pequeña de segunda orden.

DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

322 Para conocer el valor de los incrementos de una cantidad variable que vá creciendo por grados infinitamente pequeños se ha de determinar el valor que tiene dicha cantidad en un instante qualquiera, y el valor de la misma cantidad en el instante que sigue inmediatamente al primero: restando despues el uno de estos valores del otro, su diferencia espresará el incremento ó decremento que padece la espresada cantidad, cuya espresion se llama *la Diferencia* ó *la Diferencial* de la cantidad propuesta.

323 La diferencial de una sola variable como x ó y, se señala de este modo dx ó dy, escribiendo inmediatamente antes de dicha variable la letra d que es la primera de la palabra *diferencial*; de cuya letra ya no usaremos en adelante sino para espresar la diferencial de la cantidad antes de la qual estuviere escrita. Pero quando la cantidad cuya diferencial se ha de representar es compues-

ta,

tá, quales son estas x^2, $5x^3 + 3x^2$ ó $\sqrt{(x^2 - a^2)}$ &c. se Fig.
escribe la cantidad dentro de un paréntesis, y antes del paréntesis la letra d de este modo $d(x^2)$, $d(5x^3 + 3x^2)$, $d(\sqrt{x^2 - a^2})$ &c.

324 De lo que hemos dicho tocante á la diferencial de una cantidad, se sigue que para hallar la diferencial de una cantidad propuesta que no contiene sino variables de primer grado, que no están ni multiplicadas ni divididas unas por otras, toda la operacion se reduce á afectar cada variable de la característica d, dejándola á cada una su signo. En virtud de esto, la diferencial de $x + y - z$, será $dx + dy - dz$. Con efecto, para sacar dicha diferencial hemos de considerar que x se transforma en $x + dx$, y en $y + dy$, y z en $z + dz$; en cuyos supuestos la cantidad propuesta $x + y - z$ será $x + dx + y + dy - z - dz$: tomando, pues, la diferencia que hay entre estas dos espresiones, resultará la diferencial (322) de la cantidad propuesta, que será por consiguiente $x + dx + y + dy - z - dz - x - y + z$, ó $dx + dy - dz$.

El mismo rumbo seguiríamos para hallar las diferenciales de las variables que llevan coeficientes ó multiplicadores constantes. Por egemplo, la diferencial de $5x + 3y$ es $5dx + 3dy$; la de $ax + by$, es $adx + bdy$; porque quando x llega á ser $x + dx$, é y llega á ser $y + dy$, la cantidad $ax + by$ es $a(x + dx) + b(y + dy)$, esto es $ax + adx + by + bdy$; será, pues, la diferencia entre las dos espresiones, ó la diferencial de $ax + by$, $adx + bdy$. En

 ge-

Fig. general, se ha de afectar cada variable de la característica d.

325 Quando la cantidad propuesta lleva un término todo constante, su diferencial es la misma que si no estuviera dicho término constante. Esto es lo mismo que si digéramos que la diferencial del término constante es cero, y no puede dejar de ser así, porque una cantidad constante no puede crecer, ni menguar; luego es una misma en todos tiempos; luego no se la puede señalar diferencial: por consiguiente la diferencial de $ax + b$ será adx.

326 Quando las cantidades variables siendo lineares, estuvieren multiplicadas unas por otras, se diferenciará sucesivamente cada variable, como si todo lo demas fuese un multiplicador constante; la suma de los resultados succesivos será la diferencial del producto propuesto.

En virtud de esto, para diferenciar xy, diferenciaré primero como si x fuese constante, y sacaré xdy; despues diferenciaré xy como si y fuese constante, y saldrá ydx, y la diferencial de xy será $xdy + ydx$.

Fúndase esta regla en el principio fundamental (322). Para diferenciar xy hemos de considerar x como transformada en $x + dx$, esto es como aumentada de la cantidad infinitamente pequeña dx; é y como transformada en $y + dy$, esto es como aumentada de la cantidad infinitamente pequeña dy. En estos supuestos xy es $(x + dx) \times (y + dy)$ ó $xy + xdy + ydx + dydx$: luego la diferencia entre las dos espresiones ó la diferencial de xy será $xy + xdy +$ ydx

$ydx + dxdy - xy$, ó $xdy + ydx + dydx$; pero como la cantidad $dxdy$ es infinitamente pequeña de segunda orden (321) será infinitamente pequeña respecto de xdy é ydx que son infinitamente pequeñas de primera orden: luego $dxdy$ se deberá despreciar (II. 183), y por consiguiente la diferencial de xy ó $d(xy)$ será $xdy + ydx$. Fig.

Por el mismo camino hallaremos que la diferencial de xyz es $xydz + xzdy + yzdx$, diferenciando primero como si xy fuese constante, despues como si fuese constante xz, y finalmente, como si yz fuese constante. Porque si consideramos, como es preciso, x, y, z como transformadas en $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; el producto xyz será $(x + dx) \times (y + dy) \times (z + dz)$, ó $xyz + xydz + xzdy + yzdx + ydxdz + zdydx + xdzdy + dxdydz$. Restando de esta última espresion xyz, haciendo la reduccion correspondiente, y desechando los términos infinitamente pequeños de segunda, y tercera orden (II. 183), la espresion de la diferencial que buscábamos será con efecto $xydz + xzdy + yzdx$.

327 Quando ocurra diferenciar una potencia qualquiera de una cantidad variable, se multiplicará la cantidad por su esponente, se le quitará una unidad al esponente que llevare la variable, y se multiplicará la cantidad que resultáre por la diferencial de la variable. De la práctica de esta regla sacaremos que la diferencial de x^2 es $2x^{2-1}dx$ ó $2xdx$; que la de x^3 es $3x^{3-1}dx = 3x^2dx$; la de x^4 será $4x^{4-1}dx = 4x^3dx$; la de x^{-1} será $-1x^{-2}dx$; la de x^{-3} será $-3x^{-4}dx$; la de $x^{\frac{1}{2}}$ será $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$:

Fig. la de $x^{\frac{4}{3}}$ será $\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}dx = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$; y en general, la diferencial de x^m será $mx^{m-1}dx$, sea lo que fuere el esponente m, un número positivo ó negativo, entero, ó quebrado.

Tambien se saca del principio fundamental la razon de esta regla. Porque si consideramos x como transformada en $x + dx$, siendo dx infinitamente pequeña, será $x^m = (x + dx)^m$ (II. 99) $= x^m + mx^{m-1}dx + m. \frac{m-1}{2} x^{m-2}dx^2 +$ &c. cuya espresion se reduce á $x^m + mx^{m-1}dx$ por ser el término $m. \frac{m-1}{2}x^{m-2}dx^2$ infinitamente pequeño de segunda orden, y porque los que se le siguen serian aun menores; sacando, pues, la diferencia entre x^m y $x^m + mx^{m-1}dx$ resultará $x^m + mx^{m-1}dx - x^m = mx^{m-1}dx$, que será la diferencial de x^m.

Los multiplicadores constantes que pueden afectar la cantidad variable cuya diferencial se busca, no alteran en nada la práctica de la regla, se quedan dichos multiplicadores en la diferencial del mismo modo que en la cantidad. En virtud de esto, la diferencial de ax^m será $max^{m-1}dx$.

328 Todas las reglas que hasta ahora hemos dado para diferenciar las cantidades, son fundamentales, y bastan para quantos casos puedan ocurrir; pero con la mira de que sea mas facil su práctica, las aplicaremos á algunos egemplos.

329 Supongamos que se nos ofrezca diferenciar un quebrado, qual sería $\frac{x}{y}$; le escribiríamos de este modo xy^{-1} (II. 91), y practicando lo dicho (326) sería $d(xy^{-1}) = xd(y^{-1}) + y^{-1}dx$; y por consiguiente

te (327) $d(xy^{-1}) = -xy^{-2}dy + y^{-1}dx$; cuya espresion Fig.
es la misma (II. 92) que estotra $\frac{-xdy}{y^2} + \frac{dx}{y}$, ó $\frac{ydx - xdy}{y^2}$, de la qual inferiremos que *la diferencial de un quebrado* $\frac{x}{y}$ *es igual á la diferencia* dx *del numerador* x *multiplicada por el denominador* y, *menos la diferencial* dy *del denominador, multiplicada por el numerador* x, *partido todo por el quadrado del denominador*. Esta es la regla que se suele dar para la diferenciacion de los quebrados; pero no es necesario afanarse por tenerla presente; bastará quando se hubiere de diferenciar algun quebrado, traspasar el denominador al numerador, y despues diferenciar.

330 Para diferenciar ax^3y^2, consideraremos desde luego x^3 é y^2 como dos variables lineares, y (326) será $d(ax^3y^2) = ax^3d(y^2) + ay^2d(x^3)$; despues sacaremos (327) $d(ax^3y^2) = 2ax^3ydy + 3ay^2x^2dx$. En general, $d(ax^my^n) = ax^md(y^n) + ay^nd(x^m) = nax^my^{n-1}dy + may^nx^{m-1}dx$.

331 Quando la cantidad que se ha de diferenciar es un polynomio en el qual no hay potencia ninguna de cantidades complexas, se sacará su diferencial con sacar separadamente la de cada uno de sus términos. Será, pues, $d(ax^3 + bx^2 + cxy) = 3ax^2dx + 2bxdx + cydx + cxdy$; $d(ax^2 + bx + \frac{cy}{x^2}) = d(ax^2 + bx + cyx^{-2}) = 2axdx + bdx + cx^{-2}dy - 2cx^{-3}ydx$; $d(x^3y + ay^2 + b^3) = 3x^2ydx + x^3dy + 2aydy$, porque la constante b^3 no tiene diferencial.

332 Si todo el polynomio estuviere debajo de un mis-

Fig. mismo esponente, como $(a+bx+cx^2)^5$, se considerará todo el polynomio como una sola variable, cuya diferencial se sacará por la regla dada (327) en orden á la diferenciacion de las potencias: por consiguiente $d(a+bx+cx^2)^5 = 5(a+bx+cx^2)^4 \times d(a+bx+cx^2) = 5(a+bx+cx^2)^4 \times (bdx+2cxdx)$. Por lo mismo, $d(a+bx^2)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(a+bx^2)^{\frac{2}{3}} \times d(a+bx^2) = \frac{5}{3}(a+bx^2)^{\frac{2}{3}} \times 2bxdx = \frac{10}{3}bxdx\,(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}$.

333 Si la cantidad, sobre ser compuesta, constase tambien de varios factores, se consideraria cada factor como una sola variable, y se sacaria su diferencial por la regla dada (326) acerca del producto de muchas variables lineares. Por consiguiente, si hubiésemos de diferenciar la cantidad $x^3(a+bx)^{\frac{5}{3}}$, la consideraríamos como compuesta de los dos factores x^3 y $(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}$; sería, pues, $d\left[x^3(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}\right] = (a+bx^2)^{\frac{5}{3}}\,d(x^3) + x^3 d(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}$, que por las reglas precedentes se reduce á $3x^2dx(a+bx^2)^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{3}bx^4dx\,(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}$. Por lo mismo $d\left[\frac{(x+a)^3}{(x+b)^2}\right] = d\left[(x+a)^3 + (x+b)^{-2}\right] = (x+a)^3\ d\,(x+b)^{-2} + (x+b)^{-2}d(x+a)^3$; esto es, $-2(x+a)^3(x+b)^{-3}dx + 3(x+b)^{-2}(x+a)^2dx$, que se transforma en .... $\frac{-2(x+a)^3dx}{(x+b)^3} + \frac{3(x+a)^2dx}{(x+b)^2}$, que se reduce á $\frac{(x+3b-2a)(x+a)^2dx}{(x+b)^3}$.

334 Quando se hubiere de diferenciar una cantidad radical, se substituirán en lugar de los radicales (II. 78) esponentes quebrados, y despues se diferenciará la cantidad por las reglas dadas hasta aquí. $d(\sqrt{x}) = d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$; $d(\sqrt[5]{x^3}) = d(x^{\frac{3}{5}}) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}dx$; $d(\sqrt{aa-xx}) = d(aa-xx)^{\frac{1}{2}}$ $=$

$= \frac{1}{2}(aa - xx)^{-\frac{1}{2}} d(aa - xx) = - xdx (aa - xx)^{-\frac{1}{2}}$ Fig.

$= \frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$; $d\left[x^m \sqrt[q]{(a+bx^n)^p}\right] = d\left[x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\right]$

$= x^m d(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} + (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} d(x^m) = \frac{pnb}{q} x^{m+n-1}dx$

$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1} + mx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$.

335 Aunque bastan las reglas que hemos declarado hasta ahora para diferenciar qualesquiera cantidades, nos parece del caso manifestar tambien quan socorridas son en muchos casos las *substituciones* para la diferenciacion de las cantidades.

Supongamos que se nos ofrezca diferenciar la cantidad $\sqrt{(2ax - xx)}$: la transformaremos en $(2ax - xx)^{\frac{1}{2}}$, cuya diferencia es $\frac{1}{2}(2ax - xx)^{\frac{1}{2}-1} d(2ax - xx) = \frac{d(2ax-xx)}{2(2ax-xx)^{\frac{1}{2}}}$, y como $d(2ax - xx) = 2adx - 2xdx$, la diferencial que buscamos será $\frac{adx-xdx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$. Para diferenciar la misma cantidad por medio de las substituciones, haremos $\sqrt{(2ax - xx)} = y$, y $2ax - xx = yy$; diferenciando y dividiendo por 2, tendremos $adx - xdx = ydy$; luego $\frac{adx-xdx}{y} = \frac{adx-xdx}{\sqrt{(2ax-xx)}} = dy$, lo mismo que sacamos antes.

La diferencial de $\frac{1}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ la sacaríamos haciendo $(2ax - xx)^{-\frac{1}{2}}$, cuya diferencial será $-\frac{1}{2}(2ax - xx)^{-\frac{3}{2}}$ $(2adx - 2xdx) = \frac{-(adx-xdx)}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}$. Si la quisiéramos sacar por medio de las substituciones, haríamos $\frac{1}{\sqrt{(2ax-xx)}} = y$; luego $\frac{1}{y} = \sqrt{(2ax-xx)}$; diferenciando ambos miembros

Fig. bros saldrá $\frac{-dy}{y^2} = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, ó $dy = - y^2\left(\frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}\right) = \frac{-(adx - xdx)}{(2ax - xx) \times [\sqrt{(2ax - xx)}]}$ como antes, porque $(2ax - xx) \times (2ax + xx)^{\frac{1}{2}} = (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$.

336 En todas las reglas que hemos dado hasta ahora para la diferenciacion de las cantidades hemos supuesto que las variables x, y &c. crecen todas á un tiempo; esto es, que en el mismo tiempo que x llega á ser $x + dx$, y llega á ser $y + dy$, y así de las demás. Pero como ocurren casos en que al paso que unas variables crecen, las otras menguan, es preciso espresar esta diferencia en la diferencial, dandola el signo — á la diferencial de la variable que vá en diminucion. Tambien se puede dejar, si se quiere, la diferencial, qual la dán las reglas antecedentes; pero si se hiciese uso de ella para la resolucion de alguna cuestion, convendrá tomar negativamente la cantidad que representare la variable que vá menguando. Con efecto, si y disminuye de una cantidad q, y al tiempo de diferenciar suponemos que y llega á ser $y + dy$, será preciso que $y - q = y + dy$, ó que $-q = dy$, ó que $q = -dy$; por consiguiente será preciso que despues de egecutada la diferenciacion llamemos $-dy$ lo que hubiésemos llamado dy al tiempo de egecutarla.

De las Diferenciales logarítmicas.

144. 337 Si en la linea indefinita AN se toman ácia la derecha las partes AC, CE, EG, GI, IL &c. y ácia la izquierda las partes AC', $C'E'$, $E'G'$ &c. todas iguales las unas

unas á las otras, y en los puntos G', E', C', A, C, E, G, Fig.
I, L se tiran á la AN las perpendiculares $G'H'$, $E'F'$, $C'D'$, AB, CD, EF, GH, IK, LM, que formen una progresion geométrica, y representan los números, siendo AB la unidad; las lineas AC, AE, AG, AI, AL formarán una progresion arismética, espresarán las distancias respectivas á que cada término CD, EF, GH &c. de la progresion geométrica estará de la unidad, ó primer término AB, ó (II. 345) serán los logaritmos de cada término de la espresada progresion geométrica. Y así como AG es tripla de AC, ocupará el número GH el tercer lugar despues de la unidad AB, con tal que CD ocupe el primero, LM ocupará el quinto lugar por ser $AL = 5AC$.

La curva que pasa por los estremos H', F', D', B, D, F, H &c. de las lineas que forman la progresion geométrica y representan los números, se llama la *Logarítmica*, cuyas abscisas AC, AE &c. son por lo dicho los logaritmos de las ordenadas correspondientes CD, EF &c.

338 Si suponemos que crece la abscisa AP de la cantidad infinitamente pequeña Pp, y que en el punto p 145.
se tira la ordenada pm, y la linea Mr paralela á la abscisa AP; será mr el incremento de PM, esto es, la diferencia entre la ordenada PM y la ordenada pm infinitamente próxima á la primera. Por consiguiente si llamamos AP, x, y PM, y, será $Pp = dx$ y $mr = dy$.

Supongamos ahora que se nos ofrezca tirar en el punto M una tangente á la logarítmica, ó hallar el valor de

la

Fig. la subtangente PT. Los triángulos semejantes mrM, MPT darán $mr : rM :: MP : PT$, ó $dy, dx :: y : PT = \frac{ydx}{dy}$.

339 De la naturaleza de la logarítmica, y de lo dícho (II. 352) se sigue que siendo $x = Ly$, será $x + dx = AL\,(y + dy) = ALy + A\left(\frac{dy}{y} - \frac{(dy)^2}{2y^2} + \frac{(dy)^3}{3y^3}\ \&c\right)$. Pero una vez que $x = ALy$, es preciso que $dx = A\left(\frac{dy}{y} - \frac{(dy)^2}{2y} + \frac{(dy)^3}{3y^4} - \&c\right)$. Y como las cantidades $(dy)^2$, $(dy)^3$ &c. son despreciables, será $dx = \frac{Ady}{y}$; substituyendo este valor en la espresion $\frac{ydx}{dy} = PT$, sacarémos $PT = A$, esto es, que la subtangente de la logarítmica es igual al módulo.

340 Será, pues, $\frac{ydx}{dy} = A$ la equacion de la logarítmica. Pero sacarémos otra, si llamamos c el número cuyo logaritmo natural es 1. Porque la propiedad de la curva nos dá $x = ALy = xLc$; luego (II. 347) $y^A = c^x$, que será otra equacion de la logarítmica.

341 Como en general $x = ALy$, la equacion $dx = \frac{Ady}{y}$ nos está diciendo que la diferencial del logaritmo x de la cantidad y, es igual á la diferencial de la cantidad misma multiplicada por el módulo y dividida por la misma cantidad.

342 Si llamamos B la subtangente de otra logarítmica, y buscamos en ella el valor de la abscisa u que corresponde á la misma ordenada y; quiero decir que si en una logarítmica cuya subtangente $= B$ buscamos qual será el logaritmo u del mismo número y, sacaremos por el mismo método $u = BLy$, y por consiguiente $x : u :: ALy : BLy :: A : B$, cuya proporcion manifiesta que en dos logarít-

rítmicas diferentes, las abscisas correspondientes á una misma ordenada, ó los logaritmos correspondientes á un mismo número, están en la misma razon que los módulos ó las subtangentes de las logarítmicas. Fig.

343 Quanto digamos acerca de las cantidades logarítmicas debe entenderse en el supuesto de ser el módulo $= 1$, y entónces la espresion $dx = \frac{Ady}{y}$ es $dx = \frac{dy}{y}$, y nos está diciendo que la diferencia del logaritmo natural de una cantidad es igual á la diferencial de dicha cantidad dividida por la cantidad misma.

344 Todo esto supuesto, será facil percibir el fundamento de los egemplos siguientes. $dLx = \frac{dx}{x}$; $dL\,(a+x) = \frac{d\,(a+x)}{a+x} = \frac{dx}{a+x}$; $dL\left(\frac{a}{a+x}\right) = d\left[La - L\,(a+x)\right] = -\frac{d\,(a+x)}{a+x} = -\frac{dx}{a+x}$, teniendo presente que la constante La no tiene diferencial.

Los mismos principios demuestran que $dL\,\frac{1}{x} = d\,(L\,1 - Lx) = -\frac{dx}{x}$; $dL\,(x^2) = d\,(2\,Lx) = \frac{2dx}{x}$; $dL\,(xy) = d\,(Lx + Ly) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$; $d\,(L\frac{x}{y}) = d\,(Lx - Ly) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$; $dL\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = d\left[L\,(a+x) - L\,(a-x)\right] = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$; $d\left[L\,(aa+xx)\right] = \frac{2xdx}{aa+xx}$; $dL\,\sqrt{(aa+xx)} = \frac{d\,\sqrt{(aa+xx)}}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{xdx}{\sqrt{(aa+xx)}\,.\,\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{xdx}{aa+xx}$; tambien tendrémos $dL\,\sqrt{(aa+xx)} = dL\,(aa+xx)^{\frac{1}{2}} = d\left[\frac{1}{2}\,L\,(aa+xx)\right] = \frac{xdx}{aa+xx}$; $dL\left[x^m\,(a+bx^n)^p\right] = d\left[Lx^m + L\,(a+bx^n)^p\right] = d\left[mLx + pL\,(a+bx^n)\right] = \frac{mdx}{x} + \frac{npbx^{n-1}dx}{a+bx^n}$.

De

Fig.

De la diferenciacion de las cantidades esponenciales.

345 Llamamos *cantidades esponenciales* las que están elevadas á alguna potencia cuyo esponente es variable; tales son, por egemplo, a^x; y^x; a^xy^x; a^x+y^x &c.

346 Hay cantidades esponenciales de primero, segundo &c grado. Las de primer grado son todas aquellas cuyo esponente no es mas que una indeterminada; tales son a^y, b^x, z^t, en el supuesto de ser y, x, t no mas que variables. Las esponenciales de segundo grado son aquellas cuyo esponente es una esponencial del primer grado; tal sería a^{x^y}, y así de las demás. En general, una esponencial de un grado qualquiera lleva por esponente una esponencial del grado precedente.

347 Lo que acabamos de decir acerca de las cantidades esponenciales debe entenderse igualmente de las equaciones esponenciales, que son todas aquellas cuyos términos son todos, ó algunos de ellos cantidades esponenciales. Las curvas cuya naturaleza está cifrada en alguna equacion esponencial, se llaman tambien curvas esponenciales. Quando en la equacion de una curva esponencial hay esponenciales de diferentes grados, la equacion y la curva que representa, toman el nombre de la esponencial de grado mayor.

348 Es facil transformar una equacion esponencial en otra equacion que contiene los logaritmos de las cantidades de la primera. Si tuviéramos, por egemplo, $a^x =$ b^y,

b^y, sacarémos $L\left(a^x\right) = L\left(b^y\right)$, porque si son iguales dos cantidades, lo serán tambien sus logaritmos. Como (II. 347) $La^x = xLa$, y $L\left(b^y\right) = yLb$, quedará $a^x = b^y$ transformada en estotra $xLa = yLb$, que es mas sencilla. Fig.

De $a^{x^z} = b^{y^u}$ sacarémos $x^z La = y^u Lb$, y de esta última $zLx + L.La = uLy + L.Lb$.

349 Es muy facil la diferenciacion de las cantidades esponenciales. Supongamos, por egemplo, que se nos ofrezca diferenciar x^y; haremos $x^y = z$; luego $Lx^y = Lz$; por consiguiente $dL\left(x^y\right) = \frac{dz}{z}$, y $dz = zdL\left(x^y\right)$; de donde sacaremos $d\left(x^y\right) = x^y d\left(x^y\right)$, con substituir en lugar de z y dz sus valores. Luego la *diferencial de una cantidad esponencial se saca multiplicando la esponencial misma por la diferencial de su logaritmo.*

En virtud de esta regla $d\left(x^y\right) = x^y d\left(Lx^y\right) = x^y d(yLx) = x^y\left(Lxdy + \frac{ydx}{x}\right)$. Por lo mismo $d\left(a^x + y^z\right) = d\left(a^x\right) + d\left(y^z\right) = a^x d\left(La^x\right) + y^z d\left(Ly^z\right) = a^x d(xLa) + y^z d(zLy) = a^x dxLa + y^z\left(dzLy + \frac{zdy}{y}\right)$. La diferencial de $(aa + xx)^x$ será $(aa + xx)^x . dL(aa + xx)^x = (aa + xx)^x d\left[xL(aa + xx)\right] = (aa + xx)^x\left[dxL(aa + xx) + \frac{2xdx}{aa + xx}\right]$.

Si hubiéramos de diferenciar la esponencial c^x, siendo c la cantidad cuyo logaritmo $= 1$; sería, en virtud de lo dicho, la diferencial de la espresada cantidad $c^x d\left(Lc^x\right)$, que se reduce á $c^x d(xLc) = c^x dxLc$; y como suponemos que $Lc = 1$, resulta que $d\left(c^x\right) = c^x dx$, esto es, que la diferencial de esta esponencial particular es igual á

Fig. la esponencial misma multiplicada por la diferencial de su esponente.

De las diferenciales de los senos, cosenos &c.

146. 350 Supongamos que sea AB un quadrante de círculo cuyo radio $AC = r$; si llamamos u el arco BM; su seno QM, x; será su coseno $QC = \sqrt{(rr - xx)}$; $M'N = dx$, y $MM' = du$. Los triángulos semejantes $M'NM$, CQM darán esta proporcion $CQ : CM :: M'N : MM'$ ó $\sqrt{(rr - xx)} : r :: dx : du = \frac{rdx}{\sqrt{(rr-xx)}}$.

351 Luego si el radio del círculo fuere $= 1$, sacaríamos que $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ sería la diferencial de un arco u cuyo seno es x.

352 De donde inferirémos que siendo u un arco cuyo radio $= 1$, será $du = \frac{d(\text{sen}\, u)}{\cos u}$, y por consiguiente $d\,(\text{sen}\, u) = du. \cos u$; esto es, que la diferencial del seno de un arco cuyo radio es la unidad, es igual á la diferencia del mismo arco multiplicada por su coseno.

146. 353 En el mismo supuesto de ser $CA = r$; BM, u; el coseno PM del arco BM, x; su seno MQ será $= \sqrt{(rr + xx)}$; $MM' = du$, y $MN = -dx$, porque quando el arco BM crece y llega á ser $u + du$, su coseno mengua (II. 364) y llega á ser $x - dx$. Sentado esto, los triángulos semejantes CPM, MNM' darán $PC : CM :: M'N : MM'$, ó $\sqrt{(rr - xx)} : r :: - dx : du = \frac{-rdx}{\sqrt{rr-xx}}$.

354 Luego tambien será verdad que en el supuesto de ser

ser el radio $= 1$, u un arco, x su coseno, será $du = \frac{-dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$. Fig.

355 Luego $du \times \sqrt{(1 - xx)} = -dx$, ó $dx = -du\sqrt{(1 - xx)}$, cuya espresion significa que la diferencial del coseno de un ángulo cuyo radio $= 1$, es igual á la diferencial del ángulo mismo tomada negativamente, y multiplicada por su seno.

356 Si proseguimos suponiendo que sea el radio AC 147.
$= r$; y llamamos el arco AM, u; su tangente AT, x; será $MM' = du$, y $TT' = dx$; y si tiramos la TR perpendicular á CT', resultarán dos triángulos semejantes CMM', CTR. Los triángulos CAT, TRT' serán tambien semejantes; porque los triángulos ACT, ACT' son semejantes, pues sobre ser comun á ambos el ángulo recto A, los ángulos ACT, ACT' son iguales, porque no discrepan el uno del otro, sino del ángulo infinitamente pequeño TCT'. Pero los triángulos ACT', TRT' son tambien semejantes, pues sobre ser rectángulos, el uno en A, y el otro R, tienen comun el ángulo T'; luego serán semejantes los triángulos CAT', TRT'.

Sentado esto, de los triángulos CMM' CTR sacarémos $CT : CM :: TR : MM'$, y los triángulos TRT', CAT darán $CT : CA :: TT' : TR$. Si multiplicamos ordenadamente estas dos proporciones, sacaremos $(CT)^2 : CM \times CA :: TR \times TT' : TR \times MM' :: TT' : MM'$; substituyendo en lugar de las lineas sus valores literales, y considerando que $(CT)^2 = rr + xx$, sacaremos finalmente $rr + xx : rr : dx : du = \frac{rrdx}{rr + xx}$.

Fig.

357 Luego si el radio del círculo fuese $= 1$, hallaríamos por el mismo camino que la diferencia de su arco AM, cuya tangente es x, ó que du sería $= \frac{dx}{1+xx}$.

358 Luego tambien es verdad, que siendo el radio $= 1$, $du = \frac{d(\text{tang } u)}{1+(\text{tang })^2} = \frac{d(\text{tang } u)}{(\text{sec } u)^2}$, y por lo mismo $du \left(1 + (\text{tang } u)^2\right) = du (\text{sec } u)^2 = d(\text{tang } u)$.

Como tang $u = \frac{\text{sen } u}{\cos u}$ (II. 367), sacaríamos igualmente que $d(\text{tang } u) = d\left(\frac{\text{sen } u}{\cos u}\right) = d\left[(\text{sen } u)(\cos u)^{-1}\right]$ que por lo dicho (326 y 352) $= du \cos u (\cos u)^{-1} + du (\text{sen } u)^2 (\cos u)^{-2} = \frac{du \cos u}{\cos u} + \frac{du(\text{sen } u)^2}{(\cos u)^2} = \frac{du(\cos u)^2 + du(\text{sen } u)^2}{(\cos u)^2} = \frac{du}{(\cos u)^2}$, porque $(\cos u)^2 + (\text{sen } u)^2 = 1$.

359 Luego la diferencial de la tangente de un arco cuyo radio $= 1$ es igual á la diferencial del arco mismo dividida por el quadrado de su coseno.

360 De donde tambien inferiremos que la diferencial de un ángulo es igual á la diferencial de su tangente, multiplicada por el quadrado de su coseno; porque de $d(\text{tang } u) = \frac{du}{(\cos u)^2}$, sacarémos $du = (\cos u)^2 d(\text{tang } u)$.

361 De aquí inferirémos la diferencial de la cotangente de un arco u, cuyo radio $= 1$. Porque segun hemos visto (II. 368) tang $u = \frac{1}{\cot u} = \frac{\text{sen } u}{\cos u}$. Por consiguiente, si substituimos la diferencial de $\frac{1}{\cot u}$, que por lo dicho (329) es $\frac{-d(\cot u)}{(\cot u)^2}$ en lugar de $d(\text{tang } u)$ en la equacion $du = d(\text{tang } u) \times (\cos u)^2$, resultará $du = \frac{-d \cot u}{(\cot u)^2} \times (\cos u)^2 = - d \cot u \times (\cos u)^2 \times \frac{1}{(\cot u)^2} = - d \cot u \times (\cos u)^2 \times \frac{(\text{sen } u)^2}{(\cos u)^2} = - d \cot u \times (\text{sen } u)^2$; finalmente $du = - d \cot u (\text{sen } u)^2$ que dá $\frac{-du}{(\text{sen } n)^2} = d \cot u$, y está diciendo que

la

la diferencial de un arco u cuyo radio $=1$ es igual á la diferencial de dicho arco tomada negativamente, y dividida por el quadrado de su seno. Fig.

362 Sea como antes $=r$ el radio CA del círculo, cuyo quadrante es AB; y llamemos u el arco AM; x, su secante CT. Será $RT' = dx$; $MM' = du$; y la tangente $AT = \sqrt{(xx - rr)}$. Tiremos ahora desde el punto C y con el radio CT el arco TR, resultarán dos triángulos semejantes CMM', CTR que darán esta proporcion $CM : CT :: MM' : TR$; esto es, $r : x :: du : TR = \frac{xdu}{r}$: Los triángulos semejantes TRT', TAC dan estotra proporcion $CA : TA :: TR : RT'$; esto es, $r : \sqrt{(xx - rr)} :: \frac{xdu}{r} : dx$. De donde sacaremos, despues de multiplicados los estremos y los medios, y de hechas todas las operaciones correspondientes, $du = \frac{rrdx}{x\sqrt{(xx - rr)}}$. 147.

363 Luego si $r = 1$, será $\frac{xdx}{x\sqrt{(xx-1)}}$ la diferencial de un arco ó ángulo cuya secante fuere x.

De algunas Curvas Mecánicas.

364 La naturaleza de todas las curvas de que hemos hecho mencion hasta aquí, á excepcion de la logarítmica, la hemos visto cifrada en equaciones, cuyos términos eran todos cantidades del cálculo algebráico, sin haber cantidad alguna diferencial; hemos visto tambien que las coordenadas de dichas curvas son lineas rectas, manteniéndose las ordenadas constantemente paralelas las unas á las otras, y por este motivo las hemos llamado *Curvas alge-*

Fig. *bráicas* ó *geométricas*, conformándonos con la práctica de todos los Matemáticos. Pide, pues, la claridad, igualmente que la exactitud, que demos otro nombre á todas las curvas en quienes no concurren las mencionadas circunstancias, y esta es la razon de llamarse *Curvas trascendentes* ó *mecánicas*. Son, pues, mecánicas todas las curvas 1.° en cuya equacion hay cantidades infinitamente pequeñas, que representan sus coordenadas, de las quales puede ser la una ó pueden ser ambas arcos de curvas, ó son tales que no se encuentran, y no forman una con otra ángulo ninguno. 2.° cuyas ordenadas pueden no ser paralelas las unas á las otras, y pueden salir todas desde un mismo punto. 3.° cuya naturaleza no puede cifrarse en una equacion, cuyos términos sean todos cantidades del cálculo algebráico, siendo preciso que contenga cantidades diferenciales. 4.° su equacion diferencial ha de espresar no obstante la relacion que hay entre todos los puntos de la curva, y todos los puntos de otra linea recta ó curva; por manera que quadre dicha equacion con cada uno de los puntos de la curva.

De la Quadratriz de Dinostrates.

148. 365 La primera curva mecánica que consideraremos es la Quadratriz de Dinostrates, cuya generacion es como sigue. Si dado el quadrante de círculo ADC, y la tangente AH, se le hace dar al radio AB la vuelta al rededor del centro B, y anda en tiempos iguales arcos iguales de la circunferencia ADC; y al mismo tiempo concebimos

que

que la recta *AH* baja á lo largo del radio *AB*, manteniéndose constantemente paralela á sí misma, y andando tambien en tiempos iguales porciones iguales del radio; por manera que en el tiempo que *AH* anda la quarta parte del radio *AB*, el radio *AB* ande la quarta parte de *ADC*, y llegan la recta *AH*, y el radio *AB* á confundirse ambas á un tiempo con la *BC*: la interseccion continua *E*, E' de la linea *AH* con el radio *AB* á medida que este dá la vuelta, engendrará la curva *AEF* que se llama *Quadratriz*, y la inventó *Dinostrates*. Fig.

148. Para sacar la equacion de la quadratriz llamarémos a el quadrante de círculo *ADC*; el radio *AB*, b; las abscisas *AG*, AG', x; los arcos correspondientes *AD*, AD' &c. del círculo, y. Sentado esto, fundados en la generacion de la curva, podemos decir: Como la circunferencia *ADC*, andada en un minuto, por egemplo, es al radio *AB*, andado tambien en un minuto; así el arco *AD*, andado en un quarto de minuto es á la linea *AG*, andada tambien en un quarto de minuto; ó $a : b :: y : x$; luego $ax = by$, é $y = \frac{ax}{b}$.

Es la quadratriz, segun se echa de ver, una curva mecánica, porque los arcos *AD*, AD' sirven de aplicadas; las abscisas, y las ordenadas no se encuentran sino en el punto *A*; y para sacar cabal la relacion que hay entre las x y las y, sería indispensable conocer exactamente la razon que hay entre arcos de círculo, y lineas rectas.

Fig.

De la Espiral de Arquimedes.

366 Supongamos que el círculo $ABCD$ y su radio aA estén divididos en un mismo número de partes
149. iguales, en doce por egemplo; y supongamos tambien que mientras el radio aA anda partes iguales de la circunferencia en tiempos iguales, caminando desde A ácia B, C, D &c. el punto central a ande tambien en tiempos iguales partes iguales del radio, caminando desde a ácia A; por manera que quando el punto A del radio vuelve á A de donde salió, el punto a del mismo radio llegue tambien a A; el punto a trazará en fuerza de estos dos movimientos la curva $abcdA$, que se llama la *Primera espiral de Arquimedes* su inventor. Para trazar la segunda $AghiF$, sería menester suponer que el punto a despues de llegado á A, prosiga andando la linea $AF = aA$ del radio prolongado, mientras el nuevo radio aF anda la circunferencia del segundo círculo $FGHI$ concéntrico con el primero, caminando siempre partes iguales en tiempos iguales. Y como se puede prolongar al infinito el radio aF, se pueden trazar una infinidad de espirales que podrémos considerar como la continuacion de una sola curva.

Para hallar la equacion de la primera espiral perteneciente á uno qualquiera de sus puntos c, llamarémos a la circunferencia del primer círculo dado $ABCD$; y al radio dado aA, b; tomarémos por una abscisa, x, el arco indeterminado ABC; y llamarémos y una ordenada $ac =$

a6. Porque quando el radio aA hubiese llegado á aC, el punto 6 se confundirá con el punto c. Todo esto sentado, es evidente que ha de haber la misma razon entre toda la circunferencia a del círculo andada en un minuto, por egemplo, y el arco ABC, x, andado en medio minuto, que entre el radio b andado tambien en un minuto, y su porcion $a6 = ac$, $= y$ andada en medio minuto; esto es, que $a : x :: b : y$; luego $ay = bx$, é $y = \frac{bx}{a}$. La misma equacion sacaríamos respecto de otra espiral $Agbi$, con llamar la circunferencia de su círculo $FGHI$, a; la recta AF, b; un arco qualquiera FG del círculo, x; y la porcion correspondiente An del radio $= Bg$, y. Fig. 149.

Es la espiral una curva mecánica, porque sus abscisas x son arcos de círculo; sus ordenadas ab, ac, ad &c. salen todas de un mismo punto, y no son por consiguiente paralelas las unas á las otras; las coordenadas ABC, ac no se cortan ni forman unas con otras ángulo ninguno. Para conocer exacta y geométricamente la relacion que tienen las abscisas con las ordenadas, sería indispensable conocer la relacion que hay entre arcos de círculo y lineas rectas. Si consideramos como una sola espiral las espirales que se pueden trazar al infinito con prolongar aF, la misma linea aAF que será su ege, la encontrará en una infinidad de puntos.

De la Espiral parabólica ó Parábola helicoide.

367 Si en el círculo $ACaF$ cuyo centro es B, to- 150.

ma-

Fig. mamos un punto fijo A, tiramos los radios CB, cB, y tomamos en ellos las CD, cd medias proporcionales entre
150. los arcos correspondientes AC, Ac y una recta dada b; la curva que pasare por todos los puntos D, d se llama *Espiral parabólica* ó *Parábola helicoide*, que es evidentemente una curva mecánica.

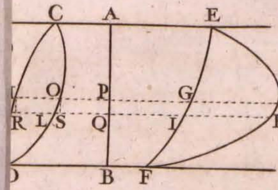
Para hallar su equacion, llamarémos b el radio BC del círculo; los arcos AC, Ac, x, que serán las abscisas; las ordenadas DC, Dc, y; y como por la construccion $(DC)^2 = AC \times b$ ó $yy = bx$, esta será la equacion de la curva que es la misma que la de la parábola vulgar, suponiendo que su ege se ha transformado en círculo.

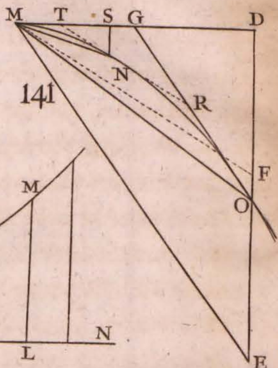
Como despues de haber tomado las AC, Ac que hay en la circunferencia, se pueden volver á tomar mirando el punto A como su origen, de modo que las abscisas sean toda la circunferencia que llamarémos c mas AC, ó $c+x$, $2c+x$ &c. la curva dará una infinidad de vueltas.

De la Espiral hyperbólica.

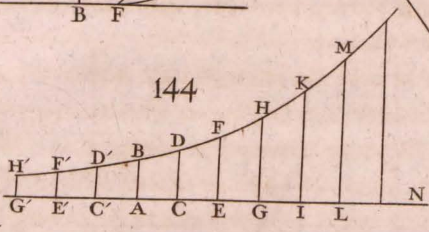
151. 368 Si desde el punto C de la línea indefinita CP como centro, se trazan arcos AG, QM, PO &c. iguales los unos á los otros, y por sus estremos G, M, O &c. se traza una curva $CKGMO$, dicha curva se llamará *Espiral hyperbólica*.

Para sacar su equacion llamarémos CA, a; AN, x; CM, y; $AG = QM = b$; y tendrémos $x : b :: a : y$, y $xy = ab$, cuya equacion se parece á la de la hypérbola re-

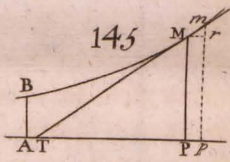




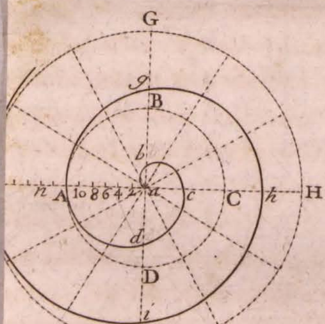
141



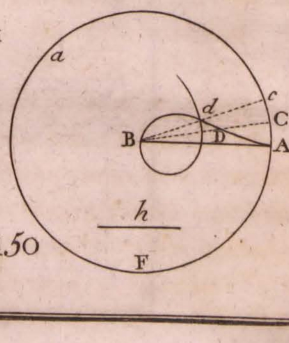
144



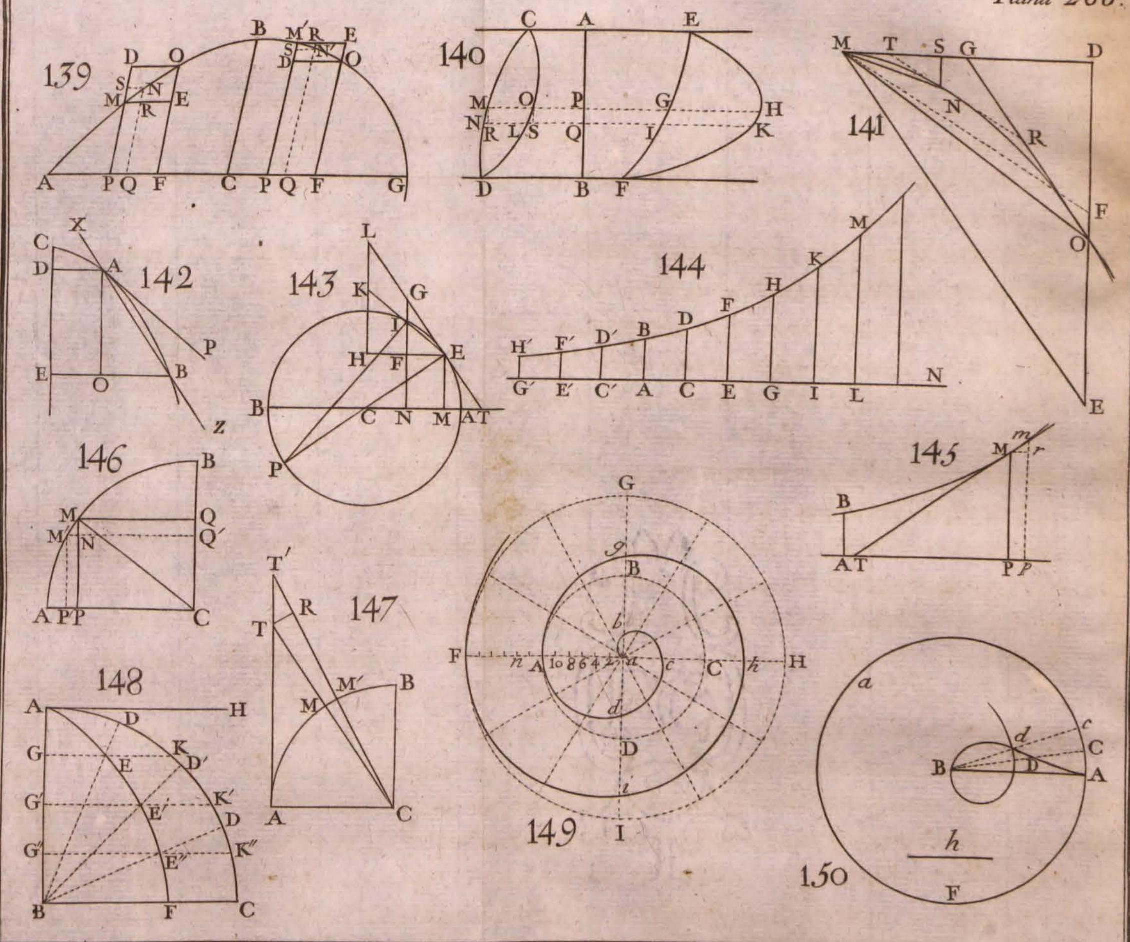
145



149



1.50


139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150

refiriéndola á sus asýmtotas. De $xy = ab$ sacarémos $y = \frac{a}{x}$; Fig.
y si llamamos c la circunferencia cuyo radio $= a$, y subs- 151.
tituimos succesivamente en lugar de x, $c + x$, $2c + x$ &c ..... $mc + x$, tendrémos succesivamente $y = \frac{ab}{c+x}$, $y = \frac{ab}{2c+x}$ ... $y = \frac{ab}{mc+x}$. De donde se sigue, que quanto mayor fuere la abscisa, tanto menor será la ordenada, y que esta es cero quando m es infinita. Por consiguiente la espiral hypérbolica dá una infinidad de vueltas al rededor de su centro antes de llegar á él.

De la Cycloide.

369 Imaginemos que el círculo GHK toque la línea DE, de modo que al principio el punto H de la circun- 152.
ferencia, y el punto D de la linea DE se confundan uno con otro: que el círculo dé la vuelta sobre la recta DE, con la circunstancia de que todos los puntos de la circunferencia se apliquen succesivamente sobre los puntos de la recta: el punto H trazará en virtud de este movimiento la curva $DHBE$ que se llama *Cycloide* ó *Trocboyde.*

Para manifestar su naturaleza, imaginemos que ha llegado el círculo á la situacion GHK, quando llega á H el punto que traza la curva, y que se tire entonces el diámetro GK perpendicular á DE. Quando el punto generador H se confundiere con el punto B, que es el mas distante de la recta DE, y esté el círculo en la situacion AFB, se tirará por el punto H la HI paralela á DE, que cortará GK en L, y en F la circunferencia AFB: tírense las

cuer-

Fig. cuerdas HG, FA. Una vez que los arcos HG, FA de círculos iguales están comprehendidos entre unas mismas paralelas HI, DA, serán iguales; luego tambien lo serán las cuerdas HG, FA, y los ángulos HGK, FAB; luego las cuerdas HG y FA serán iguales y paralelas, y será el quadrílátero $HGAF$ un paralelogramo.

Sentado esto, como la circunferencia AFB se ha aplícado succesivamente á la linea DA, será igual á esta linea, y por la misma razon el arco HG ó su igual AF será igual á la recta DG: por consiguiente el arco BF será igual á la recta GA; y como $GA = HF$, será $FB = HF$. Mirando, pues, HI como la ordenada de la cycloide, tirada desde el punto H perpendicularmente á su ege BA, podemos decir que la parte HF de la ordenada siempre es igual al arco correspondiente BF del círculo generador. Y como la otra porcion FI de la ordenada es el seno del mismo arco, que llamaremos u, tendremos para espresar la naturaleza de la cycloide esta equacion $y = u +$ sen u.

Si el círculo generador no tuviese otro movimiento que el de rotacion, la cycloide se llamará *Cycloide vulgar*. Pero si al mismo tiempo tuviere algun movimiento de translacion ácia E, la cycloide que el punto H trazare, se llamará *Cycloide acortada*; y si el movimiento de translaccion fuere ácia D, engendrará el punto H la *Cycloide prolongada*. Es evidente que en la cycloide vulgar la base DE es igual á la circunferencia del círculo generador, que es menor

nor en la cycloide acortada, y mayor en la cycloide prolongada. Fig.

En virtud de esto, podemos cifrar la naturaleza de la cycloide en una equacion mas general todavia que la que dimos poco há. Porque si hacemos $HF = \frac{b}{a} BF$, convendrá esta espresion á la cycloide vulgar, ó la acortada, ó la prolongada, segun fuere b igual, menor ó mayor que a: por manera que la equacion general de la curva será $y = \frac{b}{a} u + \text{sen}\, u$.

Aplicacion del Cálculo diferencial á la doctrina de las lineas curvas.

370 Ahora indagaremos acerca de las curvas los puntos que especificamos (32), y otros muchos, cuya averiguacion hubiera sido mas dificultosa, y respecto de algunos imposible, por el álgebra comun. Este es el motivo que nos obligó á dejar para este lugar su investigacion, en que nos podremos empeñar por un término sumamente general; aplicándose el nuevo medio de que nos podemos valer á las curvas mecánicas igualmente que á las geométricas.

De las tangentes, subtangentes, normales &c. de las lineas curvas.

371 Indagarémos primero cómo se le ha de tirar una tangente á una curva qualquiera, cuya equacion es dada. Porque esto nos manifestará qué ángulo forma la curva en

el

Fig. el punto de contacto con su ordenada ó con el ege de las abscisas, y por consiguiente ácia qué lado volverá su convexidad ó su concavidad.

372 Para tirar una tangente á una línea curva qualquiera *AM*, se considerará dicha curva como un polýgono de una infinidad de lados infinitamente pequeños; la prolongacion *MT* de uno de sus lados *Mm* será su tangente que determinaremos respecto de cada punto *M*, con calcular el valor de la *subtangente PT*, ó de la porcion de la linea en la qual se cuentan las abscisas, comprehendida entre la ordenada *PM*, y el punto *T* de la tangente.

153. Por lo que mira al valor de la subtangente, le calcularemos imaginando tiradas por los dos estremos *M* y *m* del lado infinitamente pequeño *Mm* las dos ordenadas *MP*, *mp*, y por el punto *M* la linea *Mr* paralela á *AP* ege de las abscisas. El triángulo infinitamente pequeño *Mrm* será semejante al triángulo finito *TPM*, de donde sacaremos esta proporcion $rm : rM :: PM : PT$. Por consiguiente, si llamamos *AP*, x; *PM*, y; *Pp*, ó su igual *Mr* será evidentemente dx; y rm será dy; tendremos, pues, $dy : dx :: y : PT = \frac{ydx}{dy}$. Esta es la fórmula general para determinar la subtangente de qualquiera curva, ora formen las ordenadas con las abscisas un ángulo recto, ora formen otro ángulo qualquiera, con tal que las y sean constantemente paralelas las unas á las otras.

Supongamos ahora, para manifestar la aplicacion de este método, que la naturaleza de la curva *AM* esté cifrada

da en una equacion qualquiera que no lleva mas variables que x é y, y cantidades constantes. No habrá en dicha equacion, despues de diferenciada, ni podrá haber sino términos multiplicados por dx, y otros multiplicados por dy; será, pues, facil sacar de dicha equacion diferencial el valor de $\frac{dx}{dy}$, en cuyo valor no habrá sino x é y, y constantes; substituyendo este valor en la fórmula $\frac{ydx}{dy}$ ó $y \times \frac{dx}{dy}$, resultará el valor de la subtangente en x, y y constantes: finalmente, substituyendo en lugar de y su valor espresado en x, sacado de la equacion de la misma curva, el valor que saliere espresará el valor de la subtangente solo en x y constantes; y para determinar el valor de la subtangente respecto de un punto qualquiera M, solo restará substituir en este último resultado en lugar de x, el valor de la abscisa AP, que correspondiese á dicho punto M. Fig.

373 Por el mismo rumbo determinaremos las tangentes, las normales, subnormales, &c. Llamamos *Normal* de una curva la perpendicular que se la tira desde un punto de su ege; QM es la normal de la curva AM. La *Subnormal* es la porcion del ege comprehendida entre el punto donde la ordenada encuentra el ege, y el punto desde el qual se ha tirado la normal; QP es la subnormal de la curva AM. 153.

Supongamos, para huir por ahora de casos complicados, que las y sean perpendiculares á las x: para hallar la tangente volveremos á comparar el triángulo Mmr con el triángulo PTM, y sacaremos $rm : Mm :: PM : TM$; pero

por

Fig. por ser rectángulo el triángulo Mrm, $Mm = \sqrt{[(rM)^2 + (rm)^2]} = \sqrt{((dx)^2 + (dy)^2)}$; luego $dy : \sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]} :: y : TM$; luego $TM = \frac{y\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2}}{dy} = \frac{y\sqrt{[(dx)^2 + (dy)^2]}}{\sqrt{(dy)^2}} = y\sqrt{\left[\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dy)^2}\right]} = y\sqrt{\left[\frac{(dx)^2}{(dy)^2} + 1\right]}$. Por consiguiente despues de diferenciada la equacion de la curva sacarémos el valor de $\frac{dx}{dy}$, substituirémos su quadrado en la espresion de la tangente, substituirémos despues en lugar de y su valor en x, y constantes, sacado de la equacion de la curva, y resultará la espresion de la tangente en x, y constantes.

Para hallar la subnormal, imaginarémos la linea MQ perpendicular á la tangente TM, y de los triángulos Mrm, MPQ que son semejantes, inferirémos $Mr : rm :: PM : PQ$, esto es, $dx : dy :: y : PQ = \frac{ydy}{dx}$. Luego despues de sacado de la equacion diferenciada de la curva el valor de $\frac{dy}{dx}$, se substituirá en $\frac{ydy}{dx}$, y concluyendo resultará el valor de la subnormal en x y constantes.

Apliquemos, con la mira de hacer mas perceptible el método, la fórmula de las subtangentes y de las subnormales á la equacion de la parábola que es $yy = px$ (46). Diferenciando, saldrá $2ydy = pdx$; luego $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, y $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$; luego la subtangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$; y la subnormal $\frac{ydy}{dx} = \frac{py}{2y} = \frac{p}{2}$, cuyos valores son identicamente los mismos que sacamos (63 y 65).

374 Quando la equacion de la curva es tal que al paso que $AP = x$ crece, y mengua; entónces la linea rM será
154. $-dy$ (336), y la proporcion $rM : rm :: PM : PT$, que sir-

sirve para hallar la subtangente, viene á ser $-dy : dx :: y : PT = -\frac{ydx}{dy}$, cuya espresion en nada altera la práctica del método declarado: no hay mas novedad sino que la tangente en lugar de caer á la parte del origen A de las abscisas, respecto de la ordenada PM, caerá á la parte opuesta. En virtud de esto, la fórmula $\frac{ydx}{dy}$ podrá servir en todos los casos para determinar las subtangentes. Quando las ordenadas fueren menguando, el valor de $\frac{ydx}{dy}$ saldrá negativo y manifestará que la linea cuya espresion es, se deberá tomar á la parte opuesta respecto del origen de las x. Fig.

Por egemplo, la equacion del círculo, fijando en el centro el origen de las coordenadas y llamando a el diámetro AB, es (6) $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, en cuyo supuesto se viene á los ojos que á medida que CP ó x creciere, y ó PM menguará; por lo mismo la subtangente PT cae al otro lado de PM respecto del origen C de las abscisas, y lo dá tambien á conocer el cálculo; porque si diferenciamos, sale $2ydy = -2xdx$, y por consiguiente $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$; luego $\frac{ydx}{dy} = \frac{-y^2}{x} = -\frac{(\frac{1}{4}aa - xx)}{x}$ cuya espresion por ser negativa, nos está diciendo que su valor se ha de tomar del otro lado respecto del que se consideró quando se sacó la fórmula $\frac{ydx}{dy}$ de la subtangente. 155.

375 Declarado yá el método de determinar las tangentes, subnormales &c. de las curvas, podremos resolver con facilidad las dos cuestiones siguientes. 1.° *Desde un*

Fig. *punto dado fuera de una curva, tirar una tangente á dicha curva. 2.° Desde un punto dado, donde se quisiere, en el plano de una curva, tirar una perpendicular á dicha curva.*

Supongamos que sea DM la tangente que se pide; el
156. valor general de $PT = \frac{ydx}{dy}$ se sacará facilmente de la equacion de la curva. Si tiramos DB paralela á las ordenadas PM; la linea DB y su distancia BA del origen A de las abscisas, serán conocidas, pues suponemos dado de posicion el punto D. Llamando, pues, DB, h; AB, g; AP, x; y PM, y; será $PB = g + x$, y $TB = PT - BP = \frac{ydx}{dy} - x - g$. Pero los triángulos semejantes TBD, TPM dan $TB : BD :: TP : PM$; esto es, $\frac{ydx}{dy} - x - g : h :: \frac{ydx}{dy} : y :: \frac{dx}{dy} : 1$; luego $\frac{ydx}{dy} - x - g = \frac{hdx}{dy}$. Substituyendo, pues, en esta equacion el valor de $\frac{dx}{dy}$ sacado de la equacion diferenciada de la curva, saldrá una equacion en x, y y constantes, y substituyendo en ella en lugar de y su valor en x y constantes sacado de la equacion de la curva, resultará una equacion que dará el valor de x correspondiente al punto M donde ha de rematar la tangente; y si fuese posible tirar desde el punto D mas de una tangente, la equacion dará los valores de x correspondientes á los diferentes puntos en que habrian de rematar dichas tangentes.

157. Para tirar una perpendicular á una curva, supondremos que sea DQ dicha perpendicular, PQ será $\frac{ydy}{dx}$ (373); y usando de las mismas denominaciones que antes, los triángulos semejantes DBQ, MPQ darán $DB : BQ :: PM : PQ$;

es-

esto es, $h : g + x + \frac{ydy}{dx} :: y : \frac{ydy}{dx}$ ó :: $1 : \frac{dy}{dx}$; luego $\frac{hdy}{dx} = g + x + \frac{ydy}{dx}$, de cuya equacion haríamos el mismo uso que en el caso antecedente. Fig.

376 Aquí nos toca hacer una observacion que á su tiempo nos será de muchísima utilidad, y es, que $\frac{dx}{dy}$ espresa la tangente del ángulo que forma la curva en qualquiera de sus puntos con la ordenada, y $\frac{dy}{dx}$ espresa la tangente del ángulo que forma la curva con el ege de las abscisas. Con efecto, en el triángulo rectángulo *Mmr* sale (con suponer el radio de las tablas $= 1$) $rm : rM :: 1 :$ tang rmM, luego tang $rmM = \frac{rM}{rm} = \frac{dx}{dy}$. Luego si se me preguntára en qué punto una curva ó su tangente forma con la ordenada un ángulo dado, ó cuya tangente es conocida, llamaría dicha tangente m, y tendría $\frac{dx}{dy} = m$; determinando despues por medio de la equacion diferenciada de la curva el valor de $\frac{dx}{dy}$, é igualandole con m, resultaría una equacion de la qual sacaría, despues de substituido en ella en lugar de y, su valor en x y constantes sacado de la equacion de la curva, el valor ó los valores de x correspondientes á los puntos donde la curva forma dicho ángulo con su ordenada; y si la curva no formare en punto alguno un ángulo igual al ángulo dado, sacaría imaginario el valor ó los valores de x, ó la equacion pararía en un absurdo manifiesto. 153.

Por egemplo, respecto de la hypérbola cuya equacion fuese $yy = 2(ax + xx)$ sería $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2a + 4x}$, cuya cantidad igualada con m daría $\frac{2y}{2a+4x}$ ó $\frac{y}{a+2x} = m$; de donde sa-

Fig. caríamos $y = ma + 2mx$; como la equacion de la curva dá $y = \sqrt{[2(ax + xx)]}$, sería $ma + 2mx = \sqrt{[2(ax + xx)]}$, ó quadrando $mmaa + 4mmax + 4mmxx = 2ax + 2xx$. Si hubiéramos de averiguar en qué punto forma esta hypérbola con su ordenada un ángulo de 45°; por ser igual (I. 643) al radio la tangente de 45°, sería $m = 1$, cuyo supuesto reduce la equacion á $aa + 4ax + 4xx = 2ax + 2xx$ ó $2xx + 2ax + aa = 0$, de cuya resolucion sacaríamos $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}aa)} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{-\frac{1}{4}aa}$; y por ser imaginarios estos valores, hemos de inferir que la hypérbola cuya equacion fuese $yy = 2(ax + xx)$ no formará en punto alguno con su ordenada un ángulo de 45.°

377 En todo lo dicho hasta aquí hemos supuesto que son las ordenadas paralelas las unas á las otras, y que salen de la linea en la qual se cuentan las abscisas. Pero hay muchas curvas, conforme hemos visto (366 &c.), cuyas ordenadas salen todas de un punto fijo; hay otras cuyas abscisas son arcos de otra curva, siendo sus ordenadas lineas rectas ó lineas curvas. No obstante sea la que fuere la naturaleza de las lineas á las quales se refieren los puntos de la curva principal, siempre estará cifrada ó se podrá cifrar en una equacion la relacion entre sus abscisas y sus ordenadas. Quando se hiciere uso de esta equacion para determinar las tangentes ú otras lineas, será preciso valerse, quanto sea posible, para determinar dichas tangentes, de lineas que no contengan diferenciales distintas de las que llevare la equacion de la cur-

va.

va. Con los egemplos nos daremos mejor á entender. Fig.

378 Supongamos primero que siendo AM una curva conocida á la qual sabemos tirar una tangente, sea BS otra curva cuyas abscisas son los arcos AM de la primera, y las ordenadas las lineas MS paralelas á una linea dada. ¿Cómo se podria tirar una tangente en un punto S de la curva BS, en el supuesto de estar cifrada en una equacion qualquiera la relacion entre AM y MS? 158.

Imaginarémos el arco infinitamente pequeño Ss, cuya prolongacion SQ que es la tangente, encuentra en Q la tangente MT correspondiente al punto M de la curva AM; y con tirar la linea SK paralela á MT ó á Mm, el triángulo SKs será semejante al triángulo QMS; por manera que tendrémos $sK : SK :: MS : MQ$; pero si llamamos el arco AM, x; y la ordenada MS, y; será $Mm = SK = dx$, y $sK = sm - SM = dy$; luego $dy : dx :: y : MQ = \frac{ydx}{dy}$; por consiguiente si en la tangente MT tomamos la parte MQ igual al valor de $\frac{ydx}{dy}$ que determinarémos por medio de la diferenciacion de la equacion de la curva, hallarémos el punto Q, y si por este punto y el punto S tiramos la SQ, será esta linea la tangente de la curva.

379 Si la equacion de la curva cuya tangente se ha de determinar, en vez de espresar la relacion entre AM y MS, espresára la relacion entre AM y PS; quiero decir que si las abscisas x fuesen los arcos AM, y las ordenadas PMS ó y se contáran desde una linea recta determinada AP; en este caso se tiraría *su* paralela á AP, y se 158

Fig. determinaría la subtangente PI en la linea AP del modo siguiente.

Como suponemos conocida la curva AM, conocemos el valor de la subtangente y tangente correspondientes á cada uno de sus puntos; por consiguiente si tiramos Mr paralela á AP, y llamamos PT, s; TM, t, y comparamos los triángulos semejantes TPM, Mrm, inferirémos $TP : TM :: Mr : Mm$, esto es, $s : t :: Mr : dx$; luego $Mr = \frac{sdx}{t} = Su$. Si comparamos despues los triángulos semejantes Sus, IPS, sacarémos $su : Su :: PS : PI$; y como PS es aquí y, su será dy; luego $dy : \frac{sdx}{t} :: y : PI = \frac{sydx}{tdy}$. Por lo que, si diferenciamos la equacion de la curva, sacarémos el valor de $\frac{dx}{dy}$, y substituyéndole en $\frac{sydx}{tdy}$, sacarémos últimamente el valor de PI, en que no habrá mas diferencias.

380 En algunas ocasiones no espresa la equacion de la curva la relacion entre sus abscisas y sus ordenadas, sino la relacion que se supone haber entre las ordenadas de la curva propuesta, y las ordenadas de otras curvas conocidas. Para tirar las tangentes en estos casos, se practicará lo

159. siguiente. Supongamos, por egemplo, que la curva BMS resulte de las dos curvas conocidas AL y CN, por medio de una equacion entre las ordenadas correspondientes PL, PM, PN, que llamarémos respectivamente x, y, z. Una vez que suponemos conocidas las curvas AL y CN, hemos de suponer tambien conocidas sus subtangentes PS y PR; llamemos, pues, PS, s; y PR, t; é imaginemos la or-

ordenada infinitamente próxima $pnml$, y las lineas Lu, Mr, on paralelas á AP. De los triángulos semejantes LPS, luL inferirémos $PS : PL :: Lu : ul$, esto es, $s : x :: Lu : dx$; luego $Lu = \frac{sdx}{x} = Mr = on$. Pero los triángulos semejantes TPM, Mrm dán $rm : Mr :: PM : PT$, esto es, $dy : \frac{sdx}{x} :: y : PT$; luego $PT = \frac{sydx}{xdy}$. Por consiguiente si no hubiera en la equacion de la curva mas indeterminadas que x é y, hallaríamos, con diferenciarla, el valor de $\frac{dx}{dy}$, cuyo valor substituido en $\frac{sydx}{xdy}$ nos manifestaria el valor de PT, sin diferencia alguna; pero como en la espresada equacion hay las tres variables x, y, z, estarán tambien dx, dy, dz en su diferencial; es pues indispensable sacar el valor de dz en dx ó dy. Acudirémos para conseguirlo á los triángulos semejantes Non, NPR que nos darán $No : on$ ó $Lu :: NP : PR$; esto es, $-dz : \frac{sdx}{x} :: z : t$, porque como PN mengua al paso que PM crece, su diferencia No ó dz será negativa; luego $dz = -\frac{szdx}{tx}$; y substituyendo en la equacion diferenciada de la curva la cantidad $\frac{szdx}{tx}$ en lugar de dz, hallarémos facilmente el valor de $\frac{dx}{dy}$, para substituirle en la fórmula $\frac{sydx}{xdy}$ de la subtangente.

Fig.

Para aclarar lo que acabamos de decir, supongamos que AL y CN sean dos curvas conocidas qualesquiera, y sea siempre la ordenada PM media proporcional entre PL y PN; será $x : y :: y : z$, ó $xz = yy$ la equacion de la curva BM. Si la diferenciamos, sacarémos $xdz + zdx = 2ydy$, y substituyendo en lugar de dz su valor general $-\frac{szdx}{tx}$, resultará $-\frac{szdx}{t} + zdx = 2ydy$; de donde infe-

 ri-

Fig. rirémos $\frac{dx}{dy} = \frac{2ty}{z(t-s)}$; luego PT ó $\frac{sydx}{xdy}$ se transformará en $\frac{2sty^2}{xz(t-s)}$, ó en $\frac{2st}{t-s}$, despues de substituido en lugar de y^2 su valor xz, y hecha la reduccion correspondiente. Luego finalmente $PT = \frac{2st}{t-s}$.

381 Quando las ordenadas salen todas de un punto fijo, se toman por abscisas los arcos de una curva conocida que las mas veces es un círculo; quiero decir que en este último caso la equacion espresa la relacion entre la ordenada CM y el ángulo ACM que forma dicha linea con
160. una linea fija AC; ó espresa la relacion de la misma ordenada CM con el arco OS trazado con un radio determinado.

Para tirar las tangentes en el caso de representar la equacion la relacion entre la ordenada CM y el ángulo ACM ó el arco OS, se supone respecto de cada punto M, tirada á la CM la perpendicular CT que encuentre la tangente TM en T; hecho esto, se concibe trazado el arco infinitamente pequeño Mm, y tirando la ordenada mC, se supone trazado con el radio CM, el arco Mr que puede considerarse como una linea recta perpendicular en el punto r á la linea Cm. Los triángulos Mrm, TCM son semejantes, y dán $rm : Mr :: y : CT = \frac{Mr \times y}{dy}$; si llamamos el arco OS, x, y su radio, a, los sectores semejantes CSs, CMr darán $CS : CM :: Ss : Mr$, esto es. $a : y :: dx : Mr = \frac{ydx}{a}$, y substituyendo este valor de Mr en el de CT, hallarémos que CT ó la subtangente $= \frac{y^2dx}{ady}$. Y como suponemos conocida la relacion entre x é y, se sacará facilmente, con diferenciar la equacion en que es-

está cifrada dicha relacion, el valor de $\frac{dx}{dy}$, y si le substituimos en el valor de CT, le transformará en otro en que no habrá mas diferencias. Fig.

382 Supongamos tambien que siendo OS una linea conocida, ó á la qual sabemos tirar las tangentes, sea la curva BM tal, que esté cifrada en una equacion dada la relacion determinada que hay entre CS, x, y CM, y. Si imaginamos el arco infinitamente pequeño Mm, las ordenadas CM, Cm, y los arcos Mr, Sq trazados desde el centro C con los radios CM, CS; es constante que de la diferenciacion de la equacion no sacarémos mas que la relacion entre dx y dy, ó entre rm y sq, pues en la equacion de la curva no hay mas variables que x é y. Pero como para determinar la subtangente CT, es preciso conocer la relacion que hay entre rm y rM, hemos de ver como se puede determinar rM por las condiciones de la cuestion. 161.

Una vez que es conocida la curva OS, será dada su subtangente CQ correspondiente á cada punto S; y como los triángulos semejantes QCS, Sqs dan $CS : CQ :: qs : qS$: si llamamos CQ, s, tendremos $x : s :: dx : qS = \frac{sdx}{x}$. Pero los sectores semejantes CSq, CMr dan $CS : CM :: Sq : Mr$, ó $x ; y :: \frac{sdx}{x} : Mr = \frac{sydx}{xx}$, sera facil hallar ahora la subtangente CT, comparando los triángulos semejantes Mrm, TCM, de los quales inferirémos $rm : rM :: CM : CT$, ó $dy : \frac{sydx}{xx} :: y : CT = \frac{sy^2 dx}{x^2 dy}$.

Apliquemos esta doctrina á la curva BM, que supondremos trazada con la circunstancia de que sea SM de una

mis-

Fig. misma longitud ó igual á una linea dada a, sea la que fuere la linea OS. Tendremos, pues, $x+a=y$, y $dx=dy$; y por consiguiente $\frac{dx}{dy}=1$; será, pues, la subtangente $CT=\frac{sy^2}{x^2}$, que construiremos del modo siguiente.

Tiraremos la tangente SQ, la tiraremos por el punto M la paralela MX: tiraremos despues SX, y por el punto M la MT paralela á SX; será MT la tangente que se pide. Porque de los triángulos semejantes CSQ, CMX inferiremos $CS:CQ::CM:CX$, ó $x:s::y:CX=\frac{sy}{x}$. De los triángulos semejantes CSX y CMT inferiremos $CS:CX::CM:CT$, ó $x:\frac{sy}{x}::y:CT$; luego $CT=\frac{sy^2}{x^2}$.

162. 383 Cuestion I. *Tirar por el punto* M *una tangente al círculo* AMB, *estando en* A *el origen de las abscisas, y el centro en* C.

Si llamamos a el diámetro AB; la abscisa AP, x; la ordenada PM, y, tendremos, en virtud de la propiedad tantas veces mencionada del círculo, $yy=ax-xx$: la diferencial de esta equacion será $2ydy=adx-2xdx$, y $\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{a-2x}=\frac{y}{\frac{1}{2}a-x}$; luego $\frac{ydx}{dy}=\frac{y^2}{\frac{1}{2}a-x}=PT$.

Si estuviera en C el origen de las abscisas, ya hemos visto (374) de qué caracter saldria la espresion de la subtangente.

384 Cuestion II. *Hallar la espresion general de la subtangente para las parábolas de todos los grados cifradas en la equacion* $y^{m+n}=a^m x^n$.

La diferencial de esta equacion será $(m+n)y^{m+n-1}dy$

=

Fig.

$= na^m x^{n-1} dx$; luego $\frac{dx}{dy} = \frac{(m+n)y^{m+n-1}}{na^m x^{n-1}}$; será , pues, $\frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)y^{m+n}}{na^m x^{n-1}}$; y si substituimos en lugar de y^{m+n} su valor $a^m x^n$, sacaremos $\frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)a^m x^n}{na^m x^{n-1}} = \frac{m+n}{n}x$.

Manifiesta esta espresion que en estas curvas la subtangente es tantas veces igual á la abscisa x, quantas unidades hay en el esponente de y, dividido por el esponente de x, conforme ya lo sabíamos, respecto de la parábola vulgar, cuya subtangente es $2x$, y es 2 con efecto el esponente de y dividido por el de x.

385 Cuestion III. *Hallar el valor de la subnormal en la parábola vulgar, cuya equacion es* $yy = px$.

La equacion, despues de diferenciada será $2ydy = pdx$; luego $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$; luego la subnormal $\frac{ydy}{dx}$ (373) $= \frac{py}{2y} = \frac{1}{2}p$, lo mismo que sacamos tiempos há (65).

386 Cuestion IV. *Hallar el valor de la subtangente de la elipse* AMB, *cuya equacion es* $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ (93) en el supuesto de ser AB, a; el ege menor, b; AP, x; y PM, y. 263.

La diferencial de esta equacion es $2ydy = \frac{bb}{aa}(adx - 2xdx)$, ó $2aaydy = abbdx - 2bbxdx$, de donde sacaremos $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{abb - 2bbx}$. Substituyo este valor en $\frac{ydx}{dy}$, y sale $\frac{ydx}{dy} = \frac{2aay^2}{abb - 2bbx}$; substituyo finalmente en lugar de yy su valor $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$, y despues de egecutadas las reducciones

cor-

Fig.

correspondientes saco $\frac{ydx}{dy}$, ó $PT = \frac{2(ax-xx)}{a-2x} = \frac{ax-xx}{\frac{1}{2}a-x}$

387 Cuestion V. *Hallar la espresion de la subnormal de la elipse.*

Como la equacion de esta curva despues de diferenciada es $2ydy = \frac{bb}{aa}\left(adx - 2xdx\right)$, será $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{bb}{aa}(a-2x)}{2y}$.

Por consiguiente la subnormal $\frac{ydy}{dx} = \frac{bb}{aa}\left(\frac{a-2x}{2}\right) = \frac{bb}{aa} \times \left(\frac{1}{2}a - x\right)$.

164. 388 Cuestion VI. *Tirar una tangente al punto* M *de la hypérbola* AMH, *cuya equacion es* $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, siendo a un primer diámetro; b, el segundo; AP, x; PM, y.

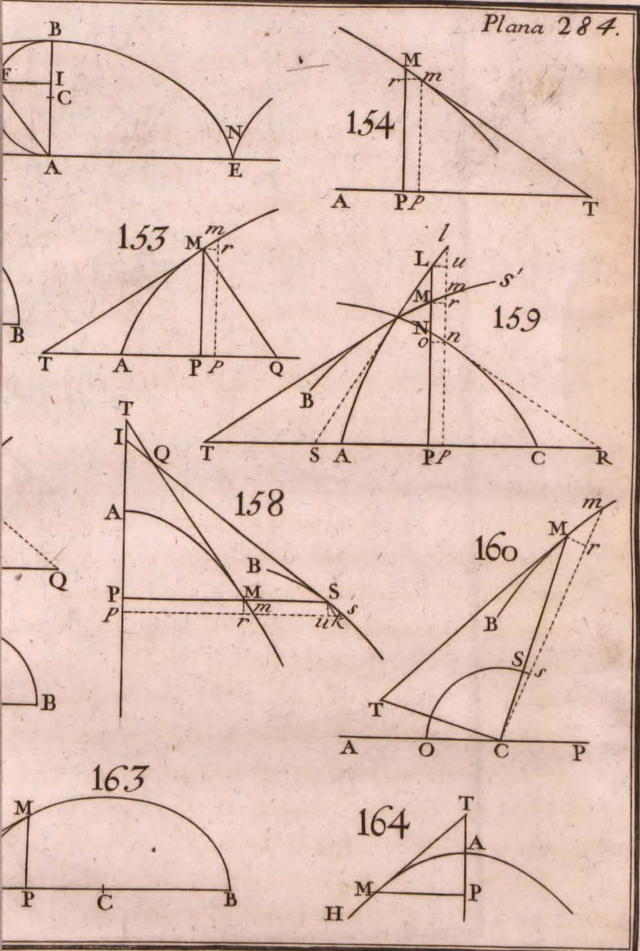
Despues de diferenciada esta equacion, tendremos $2aaydy = abbdx + 2bbxdx$: luego $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{abb+2bbx}$, y $\frac{ydx}{dy} = \frac{2aayy}{abb+2bbx}$; substituyendo en lugar de yy su valor $\frac{bb}{aa}(ax+xx)$, y egecutando la reduccion correspondiente, resultará $\frac{2ax+2xx}{a+2x}$ $\frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x} = PT$, y finalmente $AT = PT - AP = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x}$.

165. 389 Cuestion VII. *Hallar el valor de la subtangente correspondiente al punto* M *de una hypérbola entre sus asýmtotas, cuya equacion es* $aa = xy$, en el supuesto de ser AP, x; PM, y; y aa la potencia de la hypérbola.

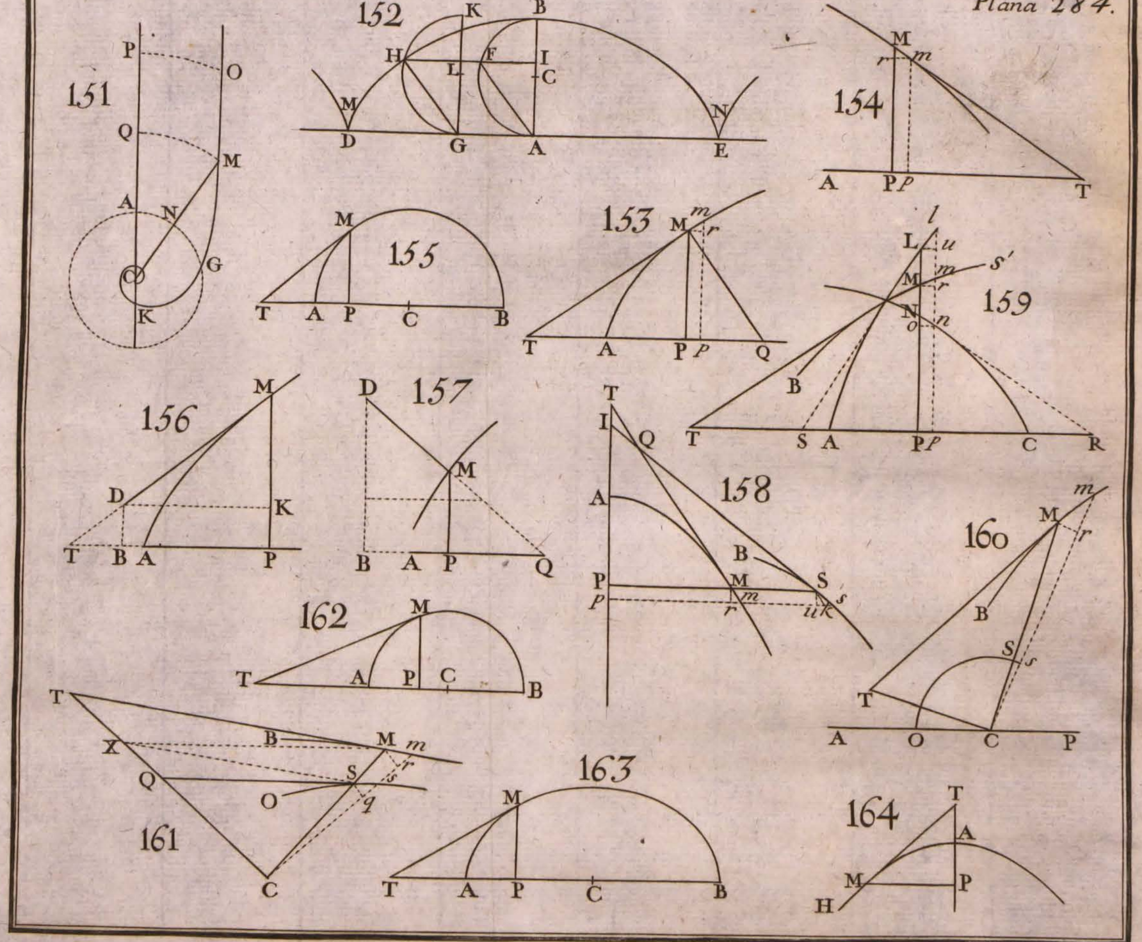
La equacion $aa = xy$ despues de diferenciada será $xdy + ydx = 0$; luego $dx = \frac{-xdy}{y}$; y por consiguiente $PT = \frac{ydx}{dy} = -x$; cuyo valor manifiesta que la subtangente es igual á la abscisa correspondiente al punto M, pero

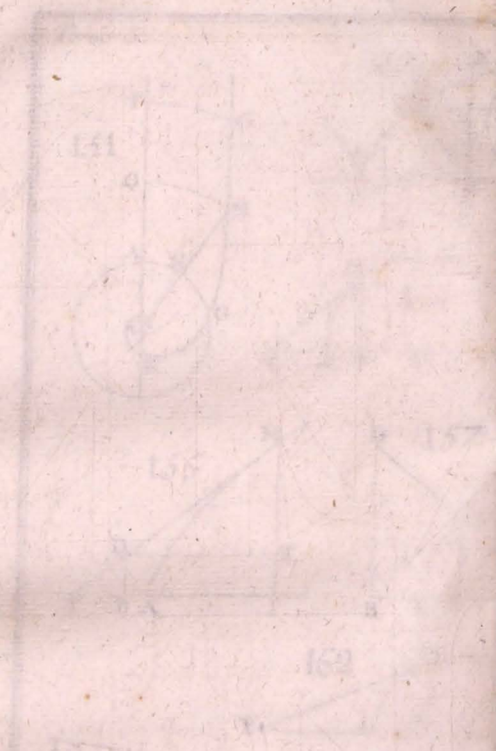
que

Plana 284.



B
F
I
C
N
A
E
154
M
r m
A
P p
T
153
M m
r
T
A
P p
Q
B
159
l
L u
m s'
M r
N n
o
B
T
S A
P p
C
R
158
T
I
Q
A
B
P
M
S
p
m
r
u k
s
Q
B
160
m
M
r
B
S
s
T
A
O
C
P
163
M
P
C
B
164
T
A
M
P
H


151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164


151
156
157
162

que se ha de tomar á la parte opuesta, respecto del origen *A*. Fig.

390 Cuestion VIII. *Tirar en el punto* M *una tangente á la conchoide de Nicomedes, cuya equacion es* $x^2y^2 = (a+y)^2 \times (bb - yy)$, en el supuesto de ser BC, a; $RV = CA, b$; CP, x; PM, y (234). 166.

Si diferenciamos la equacion de la curva, resultará $2x^2ydy + 2y^2xdx = 2dy\,(a+y)\,(b^2 - y^2) - 2ydy \times (a+y)^2 = 2dy \times (a+y)\,(b^2 - ay - 2y^2)$; luego $\frac{dx}{dy} = \frac{(a+y)\times(b^2-ay-2y^2)-x^2y}{xy^2}$; y por consiguiente $\frac{ydx}{dy} = \ldots\ldots$ $\frac{(a+y)y(b^2-ay-2y^2)-x^2y^2}{y\times xy} = \frac{(a+y)\,y\,(b^2-ay-2y^2)-(a+y)^2\times(b^2-y^2)}{y\times(a+y)\times\sqrt{(b^2-y^2)}}$, porque $x^2y^2 = (a+y)^2 \times (b^2 - y^2)$: si dividimos el numerador y el denominador de la última fraccion por $a+y$, y egecutamos despues las multiplicaciones que quedaren indicadas en el numerador, sacaremos

$$\frac{b^2 - ay^2 - 2y^3 - ab^2 + ay^2 - b^2y + y^3}{y\sqrt{(bb-yy)}} = \frac{-ab^2 - y^3}{y\sqrt{(bb-yy)}} = PT,$$

cuyo valor por ser negativo se ha de tomar al otro lado de *PM* respecto del origen.

391 Cuestion IX. *Tirar en el punto* M *una tangente á la cisoide* AM. 167.

Llamemos AP, x; PM, y; AB, a; será $ay^2 - xy^2 = x^3$ la equacion de la curva (236), de cuya diferenciacion sacaremos $3x^2dx = 2aydy - 2xydy - y^2dx$; luego $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay-2xy}{3x^2+y^2}$, y $\frac{ydx}{dy} = \frac{2ay^2-2xy^2}{3x^2+y^2} = PT = \frac{2ax-2xx}{3a-3x}$, despues de substituido en lugar de yy su valor sacado de la equacion de la curva.

392 Cuestion X. *Hallar el valor de la subtangente*

MH

Fig. MH *de la Quadratriz de Dinostrates.*

168\. Por el punto dado M tiraremos el radio CN, y supondrémos que sea TM la tangente; tiraremos tambien las lineas MK, TK, respectivamente perpendiculares á las lineas CM y MK, y las Cn y pm infinitamente próximas respectivamente á las CN y PM. Llamaremos AP, y; AN, x; CM, p; ANB, a; AC, b; en cuyos supuestos será $MI = b - y$, $Pp = MR = dy$, y $Nn = dx$.

Sentado esto, los triángulos semejentes CNn, CMH darán $CN : Nn :: CM : MH$, ó $b : dx :: p : \frac{pdx}{b} = MH$: las lineas TK y CH que son perpendiculares á MK serán paralelas, y serán semejantes los triángulos MTK, MmH; y darán $Mm : MT :: MH : MK$: por razon de ser las lineas mR y TI ambas perpendiculares á MI, serán semejantes los triángulos MIT, MRm, y será $Mm : MT :: MR : MI$; luego $MR : MI :: MH : MK$, esto es, $dy : b - y :: \frac{pdx}{b} : \frac{pdx}{dy} - \frac{pydx}{bdy} = MK$.

De la equacion de la quadratriz que (365) es $bx = ay$, sacaremos $\frac{bx}{a} = y$, y $dx = \frac{ady}{b}$. Si substituimos estos valores en el valor de MK en lugar de dx é y, resultará $MK = \frac{ap}{b} - \frac{apbx}{abb} = \frac{ap - px}{b} = \frac{(a-x)p}{b} = \frac{NB \times MC}{AC}$. Como NB es un arco de círculo, pende la determinacion de la subtangente de la quadratriz de la rectificacion de dicho arco.

169\. 393 Cuestion XI. *Tirar una tangente* MT *en el punto* M *de la espiral* CKM *de Arquimedes.*

La equacion de esta curva será $ay = bx$, si llamamos

a

a la circunferencia del círculo *BN*, *AB*; *b*, su radio *CB*; Fig.
x, el arco *BN*; y, la ordenada *CM*. Si tiramos el radio *Cmn* infinitamente próximo al radio *CMN*, y desde el centro *C* trazamos con el radio *CM* el arco *Mr*, será $Nn = dx$, y $rm = dy$. Sentado esto, los sectores semejantes *CNn*, *CMr* darán $CN : CM :: Nn : Mr$, ó $b : y :: dx : Mr = \frac{ydx}{b}$. Los triángulos semejantes *Mmr*, *MCT* darán $rm : rM :: CM : CT$, ó $dy : \frac{ydx}{b} :: y : CT = \frac{y^2 dx}{bdy}$. Pero si diferenciamos la equacion $ay = bx$ de la curva, sacaremos $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}$, cuyo valor substituido en $\frac{y^2 dx}{bdy}$ dará $CT = \frac{ay^2}{bb} = \frac{ay}{bb} \times \frac{bx}{a} = \frac{xy}{b} =$ al arco *QM*.

394 Cuestion XII. *Hallar el valor de la subtangente correspondiente al punto* F *de la espiral parabólica* AGFB, *cuya equacion será* $px = yy$, si llamamos p una linea dada; 170.
x el arco *BC*; y, la ordenada *AF*; b, el radio *AB*.

Tiraremos el radio *AD* infinitamente próximo al radio *AC*, y al mismo radio *AC* las perpendiculares *CL*, *AH*, y desde el centro *A* con el radio *AG* el arco *GI* Diferenciaremos la equacion de la curva, y sacaremos $pdx = 2ydy$, $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$. Sentado esto, los triángulos semejantes *ADC*, *AGI* darán $AD : AG :: DC : GI$, ó $b : b-y :: dx : GI = \frac{(b-y)\,dx}{b}$; los triángulos semejantes *FGI*, *CAH*, *CFL* darán $FI : IG :: FA : AH :: FC : CL$; esto es, $dy : \frac{(b-y)\,dx}{b} :: b-y : \frac{(b-y)^2 dx}{bdy} :: y : \frac{(by-yy)dx}{bdy}$. Por consiguiente, $AH = \frac{(b-y)^2 dx}{bdy}$, y $CL = \frac{(by-yy)\,dx}{bdy}$. Si en el valor de *AH* substituimos $\frac{2y}{p}$ en lugar de $\frac{dx}{dy}$, resultará $AH = \frac{2pxy - 4bpx + 2bby}{bp} = \frac{2xy}{b} - 4x + \frac{2by}{p}$, despues de substituido

en

Fig. en lugar de yy su valor px. Practicando lo propio con el valor de CL, hallarémos que $CL = \frac{(by - yy)\,dx}{bdy} = \frac{2by^2 - 2y^3}{bp}$ $= 2x - \frac{2xy}{b}$.

395 Cuestion XIII. *Tirar una tangente al punto* M
171. *de la espiral hyperbólica, cuya equacion es* $xy = ab$, *en el supuesto de ser* CA, a; AN, x; CM, y; $AG = QM = b$.

Tirarémos la Crm infinitamente próxima á la CM, y el arco mq: tirarémos tambien la CT perpendicular á CM, que encuentre en T la tangente MT; será $Qq = rm = dy$, y $Nn = -dx$ (336); y de la equacion diferenciada de la curva sacarémos $\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$. Los sectores semejantes CNn, CMr darán $CN : Nn :: CM : Mr$; esto es, $a : -dx :: y : Mr = \frac{-ydx}{a}$; los triángulos semejantes mrM, MCT darán $mr : Mr :: MC : CT$; esto es, $dy : \frac{-ydx}{a} :: y : CT = \frac{-yydx}{ady} = \frac{xy}{a} = b$, despues de substituido en lugar de $\frac{dx}{dy}$ su valor hallado poco há. Luego la subtangente de la espiral hyperbólica es constante, del mismo modo que la de la logarítmica (339).

172. 396 Cuestion XIV. *Tirar una tangente en el punto* M *de la cycloide* BMA.

Tirarémos la pm infinitamente próxima á la PM, y la Mr paralela á la tangente OT del punto O del círculo generador. Llamaremos el arco BIO, x; la OM, y; será $mr = dy$, y $Mr = dx$: los triángulos semejantes mrM, MOT darán $dy : dx :: y : OT = \frac{ydx}{dy}$. Pero como por lo dicho (369) $OM = \frac{b}{a}BIO$; esto es, $y = \frac{b}{a}x$, será $ay = bx$ la equacion de la curva, de la qual despues de diferenciada, sacarémos

$\frac{dx}{dy}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}$, y substituyendo este valor en el de OT, saldrá OT Fig.
$= \frac{ay}{b} = x$; luego se ha de tomar en la tangente del círculo generador la parte $OT = BIO$; la linea que pasare por los puntos M y T será la tangente de la cycloide.

De las Asýmtotas rectilineas de las lineas curvas.

397 Los principios sentados (371 y sig.) sirven igualmente para determinar las asýmtotas rectilineas de las lineas curvas, cuyas asýmtotas yá digimos (172) qué lineas son quando tratamos de las asýmtotas de la hypérbola. Por lo dicho acerca de estas se echa de ver que una curva tiene una asýmtota rectilinea, quando la tangente tirada desde el estremo de algun ramo infinito de la curva encúentra el ege de las abscisas ó el de las ordenadas á una distancia finita del origen. Por exemplo, si de la subtangente PT, ó $\frac{ydx}{dy}$ restamos la abscisa AP ó x, será $\frac{ydx}{y} - x$ el 173.
valor de AT ó de la distancia que hay entre el origen A y el punto donde la tangente encuentra el ege de las abscisas. Si despues de calculado el valor de $\frac{ydx}{dy} - x$ le suponemos igual á una cantidad finita s, haremos uso de esta equacion para eliminar y, y sacar una equacion en x y s, ó para eliminar x, y sacar una equacion en y y s. Si suponemos despues x ó y infinita, y resultan de este supuesto uno ó muchos valores finitos de s, espresarán estos valores las distancias AC por donde han de pasar las asýmtotas de la curva. Pero como el punto C no basta solo para determinar la direccion de la asýmtota; imaginarémos tira-

Fig. da por el origen A la linea AK paralela á las ordenadas, y los triángulos semejantes TPM, TAK darán $TP : PM ::$ $TA : AK$; esto es, $\frac{ydx}{dy} : y :: \frac{ydx}{dy} - x : AK = y - \frac{xdy}{dx}$. Calcularémos, pues, tambien el valor de $y - \frac{xdy}{dx}$, y suponiéndole igual á una cantidad finita t, servirá esta espresion con la equacion de la curva para eliminar x ó y; y el valor ó los valores de t que resultaren, suponiendo y ó x infinita, determinarán la distancia AR, que habrá desde el origen A al punto R, por donde pasará la asýmtota.

Si quisiésemos determinar la asýmtota de una curva cuya equacion fuese $y^3 = x^2(a + x)$, sacaríamos $3y^2dy = 2xdx(a+x) + x^2dx = 2axdx + 3x^2dx$; luego $\frac{ydx}{dy} - x = \frac{3y^3}{2ax+3x^2} - x$; ó substituyendo en lugar de y^3 su valor, $\frac{ydx}{dy} - x = \frac{3ax^2+3x^3}{2ax+3x^2} - x = \frac{ax^2}{2ax+3x^2} = \frac{ax}{2a+3x} = s$, y suponiendo x infinita, sería $s = \frac{a}{3}$. Tambien hallaríamos $y - \frac{xdy}{dx} = y - \frac{2ax^2+3x^3}{3y^2} = \frac{3y^3-2ax^2-3x^3}{3y^2}$, que, despues de substituido en lugar de y su valor, se reduce á $\frac{ax^2}{3x\sqrt[3]{[(a+x)^2]}} = t$; y suponiendo x infinita será $t = \frac{1}{3}a$.

Si fuese finito el valor de s, y saliese infinito el de t, sería señal de que la asýmtota sería paralela á las y; y sería al reves paralela á las x, si fuese s infinita, y t finita, infinitamente pequeña, ó cero.

De los límites de las cantidades, y de las cuestiones de Máximos y Mínimos.

398 Espresa, segun hemos visto (376), $\frac{dx}{dy}$ la

tan-

tangente del ángulo que la curva, ó su tangente forma Fig. con la ordenada, y $\frac{dy}{dx}$ el valor de la tangente del ángulo, que forma la curva ó su tangente con el ege de las abscisas. De lo dicho (I. 645) tambien se puede inferir que la tangente de un ángulo nulo, ó cuyo valor es cero, es tambien cero; luego quando fuese cero el valor de $\frac{dx}{dy}$, no formará la tangente ángulo alguno con la ordenada, quiero decir que será la tangente paralela á la ordenada; y de los mismos principios inferirémos que quando fuese $\frac{dy}{dx} = o$, no formará la tangente ángulo alguno con el ege de las abscisas; quiero decir que la tangente será paralela al ege de las abscisas.

Pero como el valor de un quebrado es cero, quando su numerador $= o$, síguese que $\frac{dx}{dy} = o$, quando $dx = o$, y que quando $dy = o$, será tambien $\frac{dy}{dx} = o$; y como dx es el numerador, y dy el denominador del quebrado $\frac{dx}{dy}$, hemos de inferir que la tangente de una curva será paralela á las ordenadas, ó á las abscisas de dicha curva, segun que en el quebrado $\frac{dx}{dy}$ fuese cero el numerador ó el denominador. Por consiguiente, para verificar en qué punto ó puntos tiene una curva su tangente paralela á las ordenadas ó á las abscisas, se deberá sacar de su equacion diferenciada el valor de $\frac{dx}{dy}$, se hará el numerador igual á cero, y se sacará una equacion que comparada con la equacion de la curva dará el valor de x y de y correspondientes al punto de la curva, donde la tangente es paralela á las ordenadas. Si se supusiese igual á cero

Fig. el valor de dy, ó del denominador del quebrado $\frac{dx}{dy}$, se sacaría otra equacion, de la qual, combinándola con la de la curva, se inferiria los valores de x é y correspondientes al punto de la curva, donde la tangente es paralela al ege de las abscisas.

Para aclarar esto con un egemplo familiar, considerarémos la curva cuya equacion es $yy + xx = 2ay + 2bx - aa - bb + rr$, que pertenece al círculo (5).

174 Las lineas AP son x, y las lineas PM, PM' son los valores de y correspondientes á cada valor de x, que salen de la resolucion de dicha equacion. Si la diferenciamos saldrá $2ydy + 2xdx = 2ady + 2bdx$, y $\frac{dx}{dy} = \frac{2y-2a}{2b-2x}$.

Supongamos primero el numerador igual á cero, para averiguar en qué puntos la tangente es paralela á las ordenadas. Tendrémos $2y - 2a = 0$; ó $y = a$. Substituyendo este valor en la equacion de la curva, sale $aa + xx = 2aa + 2bx - aa - bb + rr$, ó $xx - 2bx = rr - bb$, cuya resolucion dá $x = b \pm r$, esto es, $x = AQ'$, y $x = AQ$; de lo que se infiere que la curva, ó su tangente es paralela á las ordenadas en dos puntos R y R', á cada uno de los quales pertenece una ordenada igual á la linea a.

Hagamos ahora igual á cero el denominador del valor de $\frac{dx}{dy}$, para saber en qué puntos la curva ó su tangente es paralela á las abscisas; tendrémos $2b - 2x = 0$, $x = b$. Si substituimos este valor en la equacion de la cur-

curva, resultará $yy + bb = 2ay + 2bb - aa - bb + rr$, Fig.
ó $yy - 2ay - rr + aa = 0$; y de cuya resolucion sacarémos $y = a \pm r$; cuya expresion está manifestando que la tangente es paralela á las abscisas en dos puntos que son T y T' que tienen por abscisa comun la linea $AS = b$, siendo la ordenada correspondiente al punto T' la linea $ST' = a + r$, y la linea $ST = a - r$ la ordenada correspondiente al punto T.

Los puntos Q y Q' se llaman los *Límites* de las abs- 174
cisas, porque entre Q y Q' á cada abscisa AP corresponden valores reales de y que son PM y PM'; pero entre Q y A, y mas allá de Q' respecto de A no hay punto alguno de la curva; de suerte que si supusiéramos x menor que $AQ = b - r$, ó mayor que $AQ' = b + r$, no se hallaria valor alguno real de y. Para comprobarlo, no hay mas que substituir en la equacion en lugar de x una cantidad $b - r - q$ menor que $b - r$, ó una cantidad mayor que $b + r$, qual sería $b + r + q$, resolviendo la transformada que resultare de esta substitucion, saldrán imaginarios los dos valores de y.

Asimismo, si concebimos tirada por el punto A la AL' paralela á las ordenadas, y si por los puntos T y T' tiramos las lineas TL, $T'L'$ paralelas á las abscisas; las lineas $AL = ST = a - r$, y $AL' = ST' = a + r$, serán los límites de las ordenadas; porque se viene á los ojos que no puede haber ordenada ninguna mayor que AL', ni menor que AL si ha de ser la tangente paralela á las

 abs-

Fig. abscisas. Y si en la equacion de la curva substituyéramos en lugar de y una cantidad menor que $a - r$, qual sería $a - r - q$, saldrian imaginarios los valores de x despues de resuelta la equacion. Lo propio sucedería si en lugar de y substituyéramos la cantidad $a + r + q$, mayor que $a + r$.

399 La ordenada ST' es la mayor de todas las que rematan en la concavidad $RT'R'$ de la circunferencia; la ordenada ST es la menor de todas las que rematan en la convexídad; y las ordenadas QR y $Q'R'$ son á un tiempo las menores que rematan en la concavidad y las mayores que rematan en la convexídad.

400 De todo esto se sigue que por un mismo método se determinan 1.º Los límites de las abscisas y de las ordenadas. 2.º Los casos en que la tangente es paralela á las abscisas ó á las ordenadas. 3.º Finalmente las mayores ó las menores abscisas ú ordenadas.

401 Pero sea la que fuere la expresion algebráica de una cantidad, se puede considerar dicha expresion como que representa la ordenada de una linea curva. Pongo por caso que sea $\frac{x^2(a-x)}{aa}$ la expresion de una cantidad que llamaré y, de modo que $y = \frac{x^2(a-x)}{aa}$; puedo considerar esta equacion como si fuese la de una linea curva, cuya abscisa sería x, é y la ordenada. En este supuesto es evidente que si la cantidad $\frac{x^2(a-x)}{aa}$ puede ser en algunos casos mayor ú menor que en otros, ó llegar á ser un *máximo* ó un *mínimo*, se habrá de practicar el método que hemos de-

declarado, quiero decir que se habrá de diferenciar dicha Fig.
equacion, é igualar con cero el numerador ó el denominador de la fraccion que fuese igual á $\frac{dx}{dy}$.

402 En esto consiste el método llamado de *máximos* y *mínimos*, que es sin duda alguna uno de los mas socorridos de la Analysis, y sirve para averiguar qual es la mayor ó la menor entre muchas cantidades que crecen ó menguan en virtud de una misma ley, ó en general, qual es la que tiene en mayor grado que todas sus semejantes, algunas propiedades determinadas.

403 Para hacer mas patentes todavia sus fundamentos, y segura su aplicacion, hemos de prevenir que de lo 174.
dicho (399) resulta que una cantidad puede llegar á ser por dos caminos distintos la mayor entre sus semejantes; quando vá primero creciendo como PM' para menguar despues; ó quando vá creciendo como $P'M''$ para pararse de repente en llegando á ser $Q'R'$; pero en este último caso es á un tiempo la mayor entre todas las ordenadas que rematan en la convexidad, y la menor entre todas las que rematan en la concavidad. Son tambien dos los caminos por donde puede llegar una cantidad á ser la menor entre sus semejantes; porque ó puede ir menguando como PM, para crecer despues; ó puede ir menguando como $P'M'''$ para pararse de repente, y en este último caso es un máximo, y un mínimo á un tiempo; es un mínimo respecto del ramo $M'T'M'''$, y un máximo respecto del ramo MTM''.

Fig. 404 Por consiguiente, para distinguir si una cantidad es un máximo ó un mínimo, ó uno y otro, se ha de suponer que sea a el valor de x correspondiente al máximo ó al mínimo, y substituir succesivamente en la cantidad propuesta en lugar de x, $a+q$, a, y $a-q$. Quando los dos resultados estremos fueren reales y menores que el del medio, la cantidad será un máximo; al contrario, si los dos resultados estremos fuesen mayores que el del medio, la cantidad será un mínimo: finalmente, si el uno de los dos resultados estremos fuese real, y el otro imaginario, la cantidad será á un tiempo un máximo y un mínimo.

405 Quando en la determinacion de un máximo ó mínimo, el valor de la variable es tal que hace negativo el del máximo ó mínimo, es señal de que el máximo ó mínimo que representa no corresponde á la cuestion conforme viene propuesta, y de que pertenece á otra cuestion en que haya algunas circunstancias contrarias á las que acompañaban la cuestion que se intentó resolver.

Si se nos propusiese, por egemplo, que dividiésemos
175. la linea AB en el punto C, de manera que el cociente del quadrado de AC, dividido por CB fuese el menor posible; llamaríamos a á la linea dada AB, y x la parte AC: la otra parte BC sería $a-x$, y el cociente sería $\frac{x^2}{a-x}$; la diferencial de esta cantidad, ó de $x^2(a-x)^{-1}$ será $2xdx(a-x)^{-1}+x^2dx(a-x)^{-2}=0$, ó $\frac{2xdx}{a-x}+\frac{x^2dx}{(a-x)^2}=0$, ó $2axdx-x^2dx=0$, ó $(2a-x)x=0$, que dá $x=0$, ó $2a-x=0$. El primer valor representa un

un mínimo, que se conoce sin cálculo alguno. Por lo que toca al segundo, que dá $x = 2a$; si substituimos este valor en $\frac{x^2}{a-x}$, se transforma esta cantidad en $\frac{4a^2}{-a} = -4a$. Luego no pertenece el mínimo á la cuestion actual. Pero si consideramos con algun cuidado el valor hallado $x = 2a$, echarémos de ver que el punto C no puede estar entre A y B, y que la cuestion admitirá una resolucion, quando se tratáre de hallar el punto C en AB prolongada mas allá de B respecto de A. Si en este caso llamamos AC', x; la distancia BC' yá no será $a-x$, sino $x-a$, y el cociente que buscamos será $\frac{x^2}{x-a}$, cuya diferencia igualada con cero será $\frac{2xdx}{x-a} - \frac{x^2dx}{(x-a)^2} = 0$, ó despues de egecutadas las reducciones correspondientes $x^2dx - 2axdx = 0$, que dá $x = 2a$, como antes; y como la substitucion de esta cantidad en $\frac{x^2}{x-a}$ la transforma en $4a$, es señal de que le corresponde un mínimo á este caso. Fig.

Si igualásemos con cero el denominador $(x-a)^2$ de la diferencial, sacaríamos $x = a$, que representa un máximo; y así debe ser, pues quando $x = a$, la cantidad es infinita. No por esto deja de acompañarle el caracter distintivo del máximo, porque sea que supongamos x menor ó mayor que a, sale una cantidad menor que si supusiéramos $x = a$.

406 Quando en la espresion de una cantidad que ha de ser un máximo ó un mínimo hay algun multiplicador ó divisor constante, se puede omitir dicho multiplicador ó divisor, antes de diferenciar. Supongamos, por egemplo, que

Fig. que $\frac{ay}{b}$ represente generalmente una cantidad que ha de ser un máximo ó un mínimo, siendo a y b cantidades constantes; será, pues, preciso que $\frac{ady}{b} = 0$; pero una vez que ni a ni b son cero, es indispensable que $dy = 0$; es, pues, el resultado el mismo que si solo y hubiera representado la cantidad que ha de ser un máximo ó un mínimo, y el mismo que hubiéramos hallado despues de borrados el multiplicador y el divisor constantes. Luego lo mismo será para el caso diferenciar sola la cantidad que ha de ser un máximo ó un mínimo, que diferenciar uno de sus submúltiplos ó múltiplos, ó alguna de sus potencias.

407 Cuestion I. *Dividir un número dado* a *en dos partes, tales que el producto de la una por la otra sea mayor que el de otras dos partes qualesquiera del espresado número.*

Llamarémos x á la una de las dos partes, será la otra $a - x$, y el producto de las dos será $ax - xx$; y en virtud de lo dicho (401) será $y = ax - xx$: diferenciando, $dy = adx - 2xdx$, y por consiguiente $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a - 2x}$. Si suponemos el numerador igual á cero, sacarémos $1 = 0$, que es un absurdo; luego si hay un máximo le hemos de sacar igualando con cero al denominador. Pongámoslo, pues, en práctica, y sacarémos $a - 2x = 0$, que dá $x = \frac{1}{2}a$, cuyo valor nos está diciendo que de qualquiera modo que se divida un número dado en dos partes, el producto de las dos será el mayor posible, quando cada parte fuere la mitad del número dado.

Si

408 Si en la cuestion que acabamos de resolver hubiéramos igualado con cero la diferencial de $ax - xx$, hubiéramos sacado $adx - 2xdx = 0$, cuya equacion nos hubiera encaminado al resultado $x = \frac{1}{2}a$, el mismo que hemos sacado con suponer $y = ax - xx$ en virtud de lo dicho (401). De donde inferirémos que se podrá escusar en muchos casos suponer igual á una nueva variable y la espresion algebráica de la cantidad; bastará diferenciarla, y suponer igual á cero su numerador ó su denominador, si fuese un quebrado. La conclusion siempre será la misma que si se practicase lo prevenido en el lugar citado. Fig.

409 Cuestion II. *Dividir un número conocido* a *en dos partes, tales que el producto de la potencia* m *de la una, multiplicada por la potencia* n *de la otra, sea el mayor posible.*

Si llamamos x la primera parte, la segunda será $a - x$; será, pues, $x^m(a - x)^n$ el producto espresado. Si diferenciamos esta espresion, é igualámos con cero su diferencial, sacarémos $mx^{m-1}dx(a - x)^n - nx^m(a - x)^{n-1}dx = 0$. Dividiéndolo todo por $x^{m-1}dx(a - x)^{n-1}$, resultará $m(a - x) - nx = 0$, ó $ma - mx - nx = 0$, que dá $x = \frac{ma}{m+n}$. Si fuese $m = 2$, y $n = 3$, sería $x = \frac{2a}{2+3} = \frac{2}{5}a$; y quiere decir, que la una de las dos partes debería ser los $\frac{2}{5}$ del número propuesto para cumplir con las condiciones de la cuestion.

410 Cuestion III. *Hallar entre todas las lineas que se pueden tirar por un mismo punto* D *dado dentro del ángu-* 176.

gu-

Fig. *gulo conocido* ABC, *qual es la que forma con los lados del espresado ángulo, el menor triángulo que sea posible.*

Tiraremos por el punto D la linea DG paralela al lado AB; supondrémos que sea EF una recta qualquiera tirada por el punto D; bajarémos DK perpendicular á BC, y desde el punto E donde la EF encuentra la AB, bajarémos la EL perpendicular á BC. Hemos de considerar como conocida la linea BG, y tambien la perpendicular DK. Llamemos, pues, BG, a; DK, b; y la base BF del triángulo BEF, x. Se echa de ver que desde cierto término, quanto mas creciere BF, tanto mayor será el triángulo. Pero si BF menguáre, se viene á los ojos que tambien menguará el triángulo; pero solo hasta cierto punto; porque si BF llegáre á ser quasi igual á BG, la recta EDF sería quasi paralela á AB, pues estaria para confundirse con GD; en cuyo caso sería el triángulo estremadamente grande. Hay, pues, un valor determinado de BF, que dá el menor triángulo posible. Para hallar este valor, buscarémos la espresion general del triángulo BEF.

Los triángulos semejantes BEF, GDF dán $GF : BF :: DF : EF$, y los triángulos semejantes DKF, ELF dán $DF : EF :: DK : EL$; luego $GF : BF :: DK ; EL$; esto es, $x - a : x :: b : EL = \frac{bx}{x-a}$; luego la superficie del triángulo BEF, que es $\frac{EL \times BF}{2}$ será $\frac{bx}{x-a} \times \frac{x}{2}$, ó $\frac{\frac{1}{2}bxx}{x-a}$.

Diferenciarémos, pues, esta cantidad, ó estotra $\frac{xx}{x-a}$ (406), é igualaremos con cero el numerador ó el denominador: si

lo

lo practicáramos así, sacaríamos como antes (405) que x Fig.
$=2a$; luego con hacer $BF=2a=2BG$, y tirar por el punto D la linea FDE, será el triángulo FBE el que se pide.

411 Cuestion IV. *Determinar el rectángulo mayor* 177.
que se pueda inscribir en un triángulo dado ADC.

Llamarémos b la base AC del triángulo; a, su altura BD; x, la altura BE del rectángulo inscripto. En estos supuestos, por razon de las paralelas AC, HI, tendrémos $BD : AC :: DE : HI$, ó $a : b :: a - x : \frac{ba-bx}{a} = HI$. Por consiguiente, la area del rectángulo $HI \times BE = \frac{bax-bx^2}{a} = \frac{b}{a}(ax - x^2)$. Diferenciando, pues, $ax - x^2$, y suponiendo la diferencial igual á cero, sacarémos $x = \frac{1}{2}a$. Cuyo resultado manifiesta que el mayor rectángulo inscripto en el triángulo dado será aquel cuya altura fuere la mitad de la altura del triángulo.

412 Cuestion V. *Hallar entre muchos triángulos rec-* 178.
tángulos que tienen una misma hypotenusa dada, el que tiene mayor superficie.

Llamemos la hypotenusa dada AC, a; AB, x; BC, y. Será $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, y por lo mismo $\frac{xy}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)} =$ la area del triángulo. Diferencio su quadrado (II. 63 y II. 69) $\frac{a^2x^2}{4} - \frac{x^4}{4}$, é igualando su diferencia $\frac{a^2xdx}{2} - x^3dx$ con cero, saco $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, é $y = \sqrt{(a^2 - x^2)} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

413 Cuestion VI. *Hallar entre todos los triángu-* 178.
los rectilineos rectángulos de una misma area dada uno, tal que la suma de sus dos lados AB + BC *sea la menor posible.*

Si

Fig. Si llamamos x el un lado AB, y a la area del triángulo; el otro lado será $\frac{2a}{x}$, y la suma de los dos lados será $x + \frac{2a}{x}$. Igualando con cero la diferencial $dx - \frac{2adx}{x^2}$ de dicha suma, y reduciendo, sacarémos $x = AB = \sqrt{2a}$; y $BC = \frac{2a}{x} = \sqrt{2a}$. Por consiguiente, los dos lados serán iguales uno con otro.

414 Cuestion VII. *Hallar el menor triángulo isósceles posible* ACD *que se pueda circunscribir á un círculo dado.*

179.

Llamemos x la distancia ED que hay desde el vértice del triángulo al centro del círculo, y llamemos a el radio BE del círculo dado. Si tiramos la EF perpendicular á DC, será $DF = \sqrt{(x^2 - a^2)}$; y por ser $DF : FE :: DB : BC$, ó $\sqrt{(x^2 - a^2)} : a :: x + a : BC = \frac{a(x+a)}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$, cuya cantidad multiplicada por $BD = x + a$, dará $\frac{a(x+a)^2}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$, que será la area del triángulo. Como esta area ha de ser un mínimo, lo será tambien su quadrado, y por lo mismo (406) $\frac{(x+a)^4}{x^2 - a^2} = \frac{(x+a)^3}{x-a}$ representará tambien un mínimo. Si igualamos con cero la diferencial $\frac{3dx(x+a)^2(x-a) - dx(x+a)^3}{(x-a)^2}$ de la última espresion, y dividimos despues por $\frac{dx(x+a)^2}{(x-a)^2}$ la equacion que resultáre, sacarémos $3(x-a) - (x+a) = 0$; y finalmente $x = 2a$, cuyo valor nos está diciendo, que $ED = 2EF$; como los triángulos DEF, DBC son semejantes, tambien inferiríamos que DC tambien $= 2BC = AC$, y que el triángulo ADC, el menor posible, será equilátero.

415. Cuestion VIII. *Determinar entre todos los para-*

ralelipípedos de una misma superficie y altura, qual es el de mayor cabida. Fig.

Llamarémos a la altura; cc la superficie del paralelipípedo; x é y los dos lados del rectángulo de la base. Toda la superficie se compone de seis rectángulos, habiendo dos cuyo lado ó altura es a, y x su base; hay otros dos cuya altura es a, é y la base; finalmente hay otros dos cuya base es x, é y la altura. Por consiguiente, la espresion de la superficie total será $2ax + 2ay + 2xy$; quiero decir, que $2ax + 2ay + 2xy = cc$. Por lo que mira á la solidez, sabemos que es axy; y como ha de ser la mayor entre todas las de igual superficie, es preciso que su diferencial $axdy + aydx = 0$, ó que $xdy + ydx = 0$ (406). Pero de la equacion $2ax + 2ay + 2xy = cc$, que nos está diciendo que la superficie de todos los espresados paralelipípedos es constante, sacamos $2adx + 2ady + 2xdy + 2ydx = 0$; luego si substituimos en esta equacion el valor de dx sacado de la primera, hallarémos, despues de egecutadas todas las reducciones, $x = y$; luego la base ha de ser un quadrado.

Para determinar su lado, hemos de substituir en lugar de y su valor x en la equacion $2ax + 2ay = cc$, que con esta substitucion se transformará en $4ax + 2x^2 = cc$, de cuya resolucion sacarémos $x = -a \pm \sqrt{(aa + \frac{1}{2}cc)}$; y como la raiz negativa $-a - \sqrt{(aa + \frac{1}{2}cc)}$ no sirve para el caso actual, será el valor que buscamos de $x = -a + \sqrt{(aa + \frac{1}{2}cc)}$.

Si

Fig. 416 Si queremos averiguar quál ha de ser la altura a para que el paralelipípedo tenga la mayor solidez entre todos los de igual superficie; considerarémos que pues siendo a la altura, la base ha de ser un quadrado, dicha solidez será axx; es, pues, preciso que la diferencial de axx, en el supuesto de ser variables a y x, sea o; y por consiguiente $2axdx + xxda = 0$, ó $2adx + xda = 0$, despues de dividido por x. Pero como la equacion $4ax + 2x^2 = cc$, que espresa que la superficie es entonces constante, dá, despues de diferenciada $4adx + 4xda + 4xdx = 0$; y si en esta equacion substituimos en lugar de da, su valor sacado de la equacion $2adx + xda = 0$, resultará despues de egecutadas todas las reducciones $a = x$; luego el paralelipípedo que buscamos ha de ser un cubo, una vez que su lado ó su altura a ha de ser igual al lado x del quadrado que sirve de base.

En quanto al lado de este cubo, le hallarémos si substituimos en lugar de a su valor x en la equacion $4ax + 2x^2 = cc$, que se transformará en $4x^2 + 2x^2 = cc$, ó $6x^2 = cc$ que dá $x = \sqrt{\frac{cc}{6}}$. Luego entre todos los paralelipípedos de igual superficie, el de mayor solidez es el cubo, cuyo lado es igual á la raiz quadrada de la sexta parte de la superficie.

417 Cuestion IX. *Determinar entre todos los triángulos de un mismo perímetro, y de igual base, qual tiene mayor superficie.*

Bajarémos la perpendicular CP, y llamarémos a la ba-

base del triángulo ABC; c, su perímetro; AP, x; CP, y. Fig.
En estos supuestos será $PB = a - x$, $AC = \sqrt{(xx+yy)}$, 180.
y $CB = \sqrt{[(a-x)^2 + yy]}$. Luego el perímetro será $\sqrt{(xx+yy)} + \sqrt{[(a-x)^2+yy]} + a$, y la superficie $\frac{ay}{2}$; será, pues, $\sqrt{(xx+yy)} + \sqrt{[(a-x)^2+yy]} + a = c$, y la diferencial de $\frac{ay}{2}$ igual á cero; quiero decir que $\frac{ady}{2} = 0$, ó $dy = 0$. Pero si diferenciamos la equacion con que espresamos que el perímetro es constante, sacaremos $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{(a-x)\times dx+ydy}{\sqrt{[(a-x)^2+yy]}} = 0$, que por ser $dy = 0$, se reduce á $\frac{xdx}{\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{(a-x)dx}{\sqrt{[(a-x)^2+yy]}} = 0$. Si dividimos esta espresion por dx, traspasamos, y eliminamos los denominadores, sacaremos $x\sqrt{[(a-x)^2+yy]} = (a-x)\sqrt{(xx+yy)}$; y si quadramos esta equacion, sacarémos $xx(a-x)^2 + xxyy = (a-x)^2xx + (a-x)^2yy$; y finalmente, si egecutamos las operaciones indicadas, borramos en ambos miembros los términos iguales, y reducimos, hallarémos $xx = (a-x)^2$, ó $xx = aa - 2ax + xx$, que dá $x = \frac{1}{2}a$, y manifiesta que el triángulo ha de ser isósceles. Por consiguiente, levantaremos en medio de AB una perpendicular, trazaremos desde el centro C, y con un radio igual á la mitad del exceso que el perímetro c lleva á la base, un arco que corte dicha perpendicular en c: tirarémos finalmente CB y CA, y estará determinado el triángulo de mayor superficie entre todos los de igual perímetro y base.

418 Cuestion X. *Determinar quál es en general entre todos los triángulos de igual perímetro el que tiene mayor superficie.*

Fig. 416 Si queremos averiguar quál ha de ser la altura a para que el paralelipípedo tenga la mayor solidez entre todos los de igual superficie; considerarémos que pues siendo a la altura, la base ha de ser un quadrado, dicha solidez será axx; es, pues, preciso que la diferencial de axx, en el supuesto de ser variables a y x, sea o; y por consiguiente $2axdx + xxda = 0$, ó $2adx + xda = 0$, despues de dividido por x. Pero como la equacion $4ax + 2x^2 = cc$, que espresa que la superficie es entonces constante, dá, despues de diferenciada $4adx + 4xda + 4xdx = 0$; y si en esta equacion substituimos en lugar de da, su valor sacado de la equacion $2adx + xda = 0$, resultará despues de egecutadas todas las reducciones $a = x$; luego el paralelipípedo que buscamos ha de ser un cubo, una vez que su lado ó su altura a ha de ser igual al lado x del quadrado que sirve de base.

En quanto al lado de este cubo, le hallarémos si substituimos en lugar de a su valor x en la equacion $4ax + 2x^2 = cc$, que se transformará en $4x^2 + 2x^2 = cc$, ó $6x^2 = cc$ que dá $x = \sqrt{\frac{cc}{6}}$. Luego entre todos los paralelipípedos de igual superficie, el de mayor solidez es el cubo, cuyo lado es igual á la raiz quadrada de la sexta parte de la superficie.

417 Cuestion IX. *Determinar entre todos los triángulos de un mismo perímetro, y de igual base, qual tiene mayor superficie.*

Bajarémos la perpendicular CP, y llamarémos a la ba-

base del triángulo ABC; c, su perímetro; AP, x; CP, y. Fig.
En estos supuestos será $PB = a - x$, $AC = \sqrt{(xx+yy)}$, 180.
y $CB = \sqrt{[(a-x)^2 + yy]}$. Luego el perímetro será $\sqrt{(xx+yy)} + \sqrt{[(a-x)^2 + yy]} + a$, y la superficie $\frac{ay}{2}$; será, pues, $\sqrt{(xx+yy)} + \sqrt{[(a-x)^2+yy]} + a = c$, y la diferencial de $\frac{ay}{2}$ igual á cero; quiero decir que $\frac{ady}{2} = 0$, ó $dy = 0$. Pero si diferenciamos la equacion con que espresamos que el perímetro es constante, sacaremos $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{(a-x)\times dx+ydy}{\sqrt{[(a-x)^2+yy]}} = 0$, que por ser $dy = 0$, se reduce á $\frac{xdx}{\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{(a-x)dx}{\sqrt{[(a-x)^2+yy]}} = 0$. Si dividimos esta espresion por dx, traspasamos, y eliminamos los denominadores, sacaremos $x\sqrt{[(a-x)^2+yy]} = (a-x)\sqrt{(xx+yy)}$; y si quadramos esta equacion, sacarémos $xx(a-x)^2 + xxyy = (a-x)^2xx + (a-x)^2yy$; y finalmente, si egecutamos las operaciones indicadas, borramos en ambos miembros los términos iguales, y reducimos, hallarémos $xx = (a-x)^2$, ó $xx = aa - 2ax + xx$, que dá $x = \frac{1}{2}a$, y manifiesta que el triángulo ha de ser isósceles. Por consiguiente, levantaremos en medio de AB una perpendicular, trazaremos desde el centro C, y con un radio igual á la mitad del exceso que el perímetro c lleva á la base, un arco que corte dicha perpendicular en c: tirarémos finalmente CB y CA, y estará determinado el triángulo de mayor superficie entre todos los de igual perímetro y base.

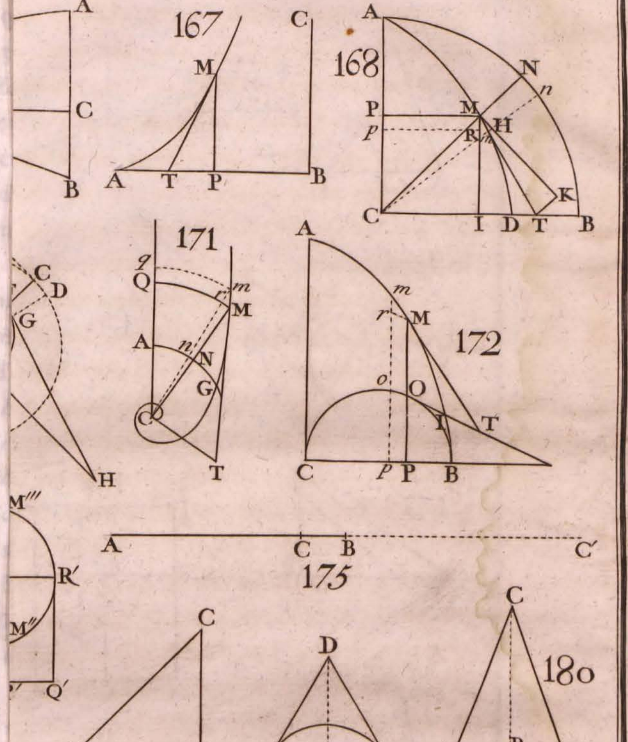
418 Cuestion X. *Determinar quál es en general entre todos los triángulos de igual perímetro el que tiene mayor superficie.*

Fig. Para resolver esta cuestion hemos de tener presente que sea la que fuere la base (417), x ha de ser su mitad; quiero decir que sea la que fuere a, siempre ha de ser $x = \frac{1}{2}a$. En virtud de esto la equacion que espresa el perímetro se transformará en $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} + a = c$, ó $2\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)} = c - a$; quadrando, sacaremos $aa + 4yy = c^2 - 2ac + aa$, que dá $y = \sqrt{\left(\frac{cc - 2ac}{4}\right)}$. Luego la superficie del triángulo que es en general $\frac{ay}{2}$, será $\frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{cc-2ac}{4}\right)}$. Y como ha de ser la mayor entre todas las de igual perímetro, sea la que fuere la base a, hemos de igualar con cero la diferencial de $\frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{cc-2ac}{4}\right)}$ ó de $a(cc - 2ac)$, sacada en el supuesto de ser a variable. Tendremos, pues, $d\left(a\sqrt{(cc - 2ac)}\right)$ ó $d\left[a(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}}\right]$, esto es, $da(cc - 2ac)^{\frac{1}{2}} - a \,.\, cda(cc - 2ac)^{-\frac{1}{2}} = 0$, ó $da\sqrt{(cc - 2ac)} - \frac{cada}{\sqrt{(cc-2ac)}} = 0$, ó $da(cc - 2ac) - cada = 0$, ó $ccda - 3cada = 0$, de donde se saca $a = \frac{c}{3}$; luego la base a ha de ser el tercio del perímetro; y como ya sabemos que el triángulo ha de ser isósceles (417), se sigue que ha de ser equilátero. Luego entre todos los triángulos de un mismo ámbito, el triángulo equilátero es el de mayor superficie.

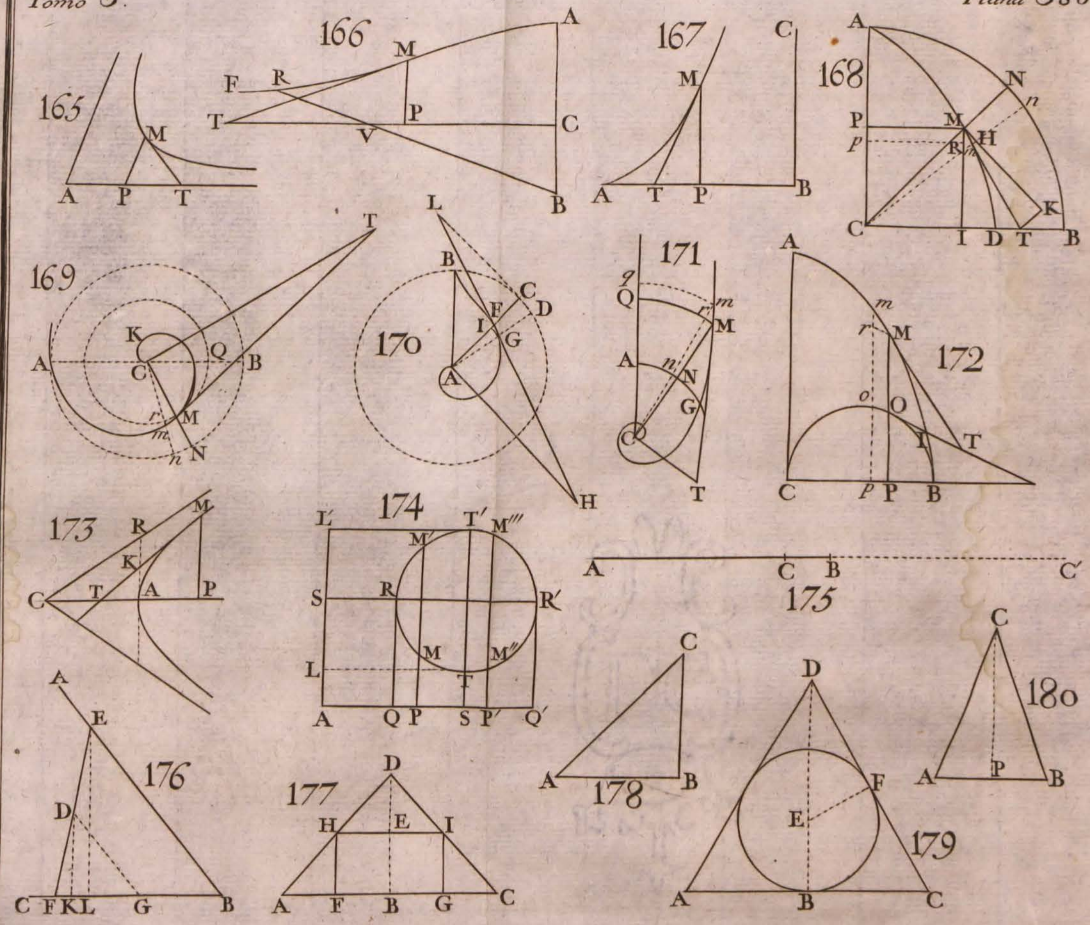
419 Cuestion XI. *Determinar el mayor cilindro que se pueda inscribir en un cono dado* ABC.

Llamemos a la altura BP del cono; b, el diámetro AC
181. de su base; x, el diámetro $FG = DE$ del cilindro, considerándole como variable; p, la area de un círculo cuyo diámetro $= 1$. Ha de ser $p = \frac{3,14159\text{ \&c.}}{4}$; porque una vez que

Plana 306.



167
168
171
172
175
178
179
180
A
B
C
M
T
P
N
n
H
R
m
K
I
D
p
Q
q
G
o
O
r
E
F
C′
R′
M‴
M″
Q′


165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180

que el diámetro es (II. 424) á la circunferencia :: 1 : Fig.
3,1415 &c. podemos mirar 3,14159 como la circunferencia de un círculo, cuyo diámetro $= 1$. Y como la area de un círculo es (I. 503) el producto de su circunferencia por la mitad del radio, ó la quarta parte del diámetro, será $\frac{3,14159\ \&c.}{4}$ la area del círculo cuyo diámetro $= 1$.

Sentado esto, yá que las areas de los círculos tienen unas con otras la misma razon que los quadrados de sus diámetros, será $1^2 : x^2 :: p : px^2 =$ la area del círculo *FIGL*. De los triángulos semejantes *ABP*, *ADF* sacaremos $AP : BP :: AD : DF$, ó $\frac{1}{2}b : a :: \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}x : \frac{ab-ax}{b} = DF$; cuyo valor multiplicado por la area px^2 hallada poco há, dará $\frac{pabx^2 - pax^3}{b}$, y será la espresion de la solidez del cilindro que ha de ser un máximo, y haremos por lo mismo su diferencial $\frac{2pabxdx - 3apx^2dx}{b} = 0$, que nos dará $x = \frac{2b}{3}$, y $DF = \frac{a}{3}$. De donde inferiremos que el mayor cilindro inscripto en el cono dado, es aquel cuya altura es el tercio de la del cono.

420 Cuestion XII. *Hallar las dimensiones de una medida cilíndrica, tal que con la menor superficie interior posible tenga una cabida determinada, ó quepa en ella una cantidad determinada de trigo, agua* &c. 182.

Llamemos el diámetro *AB* de dicha medida, x; su altura *AD*, y; c, su cabida; p, la circunferencia de un círculo cuyo diámetro $= 1$. En estos supuestos, haremos esta proporcion $1 : x :: p : px$, cuyo quarto término es la peri-

Fig. feria de la base, y su producto por la altura y será la espresion de la superficie cóncava del cilindro. Si á esta le añadimos la superficie de la base, tendremos toda la superficie interior del espresado cilindro. Pero la superficie de la base la sacaremos multiplicando su periferia px por $\frac{x}{4}$ que es la quarta parte del diámetro; luego $\frac{px^2}{4}$, será la espresion de la area de la base, cuyo producto por la altura y espresará la cabida de la medida; y como suponemos que c es la tal cabida, será $\frac{pyx^2}{4} = c$, de donde inferiremos que la superficie cóncava $pxy = \frac{4c}{x}$. Por consiguiente toda la superficie interior de la medida será $\frac{4c}{x} + \frac{px^2}{4}$. Igualando su diferencial con cero, saco $-\frac{4cdx}{x^2} + \frac{pxdx}{2} = 0$, $-8c + px^3 = 0$; y finalmente $x = \sqrt[3]{\frac{8c}{p}} = 2\sqrt[3]{\frac{c}{p}}$. Ya que $px^3 = 8c$, y $px^2y = 4c$, si divido la primera de estas dos equaciones por la segunda, resultará $\frac{x}{y} = 2$; luego $x = 2y$; y por consiguiente será la medida qual se pide, si fuere el diámetro de su base duplo de su altura.

421 Cuestion XIII. *Determinar entre todos los conos de una misma superficie dada, el que tiene la mayor solidez.*

Llamarémos s la superficie dada; el semidiámetro
183. AC de la base, x; el lado obliquo AB, y; p, la periferia de un círculo, cuyo diámetro $= 1$. En virtud de estos supuestos, la circunferencia de la base será $2px$, su area px^2, y la superficie convexa del cono será pxy, esto es el producto de la mitad de la periferia de la base por el lado obliquo (I. 574). Como toda la superficie

=

$= px^2 + pxy = s$, será $y = \frac{s}{px} - x$; y por consiguiente la altura $CB = \sqrt{[(AB)^2 - (AC)^2]} = \sqrt{(\frac{s^2}{p^2x^2} - \frac{2s}{p})}$; cuyo valor multiplicado por $\frac{px^2}{3}$, esto es por el tercio de la area de la base, dará (I. 605) el producto $\frac{px^2}{3}\sqrt{(\frac{s^2}{p^2x^2} - \frac{2s}{p})}$ que será la espresion de la solidez del cono. Como ha de ser un máximo, lo será tambien (406) su quadrado $\frac{s^2x^2}{9} - \frac{2psx^4}{9}$, cuya diferencial $\frac{2s^2xdx}{9} - \frac{8x^3psdx}{9} = 0$; de aquí sacaremos $s - 4px^2 = 0$; y por lo mismo $x = \sqrt{\frac{s}{4p}}$. Para hallar el valor de y, consideraremos la equacion hallada antes $y = \frac{s}{px} - x = \frac{s - px^2}{px} = \frac{3px^2}{px}$ con substituir en lugar de s su valor $4px^2$ sacado de la equacion $s - 4px^2 = 0$; luego finalmente $y = 3x$. Todo esto manifiesta que el mayor cono entre todos los de una misma superficie dada, será aquel cuyo lado obliquo tuviese con el semidiámetro de la base la misma razon que 3 con 1, pues de $y = 3x$ sale $y : x :: 3 : 1$. Fig.

422 Cuestion XIV. *Dado en el ege mayor* Aa *de una elipse el punto* P, *hallar la espresion de la menor distancia* PD *desde el punto dado á la curva.* 184.

Llamaremos AC, a; CB, b; AP, p; Pa, q; PQ, x. Por la propiedad de la elipse tendremos $(QD)^2 = \frac{bb}{aa}(pq + qx - px - xx)$, y $(PD)^2 = \frac{bb}{aa} \times (pq + qx - px - xx) + xx = m^2$. Haremos, pues, su diferencial . . . . $\frac{bbqdx - bbpdx - 2bbxdx}{aa} + 2xdx = 0$, de la qual sacaremos despues de reducido el entero á quebrado, $x = \frac{bb(p-q)}{2(aa-bb)} = \frac{bb}{aa-bb} \times CP$.

Para entender este último resultado, se ha de consi-

Fig. derar que $p = AP = AC + CP$, y $q = Pa = AC - CP$ ó $aC - CP$, pues en la elipse $CA = Ca$. Luego $p - q = AC + CP - AC + CP = 2CP$, y por lo mismo $\frac{bb(p-q)}{2(aa-bb)} = \frac{bb\, 2CP}{2(aa-bb)} = \frac{bb}{aa-bb} \times CP$.

De las diferencias segundas, terceras &c.

423 Ademas de las diferenciales que hemos encontrado hasta aquí, y que se llaman diferencias primeras, hay tambien diferencias segundas, terceras, &c. Las segundas se señalan escribiendo *dd* inmediatamente antes de la variable; las terceras con escribir *ddd*, y así prosiguiendo; ddx, por egemplo, representa la diferencia segunda de x.

424 Para hacerse cargo de lo que son las diferencias segundas, es menester considerar la variable como que vá creciendo por grados desiguales, cuya diferencia es infinitamente pequeña respecto de los mismos incrementos. Así, ddx es infinitamente pequeña respecto de dx. En las diferencias terceras $dddx$, ó lo que es lo mismo d^3x, es infinitamente pequeña respecto de ddx; y así de las demás.

425 Antes de declarar los fundamentos del método que sirve para sacar las diferenciales de que vamos hablando, hemos de hacer algunas prevenciones que podrán escusar muchas equivocaciones. Aunque para representar el quadrado de dx, se debiera escribir $(dx)^2$, no obstante se escribe dx^2 para abreviar; cuya espresion no podrá tomar por la diferencial de x^2 el que tuviere presente que hemos

con-

convenido en representar dicha diferencial de este modo $d(x^2)$. Fig.

Conviene tambien considerar que aunque ddx y dx^2 sean ambos infinitamente pequeños de segunda orden, no por esto son dos cantidades iguales; pues ddx es la diferencia segunda de x; y dx^2 es el quadrado de dx.

426 Para determinar las diferencias segundas, no hay cosa mas natural que considerar la cantidad variable en tres estados consecutivos, infinitamente próximos; tomar la diferencia entre el segundo estado y el primero, la diferencia entre el tercer estado y el segundo; y tomar finalmente la diferencia entre estas dos diferencias. Por egemplo, el primer estado de x es x; en el segundo instante á x se le agrega el incremento dx, y llega á ser $x + dx$; en el instante inmediato á $x + dx$ se le agrega el incremento $dx + d(dx)$, señalando $d(dx)$ el exceso que el incremento del segundo instante lleva al incremento del primero, ó la diferencia de dx. Por consiguiente los tres estados consecutivos de x son x, $x + dx$, $x + 2dx + d(dx)$. La diferencia que vá del segundo al primero es dx; la que vá del tercero al segundo es $dx + d(dx)$; finalmente la diferencia que vá de la una á la otra de estas dos diferencias, ó la segunda diferencia de x es $d(dx)$; es, pues, $ddx = d(dx)$. Luego para sacar las diferencias segundas, se han de diferenciar las diferencias primeras por las reglas que hemos dado para sacar estas.

En virtud de esto, sacarémos facilmente la diferencia

Fig. segunda de xy; sacaremos primero su diferencia primera que es $xdy + ydx$; despues diferenciaremos esta cantidad como si x, dx, y y, dy fuesen otras tantas variables diferentes, y hallarémos $xddy + dydx + dydx + yddx$, ó $xddy + 2dydx + yddx$. Si hubiésemos de sacar la segunda diferencia de x^2, sacaríamos primero su primera diferencia que es $2xdx$, despues diferenciaríamos $2xdx$ como si x y dx fuesen dos variables finitas, y resultaría $2xddx + 2dx^2$. Por el mismo camino hallaríamos que $dd(ax^m) = d(max^{m-1}dx) = m.\overline{m-1}\,ax^{m-2}dx + max^{m-1}ddx$.

427 Acerca de lo que acabamos de sentar podria ofrecérseles á algunos un reparo que es del caso precaver. Quando determinamos las diferencias primeras, desechamos las cantidades infinitamente pequeñas de segunda orden; pero como las diferencias segundas son tambien infinitamente pequeñas de segunda orden, no puede menos de hacer falta en las segundas, lo que se desechó en las primeras.

No se corre ese riesgo, porque la diferencia del infinitamente pequeño desechado de segunda orden, ha de ser indispensablemente un infinitamente pequeño de tercera orden, que es de ningun momento respecto de una diferencia segunda, que es un infinitamente pequeño de segunda orden.

Si se nos ofreciera diferenciar alguna cantidad que llevase diferencias primeras, proviniese ó no dicha cantidad de una diferenciacion exacta, la egecutaríamos por el mismo método. Por esta razon $d(xdy) = xddy + dxdy$; $d\left(\frac{dy}{x}\right)$ =

$= d(x^{-1}dy) = - x^{-2}dxdy + x^{-1}ddy$; $d\left(\frac{dx}{dy}\right)$ Fig.
$= d(dxdy^{-1}) = ddxdy^{-} - dxdy^{-2}ddy = \frac{ddx}{y} - \frac{dxddy}{dy^2}$.

428 Es frecuente considerar como constante la diferencia primera de una variable en los cálculos donde hay muchas variables. Este supuesto, sobre ser lícito, pues podemos tomar una de las diferencias primeras por término de comparacion, simplifica muchísimo los cálculos, porque se habrán de desaparecer del cálculo los términos que llevaren la diferencia segunda de la espresada variable, porque si dx es constante, $ddx = 0$, y serán nulos todos los términos donde se halláre ddx. Dará este supuesto resultados seguros, con tal que se ponga cuidado en no diferenciar dx, ó la diferencial constante en los términos donde se halláre. En virtud de esto, la diferencial de $\frac{dx}{dy}$, suponiendo dx constante, ó $d(dxdy^{-1})$ es en este mismo supuesto ...... $- dxdy^{-2}ddy$ ó $- \frac{dxddy}{dy^2}$. Si supusiéramos dy constante, la diferencial de $\frac{dx}{dy}$ sería $\frac{ddx}{dy}$.

429 Lo que hemos dicho en orden á las diferencias segundas está declarando lo que se ha de practicar con las diferencias terceras &c.

De la fraccion $\frac{0}{0}$, y de los Puntos múltiplos de las curvas.

430 Hay en algunas curvas ciertos puntos que por razon de alguna estraña circunstancia que los acompaña, se llaman *Puntos singulares.* Tales son, por egemplo, los puntos de una curva que son comunes á muchos ramos de la mis-

Fig. misma curva, á los quales por esta razon llamamos *Puntos multiplos*. Quando el punto pertenece á solo un ramo de la curva, se llama *Punto sencillo*; y se llama *Punto duplo*, *triplo*, &c. segun pertenece á un tiempo á dos, tres, &c. ramos de una curva.

431 Son tambien puntos singulares los *Puntos de Inflexion* ó *Serpentinos*. Nos haremos cargo de lo que es una *Inflexion* ó un *Serpanteman* y de sus diferentes grados, si tubiéremos presente que una recta corta una linea, quando la atraviesa en el punto donde la encuentra, dejando al un lado una porcion de la linea, y otra porcion al otro lado, en cuyo caso se llama dicha linea *Secante*.

Puede la secante encontrar la curva en mas de un punto. Si dos puntos de seccion se arriman infinitamente el uno al otro hasta juntarse y confundirse en solo un punto, la secante se transforma en tangente, y los dos puntos de seccion juntos no componen mas que un solo punto de contacto.

185. Supongamos, por egemplo, un círculo *AEHFB*, cuyo diámetro es *AB*, y corta la circunferencia en dos puntos *A*, *B* que separa el intervalo *AB*. Si imaginamos que dicho diámetro se mueve paralelo á sí mismo, y llega á la situacion *CD*; los puntos de seccion se habrán arrimado el uno al otro, porque la cuerda *CD* es menor que el diámetro *AB*. Si prosiguiese moviéndose hasta *EF*, los puntos de seccion se habrán arrimado todavia mas, porque una cuerda es tanto menor quanto mas apartada está del centro,

tro, hasta que llegando el espresado diámetro á GL, dejará Fig.
de cortar la circunferencia, pero la tocará en el punto H, donde podemos concebir, que la corta en dos puntos infinitamente próximos el uno al otro; porque cortar en dos puntos unidos es tocar con efecto en un punto solo.

Por consiguiente hemos de considerar una tangente como una linea que encuentra la curva que toca, en dos puntos; pero en dos puntos infinitamente próximos y coincidentes. Asi, en las curvas de segunda orden la tangente no puede encontrar la curva sino en el punto de contacto; porque si la encontrase en otro punto, sería lo mismo que si la encontrase tres veces, y esto es (26) imposible en las lineas de la espresada orden.

432 Pero en las lineas de órdenes superiores, puede la tangente encontrar la curva, aunque la toque. Si tres puntos de seccion se juntan, la recta que pasare por dichos tres puntos juntos ó infinitamente inmediatos, tocará y cortará á un tiempo la curva, y el punto donde se juntáren será un punto de inflexion.

Sea, por egemplo, ADC una parábola cúbica, cuya equacion es $y = ax^3$, é imaginemos en el punto C una tangente que tambien corte la curva en F. Si dicha tangente corriere á lo largo de la parábola, tocándola siempre mas cerca del origen A; quando hubiere llegado á DE, el punto de seccion E se habrá arrimado al punto de contacto D, al qual se irá arrimando mas y mas, hasta que dichos dos puntos coincidan en A; esto es, quando la tan- 186.

gen-

Fig. gente, llegando á la situacion *BA*, toca y corta la curva en un mismo punto *A*, donde podemos concebir tres puntos juntos; es á saber el punto de seccion, y los dos puntos á que equivale el punto de contacto.

Al punto *A* se le llama *Punto de Inflexion*, porque en este punto la curva hace, digamoslo así, un pliegue: el ramo que está al un lado es cóncavo ácia la parte, á la qual está la convexidad del ramo que está al otro lado.

187. Para hacer mas patente como tocar en un punto de inflexion viene á ser lo mismo que cortar en tres puntos coincidentes, considerarémos la parábola *GEADF*, por cuyo origen *A* se ha tirado una recta *GAF* oblicua á las coordenadas, y que encuentra la curva en dos puntos *G*, *F*. Si dicha recta diere la vuelta al rededor del punto *A*, acercándose á la linea de las abscisas, pasando desde *GAF* á *EAD*, los puntos de seccion *E*, *D* se habrán acercado al origen *A*, y se le acercarán mas y mas, hasta que llegando finalmente la recta *GAF* á la situacion *BAC*, que es la del ege de las abscisas, los tres puntos de seccion *G*, *A*, *F* se confundirán en un solo punto de inflexion *A*.

Por esta razon consideramos la tangente en el punto de inflexion como una linea que encuentra la curva en tres puntos. Luego las lineas de segunda orden no pueden tener punto alguno de inflexion (26); y por lo que mira á las de tercera orden, la tangente en el punto de inflexion no las puede encontrar en otro punto alguno.

433 Pero en las lineas de quarta orden, y de las ór-

órdenes superiores, una tangente *AB* en un punto de inflexion *A*, puede encontrar todavia la curva en otro punto *B*, por egemplo. Si en fuerza de algun supuesto, la distancia *AB* llega á ser infinitamente pequeña como *Ab*, la recta *AB* no cortará mas la curva, no hará mas que tocarla. Pero este contacto vale por quatro intersecciones, ó por dos contactos sencillos infinitamente próximos el uno al otro. Verdad es que la inflexion, bien que exista realmente en un espacio infinitamente pequeño, no parece mas, pero no se le escapa á la analysis, cuya vista, digámoslo así, es mas perspicaz que la nuestra. Estos puntos se llaman *Puntos de doble Inflexion*, ó *Puntos serpentinos*, ó *de Serpanteman.* Fig. 188.

434 El *Punto de triple Inflexion* es aquel en cuyo contacto se confunden cinco intersecciones; y en el contacto del punto de quádrupla inflexion ó de duplo serpanteman, se consideran confundidos seis puntos de seccion. En general, la multiplicidad de la inflexion es igual al número de las intersecciones, menos dos, que se juntan en el contacto de dicho punto; y la multiplicidad del serpanteman es igual á la mitad del numero de las intersecciones, menos dos, que se consideran como confundidas en el contacto de dicho punto.

435 Es facil reparar que las inflexiones son alternadamente visibles é invisibles al pasar de un grado á otro; que las sencillas, las triplas, las quíntuplas, y en general las de un grado impar, son visibles; porque en dicho punto la convexidad de la curva se muda en concavidad,

Fig. y la tangente es secante al mismo tiempo. Pero las inflexiones duplas, las quádruplas, y en general las de grado par, son invisibles, y á la vista en nada se distinguen de los puntos sencillos de la curva: solo los manifiestan los efectos que causa su existencia en el cálculo. Estos puntos de inflexion invisible son los que propiamente se llaman puntos serpentinos.

436 De todo lo dicho se infiere que las líneas mas sencillas que admiten una inflexion del grado t son las de la orden $t + 2$; porque una recta que toca una curva en un punto de inflexion del grado t, es como si la encontrára en $t + 2$ puntos (434). Que las lineas mas sencillas que admitan un serpanteman del grado u, son las lineas de la orden $2u + 2$ (434). Y que en las lineas de la orden $t + 2$ ó $2u + 2$, la recta que las toca en un punto de inflexion del grado t, ó en un punto serpentino del grado u, no las puede volver á encontrar (26).

Sentado esto, declaremos por qué método se puede averiguar si una curva cuya equacion es dada tiene puntos múltiplos, quáles son y dónde están. Pero primero hemos de volver á considerar la cantidad $\frac{dx}{dy}$.

437 Hemos visto que quando el numerador ó el denominador del quebrado $\frac{dx}{dy}$ es cero, hay siempre un máximo ó un mínimo. Nos falta considerar ahora los casos en que el numerador y el denominador de $\frac{dx}{dy}$ son ambos cero, y averiguar quál es entonces el valor de la espresada fraccion.

Pá-

Para conseguirlo, repararémos desde luego que en la Fig. equacion de una curva despues de diferenciada no hay mas términos que los que multiplica dx, y los que multiplica dy; podemos, pues, llamando A la suma de los primeros, y B la de los otros, darla á la equacion diferencial esta forma $Adx + Bdy = 0$. De esta equacion sacaremos $\frac{dx}{dy} = -\frac{B}{A}$; y para que B y A lleguen á ser ambos cero á un tiempo, es preciso que tengan un comun divisor, que llegando á ser cero quando tienen x é y ciertos valores, hace que A y B sean tambien cada uno cero á un tiempo.

Si la equacion de una curva fuese, por egemplo, $y^2 = \frac{x(a-x)^2}{a}$, sacaríamos $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{(a-x)^2 - 2x(a-x)}$, ó, con substituir en lugar de y su valor, $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2a(a-x)\sqrt{\frac{x}{a}}}{(a-x)^2 - 2x(a-x)}$, cuya cantidad es $\frac{0}{0}$ quando $x = a$; pero tambien se echa se vér que $a - x$ es un divisor comun del numerador y del denominador, y que el valor de $\frac{dx}{dy}$ se reduce á $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2a\sqrt{\frac{x}{a}}}{a - 3x}$, que en el caso de ser $x = a$, se reduce á ∓ 1; quiero decir, que en el egemplo propuesto el valor de $\frac{0}{0}$ es ∓ 1. Parece, pues, que para hallar en el caso espresado el valor de $\frac{dx}{dy}$, se ha de buscar el comun divisor de los dos términos de la fraccion que le espresa, y dividirlos despues uno y otro por dicho comun divisor. Si esto bastára, no habria mas que hacer, pero no basta quando el valor de $\frac{dx}{dy}$ lleva mas de una variable, ni quando lleva cantidades radi-

Fig. dicales, aunque no lleve en este caso mas de una variable. Esto nos empeña en proponer otro método mas general y facil; pero primero hemos de prevenir que esta singularidad solo se repara en los puntos múltiplos.

438 Concibamos, pues, que sea $SOMZM'ON$ una curva, y que en el punto O concurren dos de sus ramos
189. por lo menos. Es patente que á cada abscisa AP, x corresponden, por lo menos en un intervalo determinado, cierto número de valores PM, PM' de y, y que los que pertenecen á los ramos que se han de encontrar, son iguales en el punto de concurso O.

Siendo AZ el ege de las ordenadas, es preciso que á cada ordenada AQ correspondan, á lo menos en un intervalo determinado, cierto número de abscisas QN, QN', QN'', y que los que correspondan á los ramos que se han de encontrar, sean iguales en el punto de concurso.

Luego si representa a el valor de x, y b el valor de y, correspondientes al punto múltiplo, la equacion de la curva propuesta ha de ser tal, que quando substituyéremos en ella a en lugar de x, resulten tantos valores de y iguales á b, quantos fuesen los ramos que pasen por el punto múltiplo, y será tambien preciso que de substituir b en lugar de y resulte igual número de valores a de x.

De aquí se infiere que ha de ser tal la equacion, que se la pueda reducir á esta forma $(x-a)^m F + (x-a)^{m-1} (y-b)F' + (x-a)^{m-2}(y-b)^2 F'' + (x-a)^{m-3}(y-b)^3 F''' + \ldots (y-b)^m T = 0$, donde m representa el grado de mul-

multiplicidad del punto que se considera, y F, F' &c. T son funciones de x é y. Fig.

Con efecto, se viene á los ojos que si hacemos $x = a$, la equacion que en este supuesto se reduce á $(y - b)^m T = 0$, será m veces divisible por $y - b$, y dará por lo mismo m veces la equacion $y - b = 0$, ó $y = b$. Lo propio sucederá si hacemos $y = b$; porque en este supuesto la equacion se transformará en $(x - a)^m F$, será m veces divisible por $x - a$, y dará por consiguiente otras tantas la equacion $x - a = 0$, ó $x = a$; nada de esto se verificará si no fuere reductible la equacion á la forma que hemos dicho.

Todo esto sentado, supongamos que se diferencie m veces de seguida dicha equacion, considerando tambien, si se quiere, dx y dy como variables. Del principio de la diferenciacion se sigue, y lo probarémos con un egemplo, 1.° que solo en la última equacion diferencial habrá algunos términos que no estén afectos de $y - b$, ó de $x - a$. Luego quando huviere un punto múltiplo, las diferenciales primera, segunda, tercera &c. de la equacion se desaparecerán todas, substituyendo en ellas en lugar de x é y sus valores a y b que corresponden al punto múltiplo, excepto aquella cuya diferencial fuere del grado m. 2.° Tambien se verificará que en la última equacion diferencial los términos afectos de ddx, ddy, d^3x &c. y de todas las diferenciales de grados superiores, tendrán por factores alguna potencia de $x - a$, ó de $y - b$; y por consiguiente

Fig. se desaparecerán dichas diferenciales en el punto múltiplo.

439 De estos principios se sigue 1.° que en el punto múltiplo el valor de $\frac{dx}{dy}$ será siempre $\frac{0}{0}$, excepto el que se sacáre de la última equacion diferencial; porque como entónces se desaparecen todas las equaciones diferenciales, todo quanto multiplica dx es cero, y lo es tambien todo quanto multiplica dy. 2.° que como en la espresada última equacion no habrá ni ddx ni ddy, ni otra qualquiera de las diferenciales superiores, podrá sacarse inmediatamente de la equacion propuesta diferenciada m veces de seguida, considerando como constantes dx y dy. 3.° que en la misma última equacion diferencial dx y dy serán del grado m; y que por consiguiente si se partiere por dy^m, se sacarán resolviendo dicha equacion, m valores de $\frac{dx}{dy}$ que servirán para hallar las tangentes que pertenecen en el punto múltiplo á los diferentes ramos que por él pasaren.

Apliquemos todo esto, con la mira de aclararlo, á la curva cuya equacion es $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$. Si diferenciamos esta equacion m veces, esto es dos veces, sacarémos 1.° $2ady(y-b) - dx(x-a)^2 - 2xdx(x-a) = 0$. 2.° $2addy(y-b) + 2ady^2 - ddx(x-a)^2 - 2dx^2(x-a) - 2xddx(x-a) - 2dx^2(x-a) - 2xdx^2 = 0$. La primera de estas dos equaciones diferenciales se desaparecerá si substituimos en ella a en lugar de x, y b en lugar de y; y en la segunda se desaparecerán los términos afectos de ddx y ddy, por manera que se reducirá á $2ady^2 - 2adx^2 = 0$.

Pero si en vez de diferenciar dos veces la equacion Fig.
de la curva, considerando como variables dx y dy, la hubiéramos diferenciado considerando ambas cantidades como constantes, hubiéramos sacado $2ady^2 - 2dx^2(x - a) - 2dx^2(x - a) - 2xdx^2 = 0$, que con substituir a en lugar de x se reduce igualmente á $2ady^2 - 2adx^2 = 0$, y dá $\frac{dx}{dy} = \pm 1$, de cuyo valor se indician dos tangentes en el punto donde $x = a$, é $y = b$; será, pues, dicho punto un punto duplo, y como el valor $\frac{ydx}{dy}$ de la subtangente es en este caso $\pm b$, las dos tangentes forman con la ordenada un ángulo de 45°; todo esto lo verá patentemente el que trazáre la curva por medio de su equacion que dá $y = b \pm (x - a)\sqrt{\frac{x}{a}}$, y manifiesta que tiene la curva dos ramos de todo punto iguales y semejantes, que se cruzan en el punto O donde $x = a$, é $y = b$. Está pintada en la fig. 189.

440. Por medio de estos principios es facil determinar si una curva, cuya equacion es dada, tiene puntos múltiplos, quáles son y dónde están. Se diferenciará dicha equacion; se igualará con cero el multiplicador de dx y el de dy. Las dos equaciones que resultaren determinarán el valor que corresponde á x, y el que corresponde á y, si tuviere un punto múltiplo; ó los valores, si fuesen muchos los puntos múltiplos; pero el que quisiere cerciorarse de la existencia de dicho punto múltiplo, deberá indagar si los valores hallados de x é y cumplen con la equacion propuesta. Hecho esto, para averiguar el grado de multiplicidad del punto ó de los puntos hallados, se de-

Fig. berá diferenciar otra vez la equacion, considerando, para que sea menos complicado el cálculo, como constantes dx y dy. Si la substitucion de los valores hallados de x é y en la segunda equacion diferencial, no destruyere todos los términos, el punto hallado no será sino duplo; pero será mas que duplo si los destruyere. En este último caso se diferenciará por tercera vez la equacion, considerando siempre como constantes dx y dy; y si la substitucion de los valores de x é y no destruyere todos los términos, el punto será triplo; y será quádruplo por lo menos, si los destruyere todos. Se proseguirá substituyendo, y diferenciando á este tenor, hasta parar en una diferencial, tal que la substitucion de los valores de x é y no destruya todos sus términos.

Supongamos que se nos pregunte, por egemplo, quales son los puntos múltiplos de la curva, cuya equacion es $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$. Diferenciaremos esta equacion, y saldrá $4y^3dy - 2axydy - ay^2dx + 3bx^2dx = 0$, y despues de igualado con cero el coeficiente de dx y el de dy, tendremos $4y^3 - 2axy = 0$, y $3bx^2 - ay^2 = 0$. De la primera de estas dos equaciones inferiremos $y = 0$, ó $4y^2 - 2ax = 0$. La substitucion de o en lugar de y en la equacion $3bx^2 - dy^2 = 0$ dá $3bx^2 = 0$ ó $x = 0$; y como la substitucion de o en lugar de x, y en lugar de y en la equacion propuesta cumple con dicha equacion, ha de tener la curva un punto múltiplo donde $x = 0$ é $y = 0$, esto es en el origen.

Por lo que toca al valor $4y^2 - 2ax = 0$, ó y^2

=

$= \frac{ax}{2}$, si le substituimos en la equacion $3bx^2 - ay^2 = 0$, Fig. sale $3bx^2 - \frac{a^2x}{2} = 0$, que dá $x = 0$, ó $x = \frac{a^2}{6b}$; pero el valor $x = 0$ dá $y = 0$, por donde sacamos el mismo punto que antes; y el segundo valor dá $y^2 = \frac{a^3}{12b}$; pero como estos valores de x é y^2 no cumplen con la equacion propuesta, es señal de que no tiene la curva mas punto múltiplo que el del origen.

Para averiguar el grado de su multiplicidad, diferenciaremos otra vez, y sacaremos $12y^2dy^2 - 2axdy^2 - 2aydxdy - 2aydxdy + 6bxdx^2 = 0$, cuyos términos se desaparecen todos si substituimos en lugar de x é y sus valores. Luego el punto es mas que duplo.

Conviene, pues, que volvamos á diferenciar, y sacaremos $24ydy^3 - 2adxdy^2 - 2adxdy^2 - 2adxdy^2 + 6bdx^3 = 0$; si substituimos en lugar de x é y su valor cero, sacaremos $6bdx^3 - 6adxdy^2 = 0$: y como no se desaparece esta tercera diferencial, es señal de que es triplo el punto que hemos hallado.

Para determinar sus tangentes, divido la última equacion por $6b$, y por dy^3, y sale $\frac{dx^3}{dy^3} - \frac{adx}{bdy} = 0$, que dá $\frac{dx}{dy} = 0$, $\frac{dx^2}{dy^2} - \frac{a}{b} = 0$, y $\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$. El primer valor de $\frac{dx}{dy}$ está manifestando que la una de las tangentes en el punto múltiplo es paralela á las ordenadas; esto es que el uno de los ramos toca el ege de las ordenadas; pues sabemos por otra parte que el punto múltiplo está en el origen. Los dos valores $\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$ están diciendo que los otros dos ramos forman cada uno con el ege de las orde-

Fig. nadas un ángulo cuya tangente es $\sqrt{\frac{a}{b}}$, y tiran ácia lados
190. distintos respecto del ege. Se podrá pintar la curva, resolviendo su equacion que dá $y = \pm \sqrt{\left[\frac{ax}{2} \pm \frac{x}{2}\sqrt{(aa - 4bx)}\right]}$, tomando en lugar de a y b dos números á arbitrio, y dándole succesivamente á x diferentes valores positivos, y negativos.

441 Pero aunque se pueda determinar por las operaciones que hemos especificado un punto múltiplo, no se puede asegurar sin embargo que sean visibles todos los ramos que se pueden considerar como que pasan por dicho punto. Puede suceder que tenga raices imaginarias la equacion que determina las tangentes, en cuyo caso hay otros tantos ramos invisibles. Los puntos donde esto sucede están algunas veces apartados del curso de la curva, á la qual pertenecen no obstante, y se llaman *Puntos conjugados*; pero estén ó no apartados, siempre se debe considerar que en ellos se junta el número de ramos que señala su multiplicidad; la curva cuyos son es un individuo de una familia mas dilatada, en la qual todos los espresados ramos son visibles; pero llegan á ser invisibles en una, porque alguna de las cantidades constantes que lleva la equacion comun á toda la familia, es cero en el caso particular de la curva que se considera. Por esto en la curva cuya equacion es $m(y - b)^2 - x(x - a)^2 = 0$, de la qual la figura que
189 citamos es un caso particular, y llega á ser la misma quando $m = a$, que tiene una hoja, se desaparecerá esta hoja quando $a = 0$, cuya circunstancia reduce la equacion á

m

$m(y - b)^2 - x^3 = 0$; los dos ramos OMZ, $OM'Z$ que Fig.
estaban mas arriba del punto O, no se hallarán en la última, ó por lo menos no serán visibles. Porque podemos suponer que están todavia, mirando a no como de todo punto cero, sino como infinitamente pequeña. Verdad es que no por esto dejará de haber dos tangentes; pero basta este egemplo para dar á entender cómo puede suceder que se desaparezcan algunos ramos.

442 De lo que acabamos de decir en orden á los puntos múltiplos se pueden inferir muchas consecuencias útiles. 1.° Quando una espresion algebráica fraccionaria que lleváre una ó dos variables, fuere tal que substituyendo en ella en lugar de cada una de dichas variables ciertos valores determinados, llegue á ser $\frac{0}{0}$; se hallará el valor que entonces corresponderá á dicha espresion, diferenciando separadamente el numerador y el denominador, tantas veces de seguida quantas fuere menester para que no lleguen á ser ambos cero á un tiempo; y en esta diferenciacion se considerarán como constantes las diferencias primeras. Con efecto, toda espresion algebráica $\frac{B}{A}$ que lleváre dos variables x é y, por egemplo, se puede considerar como si fuese el valor de $\frac{dx}{dy}$; quiero decir que podemos siempre suponer $\frac{dx}{dy} = \frac{B}{A}$, y por consiguiente $Adx - Bdy = 0$. Pero una vez que segun suponemos A y B llegan á ser ambas cero á un tiempo, quando x é y tienen ciertos valores, se sigue de lo dicho hasta aquí, que para sacar el valor de $\frac{dx}{dy}$, se ha de diferenciar dicha equacion, miran-

Fig. rando dx y dy como constantes, hasta llegar á una equacion que subsista, aunque se substituyan los valores de x é y. Pero de estas diferenciaciones consecutivas se saca $dAdx - dBdy = 0$, $ddAdx - ddBdy = 0$, $d^3Adx - d^3Bdy = 0$ &c. que dán $\frac{dx}{dy} = \frac{dB}{dA}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{ddB}{ddA}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{d^3B}{d^3A}$; cuyas espresiones manifiestan que se han de diferenciar separadamente el numerador y el denominador, conforme hemos hecho, y la última de dichas equaciones dará el valor ó los valores de dx.

443 2.º Quando una equacion que llevâre muchas variables fuese tal, que á ciertos valores de la una de dichas variables, menos uno, haya de corresponder cierto número de valores iguales de la última, y que lo propio suceda con todas; se hallarán dichos valores diferenciando tantas veces de seguida, menos una, la equacion propuesta, suponiendo constantes las primeras diferencias de las variables x, y, z, é igualando con cero los multiplicadores de dx, dy, dz &c. los de dx^2, $dxdy$, $dzdy$ &c. y prosiguiendo á este tenor. Si todas estas equaciones concordaren unas con otras, y con la equacion propuesta, los valores de x, y, z &c. que de ellas se hubieren sacado, serán los valores que se buscaban.

444 Una vez que los valores de x é y que resultan de igualar con cero el coeficiente de dx y el de dy, han de convenir con la equacion finita propuesta, quando dicha equacion no viene propuesta en términos finitos, ó no se la puede reducir á que no lleve otros, no basta el cálculo

pa-

para asegurar la existencia de los puntos múltiplos. Fig.

De las Evolutas.

445 Para trazar las curvas no basta saber por medio de sus tangentes qual es su direccion en cada uno de sus puntos; es preciso averiguar tambien la cantidad de que se aparta la curva de su direccion, ó saber medir su *Curvatura*. Porque una misma curva no es igualmente curva en todos sus puntos; no se aparta de la misma cantidad de su tangente; no forma con ella en todos sus puntos ángulos de contacto siempre iguales. Solo el círculo tiene en todos sus puntos la misma curvatura, y por esta propiedad es muy acomodado para medir la curvatura de las demás curvas. Es tanto mas acomodado para esto, quanto aunque un mismo círculo sea igualmente curvo en todos sus puntos, los diferentes círculos tienen curvaturas diferentes, y recíprocamente proporcionales á sus radios ó á sus diámetros. Si *curvamos* circularmente dos rectas iguales, formando con la una una circunferencia entera, y con la otra no mas que media circunferencia, esta será dos veces menos curva que la otra, pues tambien el círculo cuya semicircunferencia fuese, tendrá un radio duplo del radio del círculo cuya circunferencia entera fuere la otra linea. 191.
En general, sean ABD, abd dos círculos desiguales, cuyos radios AC, ac estén uno con otro en razon de m á n; tómense en dichos círculos arcos iguales AB, ab; el arco AB será menos curvo que el arco ab en la misma razon que

Fig. que el radio *AC* es mayor que el radio *ac*; de suerte que si el arco *ab* tiene una curvatura de *m* grados, minutos ó partes, el arco *AB* tendrá una curvatura de *n* grados, minutos ó partes proporcionales. Porque si tomamos el arco *AB'* semejante al arco *ab*, el arco *AB'* será al arco *ab*, como la circunferencia *ABD* es á la circunferencia *abd*, ó como el radio *AC* al radio *ac*; esto es, como *m* á *n*. Luego ya que *ab* es igual á *AB*, será tambien *AB'* á *AB* como *m* á *n*. Por consiguiente, si *AB'*, semejante á *ab*, fuere un arco de *m* grados, ó partes, *AB* será un arco de *n* grados ó partes. Luego la curvatura de *ab* será á la de *AB* como *m* á *n*. Se echa, pues, de ver que en una misma estension *ab*, *AB*, los círculos *abd*, *ABD* tienen curvaturas que están una con otra como *m* á *n*, ó como *AC* á *ac*, esto es en razon recíproca de sus radios ó diámetros.

Es pues facil comparar la curvatura de diferentes círculos, comparando sus radios ó diámetros. Y por lo mismo para comparar la curvatura de diferentes curvas ó la de una misma curva en sus diferentes puntos, se buscará el círculo que tenga la misma curvatura que una curva dada en un punto dado; esto es, el círculo que tocando la curva en el punto dado, se aplique tan exactamente á la curva, que entre ella y el círculo sea imposible que pase otro círculo. Porque como con aumentar ó disminuir el radio de un círculo mengua ó crece su curvatura por todos los grados posibles, si no hubiese círculo alguno que se arrime mas á la curva que el círculo hallado, se podrá inferir que tiene el

el círculo la misma curvatura que la curva en dicho punto. Fig.

446 Imaginemos un círculo *MmIH* que toca en el 192.
punto *M* la curva *Mmm'*, quiero decir su tangente *MO*, y que pasa por el punto *m'*. Si el círculo pasáre por entre la tangente y la curva, se apartará de la tangente menos que la curva, será menos curvo que ella en el punto *M*. Al contario, si pasáre la curva entre el círculo y la tangente, el círculo se apartará de la tangente mas que la curva, será mas curvo que ella en el punto *M*. Pero en ambos casos quanto mas inmediato estuviere el punto *m'*, donde el círculo corta la curva, al punto *M* donde la toca, tanto mas se aproximará el círculo á tener la misma curvatura que la curva. Se la arrimará infinitamente, se confundirá con ella, y tendrá con efecto la misma curvatura, quando el punto *m* se confundiere con el punto *M*.

Conoceremos por consiguiente el círculo *MIH* de igual curvatura que la curva en el punto *M*, si determinamos la cantidad del diámetro *MH* de un círculo, que tocando la curva *Mmm'* en *M*, la corte en un punto *m* infinitamente inmediato á *M*, ó coincidente con *M*. El diámetro *MH* y el radio *MK* del espresado círculo se llaman tambien *el Diámetro y el Radio de la Curvatura* en el punto *M*; el centro *K* se llama *el Centro de la Curvatura*. Se averigua la curvatura de los diferentes puntos de una curva, ó de curvas diferentes por medio de la razon inversa de los radios de curvatura en dichos puntos diferentes.

El círculo que tiene en un punto dado la misma curva-

Fig. vatura que una curva, se llama tambien *Círculo osculador*, y su radio el *Radio del Círculo osculador*.

193. 447 Para hallar la espresion del radío de curvatura, suponen los Matemáticos que una linea curva qualquiera *BDF* cóncava ácia un mismo lado esté envuelta con un hilo *ABDF*, estando el uno de sus estremos fijo en *F*, y el otro tendido á lo largo de la tangente *BA*, y que el estremo *A* se mueva, teniéndole siempre tirante, y desembolviendo continuamente la curva *BDF*; en virtud de cuyo movimiento es constante que el estremo *A* del hilo trazará una linea curva *AHK*. A la linea curva *BDF* la llaman la *Evoluta* de la curva *AHK*. Las partes rectas *AB*, *HD*, *KF* del hilo *ABDF*, se llaman *Radios de la evoluta*, y son los radios de curvatura ó los radios de los círculos osculadores, conforme manifestaremos muy en breve.

448 Como el hilo *ABDF* es siempre de una misma longitud, se infiere que la porcion de curva *BD* es igual á la diferencia que hay entre los radios *DH*, y *BA* que nacen desde sus estremos; la porcion *DF* será tambien igual á la diferencia que hay entre los radios *FK*, *DH*, y la curva entera *BDF* será igual á la diferencia entre los radios *FK*, *BA*. Por donde se echa de vér que si el radio *BA* de la curva fuese nulo, quiero decir que si el estremo *A* del hilo se confundiere con el origen *B* de la curva *BDF*, en este caso los radios de la evoluta *DH*, *FK* serian iguales á las porciones *BD*, *BDF* de la curva *BDF*.

194. 449 Si consideramos la curva *BDF* como un polýgo-

gono *BCDEF* de una infinidad de lados, es constante que Fig.
el estremo *A* del hilo *ABCDEF* traza el arco pequeño *AG*, cuyo centro está en *C*, hasta que el radio *CG* no forme mas que una linea recta con el lado pequeño *CD* inmediato á *CB*; y que el mismo estremo *A* del expresado hilo traza tambien el arco pequeño *GH* cuyo centro está en *D*, hasta que el radio *DH* no forma mas que una recta con el pequeño lado *DE*; y así prosiguiendo hasta que la curva *BCDEF* esté enteramente desembuelta. Podemos, pues, considerar la curva *AHK* como el conjunto de una infinidad de arcos pequeños de círculo *AG*, *GH*, *HI*, *IK* &c. cuyos centros están respectivamente en los puntos *C*,*D*,*E*,*F* &c. De todo esto se infiere

450. 1.º Que los radios de la evoluta la tocan con- 193.
tinuamente como *DH* en *D*, *KF* en *F* &c. y que son todos perpendiculares á la curva *AHK* que ván trazando, como *DH* en *H*, *FK* en *K* &c. Porque *DH*, por egemplo, 194.
es perpendicular al pequeño arco *GH*, y al pequeño arco *HI*, pues pasa por sus centros *D*, *E*. Por cuyo motivo 1.º la evoluta *BDF* termina el espacio donde estan todas las perpendiculares á la curva *AHK*. 2.º si prolongáramos un radio qualquiera *HD* que corta el radio *AB* en 193.
R, hasta que encuentre otro radio qualquiera *KF* en *S*, podríamos siempre tirar desde todos los puntos de la parte *RS* dos perpendiculares á la curva *AHK*, excepto desde el punto de contacto *D*, desde el qual no se puede tirar mas que una; es á saber *DH*. Porque se viene á los ojos

que

Fig. que la interseccion R de los radios AB, DH corre todos los puntos de la parte RS; mientras el radio AB traza con su estremo A la linea AHK, á la qual se mantiene constantemente perpendicular, y que los radios AB, HD no llegan á confundirse sino quando la interseccion R coincide con el punto de contacto D.

451 2.° Que si se prolongan los arcos pequeños HG
194. hasta l; IH hasta m; KI hasta n &c, ácia el punto A por donde se empieza á desembolver la curva; cada arco pequeño como IH tocará esteriormente su inmediato HG, porque los radios CA, DG, EH, FI ván siempre creciendo á medida que los arcos pequeños que componen la curva AHK, se apartan del punto A. Por la misma razon si se prolongan los pequeños arcos AG hasta o; GH hasta p; HI hasta q, ácia el lado opuesto á A; cada arco pequeño como HI tocará interiormente su inmediato IK. Y como podemos considerar los puntos H y I, D y E como coincidentes por razon de la infinita pequeñez del arco HI y del lado DE; se sigue que si desde un punto qualquiera medio D de la evoluta BDF como centro, y con el radio DH trazamos un círculo mHp, tocará esteriormente la parte AH que estará toda entera dentro del espresado círculo, y tocará interiormente la otra parte HK que estará toda entera fuera del espresado círculo; quiero decir que tocará, y cortará la curva AHK en el mismo punto H, del mismo modo que la tangente toca, y corta la curva en el punto de inflexion.

3.°

452 3.° El radio *HD* del arco pequeño *HG* no discrepa de los radios *CG*, *EH* de los arcos inmediatos *GA*, *HI* sino de una cantidad infinitamente pequeña *CD* ó *DE*; de donde resulta que por poco que se acorte el radio *DH* será menor que *CG*, y que por consiguiente su círculo tocará interiormente la parte *HA*; y que por poco que se le alargue será mayor que *HE*; por cuyo motivo su círculo tocará esteriormente la parte *HK*; por manera que el círculo *mHp* es el menor de todos los que tocan esteriormente la parte *HA*, y el mayor de quantos tocan interiormente la parte *HK*; quiero decir, que entre este círculo y la curva no es posible que pase otro alguno. Fig. 194.

453 4.° Como la curvatura de los círculos crece á medida que menguan sus radios (445), se sigue que la curvatura del arco pequeño *HI* será respecto de la curvatura del pequeño arco *AG* recíprocamente como el radio *BA* ó *CA* de este último es á su radio *DH* ó *EH*; quiero decir que la curvatura en *H* de la curva *AHK* será á su curvatura en *A*, como el radio *BA* al radio *DH*; y que la curvatura en *K* es á la curvatura en *H*, como el radio *DH* es al radio *FK*. Por donde se echa de ver que la curvatura de la linea *AHK* vá menguando continuamente al paso que la linea *BDF* se desembuelve; por manera que en el punto *A* por donde empieza á desembolverse es la mayor posible, y la menor en el punto *K* donde suponemos que acaba de desembolverse la curva.

454 5.° Que los puntos de la evoluta no son mas

que

Fig. que el concurso de las perpendiculares tiradas por los estremos de los pequeños arcos que componen la curva AHK. Pongo por caso, el punto D ó E es el concurso de las perpendiculares HD, IE del arco pequeño HI; de suerte que si la curva AHK fuese dada con la posicion de una de sus perpendiculares HD, se hallará el punto D ó E donde toca la evoluta, con buscar el punto de concurso de las perpendiculares infinitamente próximas HD, IE por el método que vamos á declarar.

195. 455 Supongamos primero que querámos averiguar el valor del radio de curvatura CM de una curva AMD, cuyas ordenadas PM son perpendiculares al ege AB, correspondiente al punto M, para trazar un círculo GM de igual curvatura en el punto M que la curva propuesta. Tiraremos las CG, MR paralelas, y la AE perpendicular al ege AB; prolongaremos la MP hasta F, y tiraremos la mpf paralela é infinitamente próxima á la MF; llamarémos la abscisa AP, x; PM, y; AM, u; MC, r; GE, b; AE ó PF, c; será $Mr = dx$, $mR = dy$, $Mm = du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; $CF = r - b - x$, y $GF = b + x$.

Sentado esto, de la naturaleza del círculo sacamos $GF \times (2GC - GF) = (FM)^2$; esto es, $2br - bb - 2bx + 2rx - xx = cc + 2cy + yy$, de cuya equacion la diferencial es $2rdx - 2bdx - 2xdx = 2cdy + 2ydy$, ó $rdx - bdx - xdx = cdy + ydy$; y la diferencial de esta es $rddx - bddx - dx^2 - xddx = cddy + dy^2 + yddy$; de donde sacaremos $(r - b - x)ddx - ddy(c + y)$

$=$

$= dx^2 + dy^2 = du^2$. Pero de los triángulos rectángulos Fig.
semejantes MRm, MFC sacaremos $Mm : mR :: MC : CF$; esto es, $du : dy :: r : CF = \frac{rdy}{du} = r - b - x$; y $Mm : MR :: MC : MF$; esto es, $du : dx :: r : MF = \frac{rdx}{du} = c + y$. Si substituimos estos valores de $r - b - x$, y $c + y$ en la equacion $(r - b - x)ddx - ddy(c + y) = dx^2 + dy^2 = du^2$ sacaremos $\frac{rdyddx}{du} - \frac{rdxddy}{du} = du^2$, que dá $r = \frac{du^3}{dyddx - dxddy}$, valor del radio de curvatura en el punto M de la curva propuesta.

Esta espresion del radio de curvatura la podremos simplificar suponiendo constante alguna de las diferenciales dx, dy, du, la que quisiésemos, dx por egemplo, en cuyo supuesto $ddx = o$, y la espresion $\frac{du^3}{dyddx - dxddy}$ se reduce á $\frac{du^3}{-dxddy} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ con substituir en lugar de du su valor $(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$.

De los triángulos semejantes MRM, MFC, sacaremos tambien $Mm : MR :: MC : MF$, ó $(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} : dx :: \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} : MF = \frac{dx(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$.

456 Para determinar el radio de curvatura MC en el caso de concurrir todas las ordenadas en un punto comun B; imaginaremos dos ordenadas infinitamente próximas BM, Bm; dos radios CM, Cm tambien infinitamente próximos; y las BF, Bf respectivamente perpendiculares á estos radios, y llamaremos BM, y; Mm, dx; será, pues, 196.

Fig. $Rm = dy$, y $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Los triángulos semejantes MmR, BMF darán MF ó $MH = \frac{ydx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, y $BF = \frac{ydy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, de cuya cantidad la diferencial $Bf - BF$, suponiendo dx constante, será $\frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydxddy}{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Pero de los sectores semejantes CMm, CHf sacaremos esta proporcion $Mm - Hf : Mm :: MH : MC$; luego

$$MC = \frac{(ydx^2 + ydy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy} = \frac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}.$$

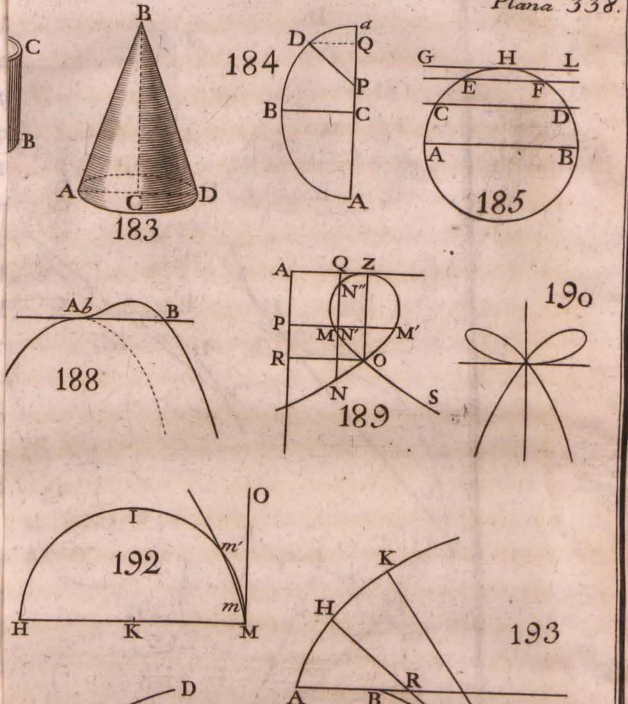
Si y fuese infinita, ó lo que es lo propio, si las ordenadas fuesen paralelas, la espresion que acabamos de sacar del radio osculador, se reduciría á $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, conforme hallamos antes.

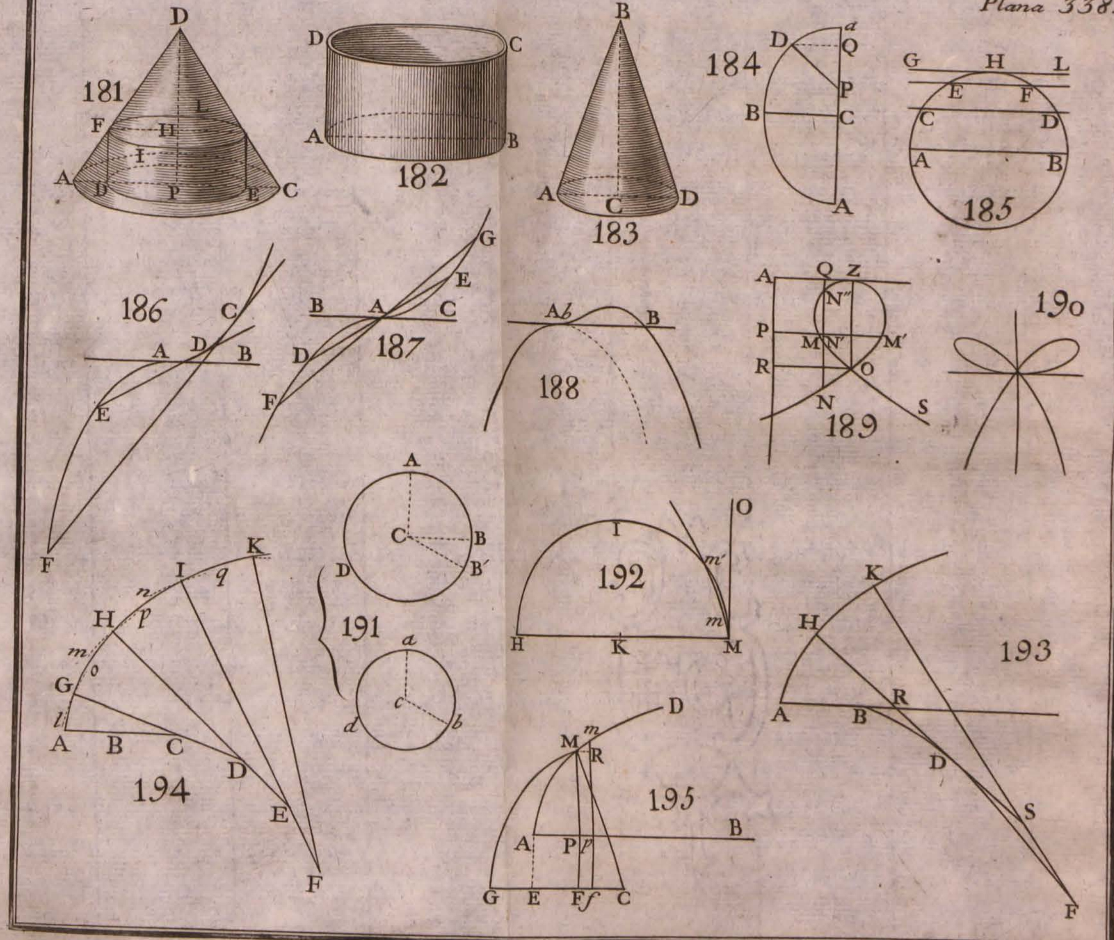
457 Una vez que no hemos sacado mas que un valor de MC, hemos de inferir que *una linea curva no tiene mas que una evoluta.*

197. 458 Cuestion I. *Hallar el radio de la evoluta de la parábola vulgar, cuya equacion es* yy = ax.

Diferencio esta equacion, y saco $dy = \frac{adx}{2y} = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$; diferencio la equacion $dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$, suponiendo dx constante, y saco $ddy = -\frac{adx^2}{4x\sqrt{ax}}$. Si substituimos estos valores en la fórmula $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, sacaremos $ME = \frac{(a+4x)\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$. De donde sacaremos la construccion siguiente.

Por el punto T donde la tangente MT encuentra el ege, tiraremos la TE paralela á MC, que encontrará á la


183
184
185
188
189
190
192
193
195


181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195

MP prolongada en el punto *E*. Porque de los ángulos rectos *MPT*, *MTE* sacaremos $MP : PT :: PT : PE$; esto es $\sqrt{ax} : 2x :: 2x : PE = \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, despues de multiplicado el numerador y el denominador por $\sqrt{ax}$, y hecha la reduccion correspondiente; por consiguiente $MP + PE = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$. Fig.

De los triángulos rectángulos *MPQ*, *MEC* sacaremos $PM : PQ :: ME : EC$; esto es, $\sqrt{ax} : \frac{1}{2}a :: \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a} : EC = PK = \frac{1}{2}a + 2x$, y $QK = 2x$; de donde inferiremos la construccion siguiente.

Tomaremos *QK* dupla de *AP*, ó lo que es lo mismo, tomaremos *PK* igual á *TQ*, y tiraremos *KC* paralela á *PM*, que encontrará la perpendicular *MC* en un punto *C*, que será de la evoluta *BCG*.

Para hallar el punto *B* donde el ege *AB* toca la evoluta *BCG*; consideraremos que $PQ = \frac{1}{2}a = \frac{ydy}{dx}$. Y como esta cantidad es constante, será siempre una misma, esté donde estuviese el punto *M*. Y por consiguiente, quando estuviese en *A*, será tambien *PQ* que entonces es $AB = \frac{1}{2}A$.

459 Cuestion II. *Hallar la naturaleza de la evoluta* BCG *de la parábola vulgar.* 197.

Llamarémos la abscisa *BK*, u; la ordenada *KC* ó *PE*, t, y será $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, y $AP + PK - AB$ ó $u = 3x$; si substituimos en lugar de x su valor $\frac{1}{3}u$ en la equacion $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, sacaremos $27att = 16u^3$, que espresará la relacion entre *BK* y *KC*; cuya equacion está diciendo que la evoluta *BCG* de la parábola vulgar es una segunda

 pa-

Fig. parábola cúbica, cuyo parámetro es igual á $\frac{27}{16}$ del parámetro de la parábola dada.

460 Cuestion III. *Hallar la espresion general del radio de curvatura para las tres secciones cónicas.*

De la equacion $yy = px \mp \frac{pxx}{a} = \frac{apx \mp pxx}{a}$, que por lo dicho (216) representa las tres secciones cónicas, sacaremos $y = \frac{\sqrt{(apx \mp pxx)}}{\sqrt{a}}$, cuya diferencial es $dy =$

$$\frac{apdx \mp 2pxdx}{2(aapx \mp apxx)^{\frac{1}{2}}}, \text{ y } ddy = \frac{-a^3ppdx^2}{(4aapx \mp 4apxx) \times (aapx \mp apxx)^{\frac{1}{2}}}$$

Si substituimos estos valores en $\frac{dx^2 + dy^2 \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-dxddy}$, espresion general de MC (455), sacaremos $MC =$

$$\frac{(aapp \mp 4appx + 4ppxx + 4aapx \mp 4apxx)(aapp \mp 4appx + 4ppxx + 4a^2px \mp 4apx^2)^{\frac{1}{2}}}{2a^3pp}$$

$$= \frac{4(MQ)^3}{pp}, \text{ pues } MQ = \frac{y\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx} = \frac{\sqrt{(aapp \mp 4appx + 4ppxx + 4aapx \mp 4apxx)}}{2a}.$$

De donde sacaremos la construccion siguiente.

198. Tomarémos MC quadrupla de la quarta proporcional
199. continua al parámetro AF, y á la perpendicular MQ que remata en el ege; el punto C será uno de los de la evoluta.

199. Si hiciéramos $x = 0$, sería $AB = \frac{1}{2}p$. Y si en la elipse hiciéramos $x = \frac{1}{2}a$, sacaríamos $DG = \frac{a\sqrt{ap}}{2p}$; esto es, igual á la mitad del parámetro del ege menor. Por donde se echa de ver que en la elipse la evoluta BCG remata en un punto G del ege menor DO.

Si $a = p$ en la elipse, saldrá $MC = \frac{1}{2}a$, en cuyo caso todos los radios de la evoluta serán iguales unos con otros, y la evoluta no será mas que un punto; quiero de-

cir

cir que entonces se transformará la elipse en un círculo, cuya evoluta es el centro mismo. Fig.

461 Cuestion IV. *Hallar el radio de la evoluta de una semicicloide vulgar* AMD, *cuya base* BD *es igual á la semicircunferencia* BEA *del círculo generador.* 200.

Llamarémos AP, x; PM, y; el arco AZE, u; y el diámetro AB, $2a$. De la propiedad del círculo inferiremos $PE = \sqrt{(2ax - xx)}$, y de la propiedad de la curva $y = u + \sqrt{(2ax - xx)}$, cuya diferencial es $dy = du + \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = \frac{2adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, ó $dx\sqrt{\left(\frac{2a - x}{x}\right)}$, con substituir en lugar de du la cantidad $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, que segun veremos mas adelante, es el valor de du. Si diferenciamos en el supuesto de ser dx constante, sacaremos $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{(2ax - xx)}}$, cuyos valores substituidos en $\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{-dxddy}$ dan $MC = 2\sqrt{(4a^2 - 2ax)}$; esto es $2BE$ ó $2MG$.

Si hiciéramos $x = 0$, sería $AN = 4a$ el radio de la evoluta en el vértice A. Pero si suponemos $x = 2a$, hallaremos que el radio de la evoluta en el punto D es nulo ó cero; de lo que se infiere que la evoluta tiene su origen en D, y remata en N, por manera que $BN = BA$.

462 Cuestion V. *Hallar la naturaleza de la evoluta de la trocoide.* 200.

Concluiremos el rectángulo BS, trazaremos el semicírculo DIS, cuyo diámetro es DS, y tiraremos DI paralela á MC ó BE. En virtud de esto, el ángulo BDI será igual al ángulo EBD, y por consiguiente serán iguales los arcos DnI, BeE; luego las cuerdas DI, BE ó CG se-

Fig. serán tambien iguales. Si tiramos *IC* será igual, y paralela á *DG*, que por la generacion de la cicloide es igual al arco *BeE* ó *DnI*, y por lo mismo la evoluta *DCN* es una semicicloide, cuya base es la recta *NS* igual á la semicircunferencia *DIS* de su círculo generador; quiero decir, que es la misma semicicloide *AMBD* puesta al reves.

De los Puntos de Inflexion.

463 Los puntos de inflexion, segun digimos antes (432), son aquellos como *M* donde la concavidad de una curva se muda en convexidad. Para determinar estos puntos, podemos considerar que la tangente en *M* es á un tiempo tangente de las dos porciones *MA*, *MO*; en cuyo supuesto podemos investigar al uno y al otro lado del punto *M* dos elementos *Mm*, *Mm'* en linea recta, y por consiguiente el radio de la evoluta en el punto de inflexion *M* será infinito, pues los dos radios de curvatura correspondientes á los puntos *M* y *m'* serán ambos perpendiculares á la recta *mm'*, serán paralelos, y no concurrirán sino á una distancia infinita. Pero como podemos suponer los espresados elementos tan pequeños que se desaparezcan ambos, en este caso el radio de la evoluta será cero.

Porque en el supuesto que hemos hecho de estar en linea recta los dos elementos de la curva inmediatos al punto de inflexion, nada determina de qué longitud son los dos espresados elementos consecutivos. Y como aunque se redugeran ambos á un punto, no por esto dejarian de es-

tar

tar en una misma linea recta, las dos perpendiculares cae- Fig.
rian entonces una sobre otra, y se encontrarian en el punto mismo de donde salen. Esto es cabalmente lo que pasa en las curvas, cuyo radio de la evoluta es cero en el punto de inflexion. Porque siendo entonces infinita la curvatura, cada uno de los dos elementos consecutivos se confunde con la tangente infinitamente menos que en otro caso qualquiera, y por lo mismo los hemos de considerar como dos puntos que se confunden uno con otro. Pueden, pues, los dos elementos estar en linea recta, sin que por esto el radio de la evoluta sea infinito; pero esto manifiesta que en el punto de inflexion, el radio de la evoluta es siempre infinito ó nulo.

464 Luego en el punto de inflexion el radio de la evoluta es siempre, ó nulo, ó infinito. Luego la fórmula $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, que sacamos antes para hallar el radio de curvatura, podrá tambien guiarnos para saber sobre qué supuestos habremos de caminar quando quisiésemos hallar el punto ó los puntos de inflexion de alguna curva dada. A fin de determinar con mas claridad estos supuestos, hemos de recordar que $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)^3}$; que por consiguiente hemos de considerar que están elevadas al cubo las cantidades que el paréntesis encierra; que el cubo de dx^2 es dx^6, y que la raiz quadrada de $\left(dx^2\right)^3$ ó de dx^6 es dx^3. Por consiguiente si hubiéramos de divi-

Fig. dir por dx^2 el numerador de la fraccion $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ sin alterar su valor, sería preciso dividir al mismo tiempo su denominador por dx^3 para hacer la compensacion correspondiente. Luego si dividimos el numerador de $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ por dx^2, y el denominador por dx^3, será $\frac{dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy} =$

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-ddy}{dx^2}} = 0 \text{ ó } \infty$$ en el punto de inflexion. Y como una fraccion es cero quando su denominador es infinito, y es infinita quando su denominador es cero, se sigue que en el punto de inflexion ha de ser $= 0$ ó ∞ $\frac{-ddy}{dx^2}$ que es el denominador de la fraccion $\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-ddy}{dx^2}}$.

La espresion $\frac{-ddy}{dx^2} = 0$ ó ∞ está diciendo que para hallar el punto de inflexion de una curva, se ha de diferenciar dos veces su equacion, tratando dx como constante, para sacar en cantidades finitas el valor de $\frac{-ddy}{dx^2}$, é igualarle con cero ó con el infinito. De esta equacion, y de la de la curva se inferirán los valores de x é y correspondientes al punto de inflexion, ó á los puntos de inflexion, si hubiere muchos.

202. 465 Cuestion I. *Hallar el punto de inflexion de una curva* AFK, *cuyo diámetro sea la linea recta* AB; *tal que*

la

la relacion entre su abscisa AE *que llamarémos* x , *y su ordenada* EF *que llamarémos* y , *esté cifrada en la equacion* axx $=$ xxy $+$ aay. Fig.

La equacion de la curva es $y = \frac{axx}{xx+aa}$ que dá $dy = \frac{2a^3xdx}{(xx+aa)^2}$; y diferenciando esta cantidad, tratando dx como constante, sacarémos $ddy = \frac{2a^3dx^2(xx+aa)^2 - 8a^3xxdx^2(x^2+a^2)}{(xx+aa)^4}$ que dividiéndolo todo por $(xx + aa)$, egecutando las operaciones indicadas, y partiéndolo todo por dx^2, se reduce á $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2a^3xx+2a^5-8a^3xx}{(xx+aa)^3} = \frac{-6a^3xx+2a^5}{(xx+aa)^3}$; si suponemos esta cantidad igual á cero, será cero su numerador, y dará $3xx = a^2$, y $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Si substituyéramos en lugar de xx su valor $\frac{1}{3}aa$ en la equacion $y = \frac{axx}{xx+aa}$, sacaríamos EF ó $y = \frac{1}{4}a$.

466 Cuestion II. *Hallar el punto de inflexíon de la curva, cuya equacion es* y $-$ a $=$ (x $-$ a)$^{\frac{3}{5}}$. 202

Diferenciando esta equacion saco $dy = \frac{3}{5}(x-a)^{-\frac{2}{5}}dx$, y $ddy = -\frac{6}{25}(x-a)^{-\frac{7}{5}}dx^2$; luego $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-6}{25\sqrt[5]{[(x-a)^7]}}$, tratando dx como constante. Suponiendo este valor igual á cero, sacaríamos $-6=0$, que nada dice; suponiéndole infinito será el denominador $25\sqrt[5]{(x-a)^7} = 0$, que dá $x = a = AE$; porque qualquiera potencia ó raiz de cero es cero.

467 Cuestion III. *Hallar el punto de inflexion de la semicicloide prolongada* AFK, *cuya base* BK *es mayor que la semicircunferencia* ADB *del círculo generador, cuyo centro está en* C. 203

Es-

Fig. Esta cuestion se reduce á hallar en el diámetro AB el punto E, tal que la aplicada EF encuentre la cicloide en el punto de inflexíon F. Para conseguirlo, llamarémos ADB, a; BK, b; AB, $2c$; AE, x; ED, z; AD, u; EF, y. La propiedad de la cicloide dá $y = z + \frac{bu}{a}$, y por consiguiente $dy = dz + \frac{bdu}{a}$. Como el círculo dá $z = \sqrt{(2cx - xx)}$, será $dz = \frac{cdx - xdx}{\sqrt{(2cx - xx)}}$, y $du = \frac{cdx}{a\sqrt{(2cx - xx)}}$ (461); substituyendo pues estos valores de dz y du en el valor de dy, sacaeémos $dy = \frac{acdx - axdx + bcdx}{a\sqrt{(2cx - xx)}}$, cuya equacion diferenciada, tratando dx como constante, dará $ddy = \frac{(bcx - acc - bcc)dx^2}{(2cx - xx)a\sqrt{(2cx - xx)}}$, y $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{bcx - acc - bcc}{(2cx - xx)a(2cx - xx)^{\frac{1}{2}}}$, cuyo denominador igualado con cero no nos enseñaría nada; será por consiguiente $bcx - acc - bcc = 0$, que dá $x = c + \frac{ac}{b}$, y $CE = \frac{ac}{b}$.

Se viene á los ojos que si b no fuese mayor que a, no habria ningun punto de inflexíon, pues si fuese menor, sería CE mayor que CB.

468 Cuestion IV. *Hallar el punto de inflexíon de*
204 *la conchoide* AFK *de Nicomedes, cuya equacion será* $y = \frac{(b + x)\sqrt{(aa - xx)}}{x}$, *en el supuesto de ser* AB *ó* FD, a; BP, b; BE, x; *y* EF, y.

Diferenciarémos la equacion de la curva, y sacarémos $dy = \frac{-x^3dx - aabdx}{xx\sqrt{(aa - xx)}}$. Si diferenciamos esta, saldrá $ddy = \frac{(2a^4b - aax^3 - 3aabxx)dx^2}{(aax^3 - x^5)\sqrt{(aa - xx)}}$, y $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2a^4b - aax^3 - 3aabxx}{(aax^3 - x^5) \times \sqrt{(aa - xx)}}$, cuyo numerador igualado con cero dá $x^3 + 3bxx - 2a^2b = 0$, de cuya equacion se hallará una raiz que será el valor de BE que se pide.

DEL

Fig.

DEL CÁLCULO INTEGRAL.

469 Es el cálculo integral, segun hemos insinuado (303), el inverso del cálculo diferencial, un modo de calcular que restituye la cantidad que el cálculo diferencial resolvió en sus elementos. Su objeto es por consiguiente hallar las razones que hay entre las cantidades, una vez averiguadas por medio del cálculo diferencial las razones que hay entre sus elementos. Está muy lejos este cálculo de hallarse tan adelantado como el cálculo diferencial; este no tiene ya mas que adelantar, pues no hay cantidad alguna variable espresada algebráicamente, sea la que fuere, cuya diferencial no se pueda conseguir. Pero hay una infinidad de diferenciales que no es posible integrar, ya porque no pueden provenir algunas de ellas de ninguna diferenciacion, quales serian estas xdy, $xdy—ydx$; ya porque no se ha hallado todavia respecto de muchas un método para integrarlas; y entre estas hay algunas cuya integral no hay esperanzas de encontrarla jamás.

470 Una vez que el cálculo integral es el inverso del cálculo diferencial, las reglas para integrar las cantidades se han de sacar de los mismos métodos que hemos declarado para diferenciarlas. Seguiremos, pues, este camino, declarando primero como se integran las cantidades incomplexas, y despues manifestaremos por qué métodos se han de integrar las diferenciales complexas.

Pero antes de todo hemos de prevenir que hay también

Fig. bien un signo particular para representar la integral de una diferencial qualquiera, del mismo modo que le hay para representar la diferencial de una cantidad propuesta. La señal de esta integral es la letra S, que significa *suma* puesta antes de la diferencial cuya integral se quiere representar; así $S.dx$, $S(adx + bdy)$ representan respectivamente las integrales de las cantidades diferenciales dx, $adx + bdy$.

471 Hecha esta prevencion, bien se echa de ver que $S.dx = x$, pues si diferenciamos x, sacarémos dx.

De donde se infiere que para hallar la integral de una diferencial multiplicada ó dividida por una constante qualquiera, basta tomar la integral de dicha diferencial sin contar con la constante, y despues multiplicar ó dividir la integral hallada, por dicha constante. $S\frac{dx}{a} = \frac{x}{a}$; $S.adx = ax$. Porque si diferenciamos $\frac{x}{a}$ resultará $\frac{dx}{a}$, y ax diferenciada es adx.

472 Veamos ahora cómo se ha de integrar una diferencial incomplexa que no lleva mas que una variable x multiplicada ó dividida por constantes qualesquiera. Se logra este intento 1.° borrando dx en la diferencial propuesta. 2.° añadiéndole una unidad al esponente de la variable. 3.° dividiendo lo que resultáre por dicho esponente aumentado de la unidad; el resultado será la integral de la diferencial propuesta.

Supongamos que se haya de integrar $ax^m dx$, siendo a una constante qualquiera, y m un esponente tambien qual-

qualquiera; borraremos dx; añadiremos una unidad al esponente m, y resultará ax^{m+1}; dividiremos este resultado por $m+1$, y sacaremos $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$; luego $S.ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$. Fig.

Porque si diferenciamos la cantidad $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$, sacaremos $\frac{(m+1)ax^{m+1-1}dx}{m+1} = ax^m dx$; luego &c.

Por el mismo camino hallaríamos que $S.mx^{m-1}dx = \frac{mx^{m-1+1}}{m+1-1} = x^m$.

473 Hay sin embargo un caso muy comun al qual parece que no se puede aplicar esta regla fundamental. Si la diferencial cuya integral se ha de sacar fuese $x^{-1}dx$, ó $\frac{dx}{x}$, hallaríamos en virtud de la regla dada, que $S.\frac{dx}{x} = \frac{x^0}{0} = \infty$ que de nada sirve.

Nos sería sumamente facil apear con muy pocas palábras esta dificultad, pues hemos sentado en el cálculo diferencial (343) quanto es menester para conseguirlo. No obstante seguiremos otro rumbo por las razones que no se le escaparán á ningun lector atento á medida que se fuere internando en lo que llevamos ánimo de declarar en este tratado.

474 Entre muchas cuestiones cuya resolucion pende á un tiempo del cálculo diferencial é integral, hay una cu-

Fig. cuyo asunto es *quadrar* las lineas curvas, ó hallar el valor del espacio comprehendido entre algunas de sus coordenadas, y una porcion de las mismas curvas; por egemplo, ha-
205. llar el valor del espacio $BAPM$ es quadrar la curva CBM. Aunque trataremos estensamente mas adelante esta materia, nos hace al caso tocarla desde ahora para poder tratar con mas desembarazo algunos de los puntos que llamarán muy en breve nuestra atencion.

Para valuar el espacio $ABMP$, buscaremos primero su diferencial, ó la espresion de uno de los infinitos elementos infinitamente pequeños, de que podemos suponer que se compone; y hallando despues la suma de todos estos elementos, ó la integral de la diferencial que hubiésemos hallado del espacio propuesto, tendremos averiguado el valor del espresado espacio.

Busquemos, pues, la diferencial del espacio $ABMP$, en el supuesto (que por ahora nos basta) de ser las ordenadas PM, pm, que llamaremos y, perpendiculares á las abscisas AP, Ap que llamaremos x. Probaremos con gran facilidad que la diferencial que buscamos de la area finita $ABMP$ es igual al rectángulo $PMnp$, quando llega á ser menor que qualquiera cantidad asignable, la diferencia Pp de las dos abscisas, ó la diferencia mn de las dos ordenadas; por manera que siendo Pp, dx; y mn, dy, la diferencial de la area $ABMP = ydx$, y $S.ydx = ABMP$; esto es probar otra vez, pero por otro método que en el cálculo diferencial (307), que el espacio $ABMP$ se compone

ne de la suma de todos los paralelogramos $MPpn$ que caben en él. Fig.

Porque si tiramos la Mn perpendicular á pm, y concluimos el rectángulo $pmNP$, el trapecio $PMmp$ será la diferencia que vá de la area $ABPM$ á la area $ABmp$; pero quando Pp llega á ser menor que qualquiera cantidad asignable, el rectángulo $PNmp = PN \times Pp = (y + dy)dx$, y el rectángulo $PMnp = PM \times Pp = y \times dx$; luego yá que $(y + dy)dx : y \times dx :: y + dy : dy$, y $y + dy = y$ (324), tambien será $(y + dy)dx = y \times dx$, ó $PNmp = PMnp$; luego tambien el trapecio $PMmp$ será igual al rectángulo $PMnp$ ó $= ydx$; y por consiguiente el valor del espacio $ABMP$ será $S.ydx$ ó la suma de una infinidad de rectángulos como ydx, de los quales podemos suponer que se compone.

475 Hemos demostrado (339) que si la curva AM fuese una logarítmica, su subtangente PT será siempre 206. de un mismo valor; quiero decir, que la subtangente de la logarítmica es constante. Por consiguiente, si llamamos dicha subtangente a; la abscisa AP, x; la ordenada PM, y; tendremos en la logarítmica $\frac{ydx}{dy} = a$, pues $\frac{ydx}{dy}$ es la espresion general de la subtangente (372). Luego será $\frac{ydx}{dy} = a$ la equacion diferencial de la logarítmica, de la qual sacaremos $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{y}$, é integrando $\frac{x}{a}, = S.\frac{dy}{y}$. Por consiguiente ya que por la naturaleza ó generacion de la logarítmica, es x el logaritmo de y, tomado en la logarítmica cuya subtangente es a, podremos inferir que

La

Fig. 476 La integral $S.\frac{dy}{y}$, ó la integral de una fraccion $\frac{dy}{y}$, cuyo numerador dy es la diferencial del denominador y, es el logaritmo x del denominador, dividido por la subtangente a de la logarítmica, en la qual se toma dicho logaritmo. Por consiguiente, $S.\frac{dx}{x} = Lx$, y queda aclarado el caso (473) que no alcanza la regla fundamental de integracion.

477 Si supusiéramos que z es el logaritmo de una ordenada qualquiera u, en otra logarítmica cuya subtangente es b, tendríamos $\frac{z}{b} = S.\frac{du}{u}$; y si supusiéramos tambien que las ordenadas y, u, tomadas respectivamente en las dos logarítmicas cuyas subtangentes respectivas son a y b, sean unas mismas, ó que son unos mismos números con hacer $u = y$, tendríamos $\frac{z}{b} = S.\frac{dy}{y} = \frac{x}{a}$, y $az = bx$, y finalmente $x : z :: a : b$, de donde resulta

478 Que los logaritmos de un mismo número tomados en distintas logarítmicas tienen unos con otros la misma razon que las subtangentes de dichas logarítmicas. Esto mismo hallamos ya antes (342) por un camino algo diferente del que nos ha guiado ahora.

479 Si tomáramos los logaritmos en una logarítmica cuya subtangente es la unidad, siempre será $Ly = S.\frac{dy}{y}$; quiero decir que la integral $S.\frac{dy}{y}$ de una fraccion cuyo numerador es la diferencial del denominador, es siempre igual al logaritmo del denominador tomando este logaritmo en la logarítmica cuya subtangente es la unidad. A estos logaritmos los llamamos logaritmos hyperbólicos por la razon

que

que prometimos (II. 350), y vamos á dar en un instante; con esto se distinguen de los logaritmos ordinarios cuya subtangente ó módulo no es la unidad, sí la fraccion decimal 0,43429448. Porque en las tablas ordinarias el logaritmo de la unidad es 0, y el de 10 es 1; siendo así que en los logaritmos hyperbólicos el logaritmo de la unidad es 0, y el logaritmo de 10 es 2,302585 09, que llamaremos N. Luego el logaritmo hyperbólico de 10, ó N, es al logaritmo vulgar del mismo número 10, que es 1, como la subtangente de la logarítmica hyperbólica es á la subtangente de la logarítmica de las tablas, que llamarémos M, de cuya proporcion se saca que el valor de esta subtangente es $M = \frac{1}{N} = 0,43429448$. Fig.

480 En virtud de esto es facil hallar por medio de las tablas ordinarias el logaritmo hyperbólico de un número dado, que llamaremos B. Se buscará en las tablas el logaritmo A del número dado B, se le multiplicará por $N = 2,30258509$, el producto AN será el logaritmo hyperbólico de B. Porque la subtangente M de la logarítmica de las tablas es á la subtangente 1 de la logarítmica hyperbólica, como A logaritmo de B tomado en las tablas es al logaritmo hyperbólico de B, que por lo mismo será $\frac{A}{M} = AN$, por ser $M = \frac{1}{N}$. Por medio de la misma proporcion tambien se puede hallar qué número B corresponde á un logaritmo hyperbólico dado. Porque si llamamos C el logaritmo hyperbólico dado del número B, tendremos $1 : M :: C : A$, logaritmo tabular de B, que

Fig. será por consiguiente MC; á cuyo lado se hallará en las tablas el número correspondiente B.

481 Digamos por fin la razon por que se llaman hyperbólicos los logaritmos tomados en el systema cuyo módulo $= 1$, ó en la logarítmica cuya subtangente $= 1$.

207. Si en la hypérbola equilátera $ECMm$ comparada con sus asýmtotas AD, AP, suponemos $AB = BC = 1$, y llamamos la abscisa AP, x; la ordenada PM, y; la equacion de la espresada hypérbola será $xy = 1$ (171); luego $y = \frac{1}{x}$. Si substituimos este valor de y en la espresion ydx, que será la diferencial de la area hyperbólica (474) $CBPM$, será $ydx = \frac{dx}{x}$, y por consiguiente dicha area $CBPM = S.ydx = Lx$, con tal que este logaritmo de x se tome en la logarítmica cuya subtangente es la unidad, ó que el logaritmo hyperbólico de AP, x, es igual al espacio hyperbólico $BCMP$. Y como esto manifiesta que la invencion de los logaritmos pende de la quadratura de la hypérbola, este es el motivo de llamarse hyperbólicos los logaritmos sacados en el systema cuyo módulo $= 1$. Mas adelante diremos qué logaritmos hyperbólicos salen quando no es equilátera la hypérbola.

482 Pero como entre las dos asýmtotas AP, AD se pueden trazar diferentes hypérbolas equiláteras, pueden corresponderle á la misma abscisa AP distintos espacios hyperbólicos, y por lo mismo diferentes logaritmos. Porque

208. si entre las asýmtotas AC, AG trazamos dos hypérbolas equiláteras Dpc, $bp'c'$, y tiramos las ordenadas BDb, Ppp', po-

podrá espresar cada uno de los dos espacios $BDpP$, ó $Bbp'P$ Fig.
el logaritmo de AP. Pero como vamos á demostrar que estos espacios guardarian unos con otros la misma razon que las potencias de las hypérbolas DC, $b'c'$, quedará probado que habrá la misma razon entre los logaritmos que representan.

Porque si por un punto qualquiera E de la porcion BP tiramos á las dos rectas BD, Pp una paralela que encuentra la hypérbola $bp'c'$ en F, y la hypérbola Dpc en L; y llamamos AE, x; aa, la potencia de la hypérbola Dpc; y bb, la de la hypérbola $bp'c'$, tendremos (171) $EL = \frac{aa}{x}$, y $EF = \frac{bb}{x}$, y por lo mismo $EL : EF :: aa : bb$. Y como esto se verifica cayga donde cayere en la porcion BP el punto E; se sigue (309) que el espacio hyperbólico $BDpP : Bbp'P :: aa : bb$. Por consiguiente para determinar la verdadera cantidad de los logaritmos hyperbólicos en los diferentes casos que puedan ocurrir, es preciso que la potencia de la hypérbola haga oficios de módulo, ó saber el valor de dicha potencia.

483 Así como hay integrales que, segun acabamos de ver, se reducen á los logaritmos, las hay tambien que se sacan por medio de arcos de círculo. Y del mismo modo que los espacios hyperbólicos que pueden representar el logaritmo de un mismo número, pueden variar segun variaren las potencias de las hypérbolas á que se refieren, tambien puede variar la medida de un ángulo ó un arco que espresare una integral, segun variare el radio del círculo á que perteneciere. Vamos, pues, á proponer un méto-

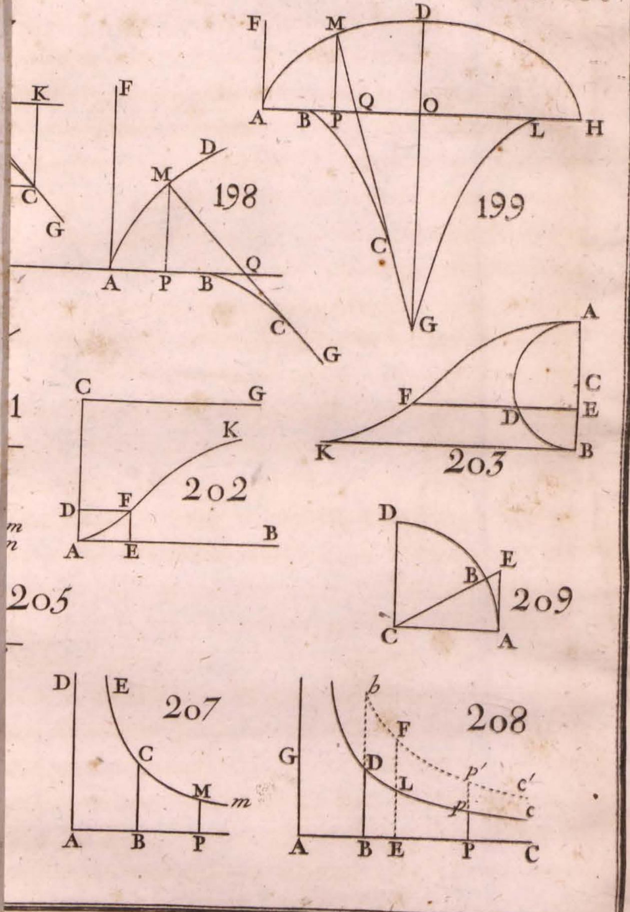
Fig. do fijo que pueda dirigirnos con seguridad.

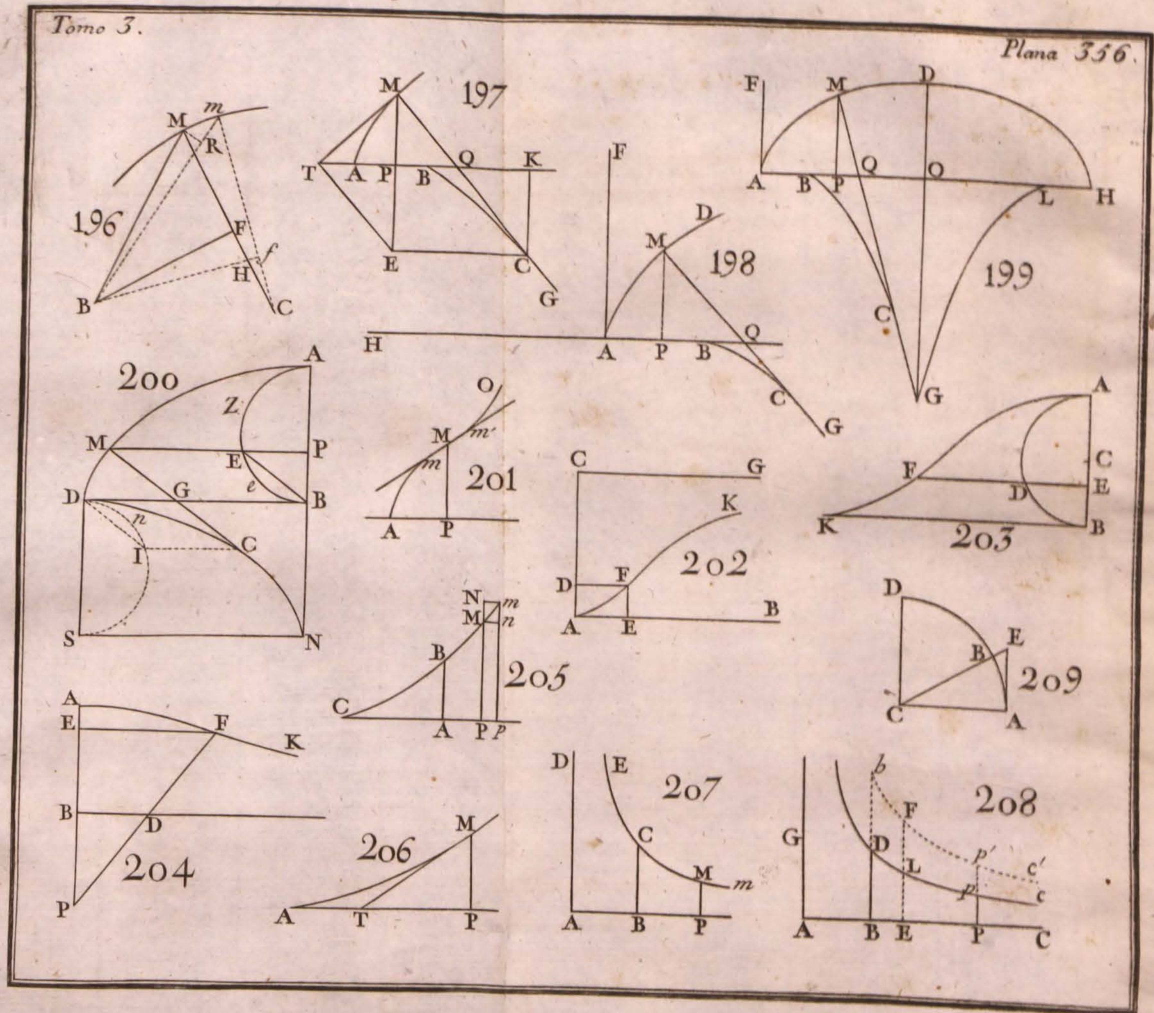
484 Los Geómetras de todos los siglos han mirado constantemente la circunferencia del círculo como la mas acomodada entre todas las lineas rectas ó curvas para medir los ángulos ; porque una vez dado el círculo , los arcos de esta curva son siempre como la cantidad de los ángulos: esta analogía subministra un método facil para hallar el arco ú el ángulo , quando es dado el uno de los dos. Pero una vez que los ángulos se hallan muy facilmente por las tablas de los senos y tangentes , quando son conocidos sus senos y tangentes , se logrará con suma brevedad el conocimiento de la cantidad absoluta de los arcos que midieren dichos ángulos.

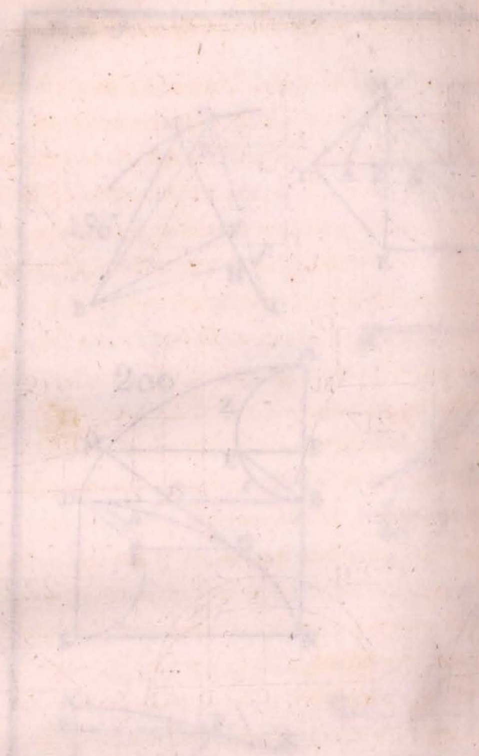
485 A fin de que sea mas perceptible este método, recordaremos que por lo probado (356) consta que si
209. llamamos r el radio CA del círculo ABD &c. y x su tangente AE , el elemento del arco AB será $= \frac{rrdx}{rr+xx}$, de donde resulta que $S. \frac{rrdx}{rr+xx}$ será el valor del arco AB, que mide el ángulo ACB.

486 Bien se echa de ver que la cantidad del arco AB que mide el ángulo ACB es arbitraria , y que con tomar radios de diferente longitud se pueden trazar infinitas circunferencias , cuyos arcos comprehendidos entre las rectas CA, CB podrian ser cada uno la medida del ángulo ACB. Por esta razon es indispensable valerse de algun módulo que determine qual es entre todos los arcos posibles que se pueden trazar dentro de un mismo ángulo , el que corresponde

al


198
199
202
203
205
207
208
209


196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209



al punto de que se trata, porque sin este cuidado saldrian indeterminadas las integrales que los arcos han de espresar, pues son las longitudes de los arcos, y no las cantidades de los ángulos, las que determinan el valor de las integrales. Como los arcos semejantes están unos con otros en la misma razon que los radios, es el radio la linea mas conocida en el círculo, hallándose esta linea en todos los cálculos donde esta curva hace algun papel; es, pues, muy del caso tomarle por el módulo, al qual se han de referir todas las medidas de los ángulos. Fig.

De donde hemos de inferir que el arco *AB* es la medida del ángulo *ACB*, cuyo módulo ó radio es r, cuyo arco es la integral de la diferencial $\frac{rrdx}{rr+xx}$.

487 Una vez que segun probamos (424) el radio del círculo se há á la semicircunferencia como 1 á 3,14159265 35 &c. si llamamos al radio R, tendremos esta proporcion 3,14159265 35 &c: 1 :: 180°: $R = 57,2957795 1$ &c. grados ó $57° 17' 44''$ con muy corta diferencia; por donde se echa de ver que en qualquiera círculo el radio es igual á un arco de $57° 17' 44''$. En virtud de esto, una vez que conociésemos un ángulo, podremos averiguar la longitud del arco que le mide, con tal que esté dado el radio; porque es evidente que el arco de $57° 17' 44''$ es á la longitud del radio, ó al número de las partes de que suponemos que consta el radio, como el número de los grados de otro ángulo qualquiera es á la longitud del arco que le mide; hagamos $57° 17' 44''$

Fig. ó 57,295779 &c. $=m$; sea N el número de grados de un ángulo conocido qualquiera; Z, la longitud del arco que le mide; R, el radio con que se ha trazado dicho arco; la proporcion que hemos hecho será $m : N :: R : Z = \frac{N \times R}{m} = N \times R \times r$, en el supuesto de ser $\frac{1}{m} = \frac{1}{57,295779 \,\&c.}$ $= 0,0174532925$ &c. $= r$.

488 Concluida esta digresion, volvamos al asunto. De lo dicho (476) inferiremos que $S. -\frac{dx}{x} = -Lx$, ó lo que es lo propio $L\frac{1}{x}$, como es facil comprobarlo diferenciando $L\frac{1}{x}$. Porque su diferencial es $d\left(\frac{1}{x}\right)$ dividida por $\frac{1}{x}$ (343), esto es $-\frac{dx}{xx}$ dividida por $\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x}$.

489 Por consiguiente es facil sacar la integral de una diferencial que no lleva mas que un término, y de una diferencial que lleva muchos términos, con tal que en cada uno de estos no haya mas que una sola variable elevada en dicho término á una potencia qualquiera. Si la diferencial propuesta fuese, por egemplo, $3bx^2dx + cx^3dx + 2c^3ydy - ffppdz$, cada uno de sus términos se integraria separadamente por la regla fundamental, como sino hubiese otros. La integral sería, pues, $bx^3 + \frac{cx^4}{4} + c^3yy - ffppz$. Es facil comprobarlo, porque si diferenciamos esta integral, sacaremos la diferencial propuesta.

490 Por la misma regla se integran tambien las diferenciales fraccionarias, en cuyo denominador no hay mas que constantes. La integral de $\frac{(ax^m + px^{p-1})dx}{aa + bb}$ es...

$$\frac{\frac{ax^{m+1}}{m+1}+x}{aa+bb}.\quad S.\frac{b^3xdx+2c^4yydy}{a}=\frac{b^3x^2}{2a}+\frac{2c^4y^3}{3a}.$$ Fúndase Fig.

esta regla en que las constantes se han de hallar en la integral del mismo modo que en la diferencial, porque quando se diferencia una cantidad, no se hace operacion ni mudanza alguna en las constantes (327).

491 Tambien se aplica la regla fundamental para integrar algunas diferenciales fraccionarias que llevan una variable en el denominador, qual sería esta $\frac{-dx}{xx}=-x^{-2}dx$, cuya integral es en virtud de dicha regla $\frac{1}{x}$. La integral de $\frac{-dx}{x^3}=\frac{1}{2xx}$. En general, si hubiéramos de integrar $\frac{dx}{x^m}=x^{-m}dx$, borraríamos dx, añadiríamos una unidad al esponente m, y dividiéndolo todo por $-m+1$, sacaríamos que $S.x^{-m}dx=\frac{1}{-(m-1).x^{m-1}}$.

492 La misma regla sirve igualmente para integrar una diferencial que sea el producto de una funcion de x y dx multiplicada por una cantidad que está debajo de un signo qualquiera, con tal que la cantidad que está fuera del signo sea el producto de una constante qualquiera por la diferencial de la cantidad que está debajo del signo radical.

Supongamos que hayamos de integrar $\frac{1}{2}(a^2dx+2bxdx)\times(a^2x+bx^2)^{\frac{1}{2}}$, en cuya cantidad la que está fuera del signo radical, es á saber $\frac{1}{2}(a^2dx+2bxdx)$ es el producto

 del

Fig. del coeficiente constante $\frac{1}{2}$ por $a^2dx + 2bxdx$, que es la diferencial de la cantidad $a^2x + bx^2$ que está debajo del radical. La integral de esta diferencial será en virtud de la regla fundamental $\frac{1}{3}(a^2x+bx^2)^{\frac{3}{2}}$. Porque para poner en práctica la regla añado una unidad al esponente $\frac{1}{2}$, que con esto es $\frac{3}{2}$, divido la diferencial por $\frac{3}{2}$ multiplicado por la diferencial $a^2dx + 2bxdx$ de $a^2x + bx^2$, el cociente $\frac{1}{3}(a^2x + bx^2)^{\frac{3}{2}}$ será la integral de la diferencial propuesta.

493 La razon es muy facil de percibir, porque si hacemos $aax + bxx = y$, tendremos $\frac{1}{2}(a^2dx + 2bxdx) \times (a^2x + bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}dy \times y^{\frac{1}{2}}$. Por consiguiente, hemos de hacer con la cantidad propuesta las mismas operaciones que haríamos con $\frac{1}{2}dy \times y^{\frac{1}{2}}$ para sacar su integral.

A muchos podrá parecer dificultosa la aplicacion de la regla que acabamos de dar, porque no alcanzarán cómo se podrán conocer las diferenciales que comprehende el caso propuesto (492); pero se les hará muy facil esta aplicacion valiéndose de las substituciones de que hablaremos mas adelante.

494 Quando una diferencial dx está multiplicada por alguna potencia de una cantidad complexa racional, ó en cuyo denominador no hay mas que constantes; si fuese el esponente de la potencia un número entero positivo, y no hubiese mas que una variable x, se sacará la integral por la regla que acabamos de dar, elevando la cantidad complexa á la potencia que señalare su esponente, multi-

pli-

plicando despues cada término por dx, y sacando final- Fig.
mente la integral de cada uno. Si aplicáramos esta regla para sacar la integral de $dx.(a+bx)^2$, formaríamos el quadrado $a^2+2abx+b^2x^2$, le multiplicaríamos por dx, de esta multiplicacion resultaría $a^2dx+2abxdx+b^2x^2dx$; é integrando cada término por la regla fundamental, quedaría integrada la cantidad propuesta.

495 En general, siempre que la diferencial propuesta fuese $hx^kdx.(e+cx^q)^m$, en el supuesto de ser m un número entero positivo, y q, k números qualesquiera, enteros ó quebrados, positivos ó negativos, se podrá hallar su integral finita y cabal por la primera regla. Para conseguirlo, se elevará $e+cx^q$ á la potencia, cuyo exponente es m, valiéndose de la fórmula dada (II. 99); se multiplicará cada término de dicha potencia que siempre será finita, por hx^kdx, y se tomará la integral de cada uno. Egecutando estas operaciones en el caso actual, sacarémos

$$\text{que } S.hx^kdx(e+cx^q)^m = \frac{he^mx^{k+1}}{k+1} + \frac{mhe^{m-1}}{k+1+q}$$

$$\times\, cx^{k+1+q} + \frac{m.\frac{(m-1)}{2}}{k+1+2q} \times he^{m-2}ccx^{k+1+2q} + \&c.$$

Si la cantidad $(e+cx^q)^m$ fuese multiplicada por un multinomio diferencial, como si hubiésemos de integrar $(x^pdx+x^rdx)(e+cx^q)^m$, sacaríamos la integral por par-

Fig. partes integrando primero $x^p dx(e + cx^q)^m$, despues $x^r dx(e + cx^q)^m$, y la suma de estas dos integrales sería la integral de la diferencial propuesta.

496 Esta regla padece una excepcion quando despues de formada la potencia m del binomio, y egecutada su multiplicacion por $hx^k dx$ se halla en algun término la cantidad $\frac{dx}{x}$; porque entonces será preciso acudir á los logaritmos para integrar el expresado término (476).

497 Hay fórmulas que se integran facilmente dividiéndolas primero en dos partes, para reducirlas á la expresion general $xdy + ydx$, que es la diferencial de xy (326).

Propongámonos integrar, por egemplo, la diferencial $\frac{-a^2 dx}{xx\sqrt{(aa-xx)}}$. La darémos esta forma $\frac{(-aa+xx-xx)dx}{xx\sqrt{(aa-xx)}}$, que dividirémos en estas dos partes $\frac{-dx\sqrt{(aa-xx)}}{x^2} - \frac{xdx}{x\sqrt{(aa-xx)}}$, ó $\sqrt{(aa-xx)} \times d\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \times d\sqrt{(aa-xx)}$; luego su integral será $\frac{\sqrt{(aa-xx)}}{x}$.

498 Lo propio sucederá con la diferencial $\frac{-a^2 dx}{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}$; á la qual darémos esta forma $\frac{x^2 dx - a^2 dx - x^2 dx}{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}$, la partirémos despues en las dos partes $\frac{dx}{(xx-aa)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2 dx}{(xx-aa)^{\frac{3}{2}}}$, ó $\frac{1}{(xx-aa)^{\frac{1}{2}}} . dx + x . d . \frac{1}{(xx-aa)^{\frac{1}{2}}}$. La integral de esta última cantidad es $= \frac{x}{(xx+aa)^{\frac{1}{2}}}$.

Tam-

499 Tambien se integra por la regla fundamental la diferencial $z^m u^n dx$, sean las que fueren las variables z, u, x, y los esponentes m y n, con tal que su factor diferencial udx tenga con la diferencial $z\,dz$ una razon dada, sea el que fuere el esponente p de z^p. Fig.

Porque con hacer $a : b :: z^p dz : u^n dx$, sacaremos $u^n dx = \frac{bz^p dz}{a}$; luego $z^m u^n dx = \frac{bz^{p+m} dz}{a}$, cuya integral es $\frac{bz^{p+m+1}}{a(p+m+1)}$.

Cómo se completan las integrales que dá el cálculo.

500 Hemos visto (325) que despues de diferenciada una cantidad complexa que lleva algunos términos constantes, estos se desaparecen despues de egecutada la diferenciacion. Por consiguiente, puede suceder en muchos casos que despues de sacada la integral de una cantidad sea preciso añadirla, para completarla, alguna cantidad constante que la diferenciacion pudo haber eliminado. El valor de esta constante, que llamaremos C, le determina siempre indefectiblemente la naturaleza misma de la cuestion qué resuelve el calculador; vamos á declarar qué método le dirige en esta determinacion.

Supongamos que sea AMN una parábola cuyas ordenadas tengan su origen en el punto B. Llamaremos AB, 210.
a; BP, x; PN, y; y supondremos el parámetro $= 1$. Será, pues, la equacion de esta curva $yy = x + a$, ó $y =$

(x

Fig. $(x+a)^{\frac{1}{2}}$. Por lo dicho (474) sabemos que la espresion del espacio elemental $PNpn$ es $dx\sqrt{(x+a)}$; será, pues, $S.dx(x+a)^{\frac{1}{2}}$ el valor del espacio total $BPNM$; y como $\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}$ es (492) la integral de $dx\sqrt{(x+a)}$, podria inferirse que ha de ser tambien $\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}$ el valor del espacio $BPNM$. Pero como $dx(x+a)^{\frac{1}{2}}$ es la diferencial de $\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} \pm C$ igualmente que de $\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}}$, la integral completa de dicha diferencial será $\frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} \pm C$, siendo C la cantidad constante que se le ha de añadir ó quitar á la integral que dá el cálculo, para completarla; cuya constante es nula en algunos casos, y real en otros.

501 Sentado esto, la constante C se determina por la regla siguiente. *Hágase igual á cero la variable* x *de la integral, y si de este supuesto resultase ser la integral* $=0$, *será señal de que salió cabal; si despues de supuesta* $x=0$, *quedare en la integral alguna constante, se la añadirá á la integral hallada dicha constante con un signo opuesto al que llevare, y estará completa la integral.*

Porque supongamos, por egemplo, que sea Q el valor completo de una integral, quando x tiene cierto valor determinado que llamaremos a, y que siendo X la integral que dá el cálculo, se le haya de añadir, para completarla, la constante C cuyo valor ignoramos; por manera que sea $Q = X + C$.

Supongamos que con substituir en X a en lugar de x, X se transforme en A; será $A + C$ el valor completo de la

la integral, quando $x = a$; y como suponemos que esta Fig.
integral completa $= Q$, será $A + C = Q$, y $C = Q - A$.

Pero las mas veces no es dado, ni puede serlo, el valor completo Q de la integral, y es preciso indagar en qué parte es cero el valor Q de la integral; porque quando $Q = 0$, $A + C = 0$, y $C = - A$.

En vez de hacer $x = a$, es mas comun suponer $x = 0$, cuyo supuesto es mas natural, porque la area de una curva empieza donde empiezan las abscisas; y por lo mismo $Q = 0$ quando $x = 0$. Estos son los fundamentos de la regla; apliquémosla á algunos egemplos.

502 Si fuese $y = \sqrt{px}$, será $ydx = dx\sqrt{px}$, cuya integral (472) $S.ydx = \frac{2}{3}\sqrt{p} \times x^{\frac{3}{2}}$. Como el supuesto de $x = 0$, hace que toda la integral sea $= 0$, es prueba de que está completa la integral hallada.

503 Si suponemos $x = 0$ en $\frac{2}{3}(x + a)^{\frac{3}{2}} = X$ que es la integral de $dx(x + a)^{\frac{1}{2}}$, resultará $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = A$; luego $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} + C = Q$. Haremos, pues, $Q = 0$, y por lo mismo será $\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} + C = 0$, y $C = - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$, cuya equacion manifiesta que hemos de añadir la constante con un signo opuesto al que lleva en la integral.

504 Hay sin embargo algunos casos en que no se
puede suponer $x = 0$. Supongamos, por egemplo, que es- 211.
tando el origen de las abscisas en A, representemos por el espacio parabólico BPC la integral de $dx\sqrt{(px - pa)}$. En este caso la ordenada es imaginaria, y por la regla sacaremos tambien que el espacio BPC es imaginario.

Por-

Fig. Porque $S.dx(px - pa)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p}\,.\,\frac{2}{3}(x - a)^{\frac{3}{2}}$; el supuesto de $x = 0$ reduce esta integral á $\sqrt{p}\frac{2}{3} \times - a^{\frac{3}{2}}$; es, pues, imaginaria la constante. Y así ha de ser, porque como son imaginarias todas las ordenadas desde A hasta B, es tambien imaginaria la area parabólica comprehendida entre dichos dos puntos.

Verdad es que el espacio BPC es real; pero tambien es verdad (II. 189) que la suma de un espacio imaginario y un espacio real, es imaginaria.

Pero si de toda la area de la curva no quisiéramos mas que la porcion BPC, deberíamos considerar la ordenada donde es cero, hacer x igual al valor que la abscisa tuviere en dicho punto, y no igual á cero, y será nula la constante. Si en el egemplo propuesto contamos la area de la curva desde el punto B, y hacemos $BP = a$, sería preciso hacer $x = a$; substituyendo este valor de x en su lugar en la integral $\sqrt{p}\,.\,\frac{2}{3}(x - a)^{\frac{3}{2}}$ sacaremos $\sqrt{p}\,.\,\frac{2}{3}(a - a)^{\frac{3}{2}} = 0$. Luego $Q = 0$, y tambien $C = 0$.

505 De aquí inferiremos, qué si la integral es cero no quando $x = 0$, sino quando x tiene algun valor determinado, y es por egemplo a; la constante es la misma integral que dá el cálculo, substituyendo a en lugar de x.

Por egemplo $S.x^2dx = \frac{x^3}{3}$, que quando $x = a$ es $\frac{a^3}{3}$. Luego será $Q = \frac{a^3}{3} + C$; y como en este caso $Q = 0$, será $\frac{a^3}{3} + C = 0$, y $C = -\frac{a^3}{3}$. Luego la integral cabal ó $Q = \frac{x^3 - a^3}{3}$.

Si

Si $S. -x^n dx = -\frac{x^{n+1}}{n+1}$ es cero quando $x = a$; será $-\frac{a^{n+1}}{n+1} + C = 0$, y $C = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Luego la integral completa ó $Q = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{n+1}$. Fig.

Finalmente si $S. xdx (c^3 + bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(c^3 + bx^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$ fuese cero quando $x = a$; sería $\frac{(c^3 + ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b} + C = 0$; luego $C = \frac{-(c^3 + ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$, y $Q = \frac{(c^3+bx^2)^{\frac{3}{2}} - (c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$.

506 Despues de todo lo dicho se viene á los ojos

1.° que como $S.axdx = \frac{ax^2}{2}$ es cero quando $x = 0$, es cabal la integral.

2.° que por ser $S.dx(a+x)^3 = \frac{(a+x)^4}{4} = \frac{a^4}{4}$, quando $x = 0$, será $S.dx(a+x)^3 = \frac{(a+x)^4 - a^4}{4}$.

3.° que $S.x^{m-1}dx(a^m + x^m)^n = \frac{(a^m + x^m)^{n+1}}{m(n+1)}$ se reduce á $\frac{(a^m)^{n+1}}{m(n+1)} = \frac{a^{mn+m}}{m(n+1)}$ quando $x = 0$, y por lo mismo que $\frac{(a^m + x^m)^{n+1} - a^{mn+m}}{m(n+1)}$ es la integral completa de $S.x^{m-1}dx(a^m + x^m)^n$.

4.° que como $S.(mbx^{m-1}dx + ncx^{n-1}dx)(a + bx^m$

+

Fig.

$$+cx^n)^p = \frac{(a+bx^m+cx^n)^{p+1}}{p+1} \text{ se reduce á } \frac{(a)^{p+1}}{p+1}$$

quando $x=0$, será $\frac{(a+bx+cx^n)^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$ la integral completa de $(mbx^{-1}dx+ncx^{n-1}dx)(a+bx^m+cx^n)^p$.

De la integracion de las diferenciales binomias que admiten una integral algebráica.

507 Todo el cálculo integral está fundado en la primera regla que hemos sentado para integrar $x^m dx$. Pero como no se aplica esta regla con igual facilidad á qualesquiera diferenciales, y hay muchas con las quales no se ha podido practicar, habiendo tambien entre las que por ella se pueden integrar algunas sumamente complicadas; el mayor empeño del cálculo integral consiste en preparar las integrales de modo que se las dé la espresion mas sencilla que sea posible. Para cuyo fin se valen los Analystas de varias transformaciones, de las quales daremos á conocer algunas, aplicándolas á la integracion de las diferenciales binomias que admiten una integral algebráica.

508 Llamamos *Diferencial binomia* toda diferencial en que la cantidad complexa la mas compuesta, es una potencia qualquiera de un binomio; $gx^m dx(a+bx^n)^p$ puede representar una diferencial binomia qualquiera, porque pueden representar g, a, b, m, n, p todos los números imaginables, positivos ó negativos.

No

509. No todas las diferenciales binomias se pueden integrar; pero de lo dicho hasta aquí en este asunto inferiremos que se podrá integrar una diferencial binomia $gx^m dx(a+bx^n)^p$ en los dos casos siguientes. Fig.

1.° Quando fuere p un número entero positivo qualquiera, sean por otra parte los que fueren los esponentes m y n (494), excepto el caso especificado (473).

2.° Quando el esponente m de x fuera del binomio, fuere una unidad menor que el esponente n que lleva x en el binomio; quiero decir que en general se puede integrar $gx^{n-1}dx(a+bx^n)^p$, sean n y p lo que se quisiere, excepto quando fuere $p=-1$. Con efecto $gx^{n-1}dx$ es la diferencial de $a+bx^n$, multiplicada por $\frac{g}{nb}$, esto es, por una constante; estará, pues, esta diferencial en el caso espresado (492), y se integrará por lo que allí digimos, esto es, por la regla fundamental, considerando $a+bx^n$ como una sola cantidad.

Fuera de los dos casos que acabamos de individualizar, hay otros dos que se pueden comprehender solo en uno, y que incluyen al precedente.

510. 1.° Se puede integrar qualquiera diferencial binomia, quando el esponente de x fuera del binomio es tal, que añadiéndole una unidad, puede ser dividido cabalmente por el esponente que lleva x en el binomio, y sale al cociente un número entero positivo. Las transformaciones son el recurso que sirve para integrar las dife-

Fig. renciales que este caso incluye, y demostrar que el método es general.

Propongámonos integrar $gx^3dx \times (a + bx^2)^{\frac{4}{5}}$. Será integrable esta diferencial, porque si al esponente de x fuera del binomio que es 3, le añado una unidad, la suma será 4, cuyo número dividido por el esponente 2 de x en el binomio, dá el cociente 2, que es un número entero positivo.

Haremos, pues, $a + bx^2 = z$, y sacaremos $x^2 = \frac{z-a}{b}$. Repararemos que x^3dx que está antes de la cantidad binomia, es la diferencial de x^4 quadrado de x^2, sin mas diferencia que la de estar dicha diferencial multiplicada por una cantidad constante. Elevemos, pues, al quadrado la equacion $x^2 = \frac{z-a}{b}$, y tendremos $x^4 = \frac{(z-a)^2}{bb}$; luego diferenciando sacaremos $4x^3dx = 2\left(\frac{z-a}{b}\right)\frac{dz}{b}$; y por consiguiente $x^3dx = \left(\frac{z-a}{b}\right) \cdot \frac{dz}{2b} = \frac{(z-a)\,dz}{2b^2}$. Si en lugar de x^3dx y $(a + bx^2)$ substituimos sus valores en z, sacaremos $\frac{g(z-a)\,dz}{2b^2} \times z^{\frac{4}{5}}$, ó $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2}$. Luego $S.\, gx^3dx(a + bx^2)^{\frac{4}{5}}$

$$= S.\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2b^2} - S\frac{gaz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2} = \frac{gz^{\frac{4}{5}+2}}{(\frac{4}{5}+2)2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{5}+1}}{(\frac{4}{5}+1)2b} + C;$$

ó (por ser $\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}$ multiplicador comun) $= \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left(\frac{z}{(\frac{4}{5}+2)} - \frac{a}{(\frac{4}{5}+1)}\right) + C = \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left(\frac{5}{14}z - \frac{5}{9}a\right) + C$; substituyendo finalmente en lugar de z su valor $a + bx^2$, ten-

dre-

dremos $\frac{g}{2b^2}(a+bx^2)^{\frac{4}{5}+1}.\left[\frac{5}{14}(a+bx^2)-\frac{5}{9}a\right]+C.$ Fig.

511 Lo propio practicaríamos con otra diferencial en que concurrieren las mismas condiciones, pongo por caso con $gx^8dx\,(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$, que ha de ser integrable, pues el cociente del esponente 8, añadiéndole una unidad, ó el cociente de 9 dividido por 3 esponente de x en el binomio, es un número entero positivo. Haremos, pues, $a+bx^3=z$, y será $x^3=\frac{z-a}{b}$; y como x^8dx es la diferencial de x^9 sin mas diferencia que la de estar multiplicada por una cantidad constante; para sacar x^9 cubaré la equacion $x^3=\frac{z-a}{b}$, y sacaré $x^9=\left(\frac{z-a}{b}\right)^3$, diferenciando para sacar x^8dx, resultará $9x^8dx=3.\left(\frac{z-a}{b}\right)^2\frac{dz}{b}$, y por lo mismo $x^8dx=\left(\frac{z-a}{b}\right)^2\frac{dz}{3b}$. Por consiguiente la diferencial $gx^8dx(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$ se transformará en $g.\left(\frac{z-a}{b}\right)^2\frac{dz}{3b}.z^{-\frac{2}{3}}$, que, despues de elevado $\left(\frac{z-a}{b}\right)$ al quadrado, y hecha la multiplicacion por $z^{-\frac{2}{3}}$, es $\dfrac{gz^{2-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}-\dfrac{2gaz^{1-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}+\dfrac{ga^2z^{-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}$, cuya integral es $\dfrac{gz^{3-\frac{2}{3}}}{3b^3(3-\frac{2}{3})}-\dfrac{2gaz^{2-\frac{2}{3}}}{3b^3(2-\frac{2}{3})}+\dfrac{ga^2z^{1-\frac{2}{3}}}{3b^3(1-\frac{2}{3})}+C$; que por razon del multiplicador comun $\frac{g}{3b^3}z^{1-\frac{2}{3}}$ se reduce á $\frac{g}{3b^3}z^{1-\frac{2}{3}}\times\left(\dfrac{z^2}{3-\frac{2}{3}}-\dfrac{2az}{2-\frac{2}{3}}+\dfrac{a^2}{1-\frac{2}{3}}\right)+C$, ó $\frac{g}{3b^3}z^{1-\frac{2}{3}}\left(\frac{3z^2}{7}-\frac{6az}{4}+3a^2\right)+C$, y finalmente substituyendo en lugar de z su valor $a+bx^3$,

 la

Fig. la integral será $\frac{g}{3b^3} \times (a + bx^3)^{1 - \frac{2}{3}} \left[\frac{3}{7}(a + bx^3)^2 - \frac{6a}{4}(a + bx^3) + 3a^2\right] + C.$

Este es el método que se deberá practicar siempre que el esponente de x fuera del binomio aumentado de una unidad, y dividido por el esponente que lleva x en el binomio, diere al cociente un número entero positivo.

512 2.° Aunque no concurra en una diferencial binomia la espresada circunstancia, en muchas ocasiones se consigue facilmente comprehenderla en el caso que acabamos de considerar, mediante una preparacion muy sencilla, que consiste en hacer que sea negativo el esponente de x en el binomio, quando fuere positivo, ó positivo si fuese negativo. Para conseguirlo, se han de dividir ambos términos del binomio por la potencia de x que está en el binomio, y multiplicar la parte de afuera del binomio, por la misma potencia elevada á la potencia que espresa el esponente total del binomio. Por egemplo, para hacer que sea negativo el esponente 2 de x en el binomio $gx^4dx(a + bx^2)^5$, divido $a + bx^2$ por x^2, y saco $gx^4dx(\frac{a}{x^2} + b)^5$ ó $gx^4dx(ax^{-2} + b)^5$; pero como la cantidad x^2, por la qual hemos dividido, se ha de considerar como elevada á la quinta potencia, pues está debajo del esponente total 5 del binomio, es preciso á fin de hacer una compensacion, multiplicar la parte de afuera por $(x^2)^5$, esto es, por x^{10}, y sale $gx^{14}dx(ax^{-2} + b)^5$.

Haciendo uso de esta preparacion, se hallarán comprehendidas en el caso antecedente muchas mas diferenciales bi-

binomias. Por egemplo, si hubiera de integrar $\frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$ Fig.
ó $aadx(aa+xx)^{-\frac{3}{2}}$, repararia que el esponente de x fuera del binomio, esto es, o aumentado de una unidad, ó 1 no se puede dividir cabalmente por el esponente 2 que lleva x en el binomio. Pero si hacemos que sea negativa la potencia de x en el binomio, con escribir $aa(x^2)^{-\frac{3}{2}}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$, que se reduce á $aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$, hallaremos que añadiendo 1 á -3, la suma 2 dividida por el esponente -2 que lleva x en el binomio, es un número entero positivo; por consiguiente haciendo $aax^{-2}+1=z$, sacaremos $x^{-2}=\frac{z-1}{aa}$; y como $x^{-3}dx$ es la diferencial de x^{-2}, sin mas diferencia que la de estar multiplicada por una cantidad constante, diferenciaremos, y saldrá $-2x^{-3}dx=\frac{dz}{aa}$; luego $x^{-3}dx=-\frac{dz}{2aa}$. Por consiguiente la diferencial $aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$ se transforma en $\frac{-aa\,.\,dz}{2aa}\,.\,z^{-\frac{3}{2}}$, ó $\frac{-z^{-\frac{3}{2}}dz}{2}$, cuya integral es $\frac{-z^{1-\frac{3}{2}}}{2(1-\frac{3}{2})}+C$, ó $z^{-\frac{1}{2}}+C$, ó (con substituir en lugar de z su valor), $(aax^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}+C$, ó $\frac{1}{\sqrt{(aax^{-2}+1)}}+C$, que se reduce á $\frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}+C$.

513 Aun quando en ambos términos del binomio hubiera alguna potencia de x, prepararíamos la cantidad de modo que no la hubiera sino en uno de los dos, divi-

Fig. diendo el binomio por una de las potencias de x que se hallare en el uno de sus términos, y multiplicando la parte de afuera por la misma potencia elevada á la potencia que espresare el esponente del binomio (512).

Así, si hubiera de integrar $\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}}$, ó $aax^{-1}dx$ $(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$, la transformaria en $aax^{-1}(x)^{-\frac{1}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}$, dividiendo el binomio por x, y multiplicando la parte de afuera por x elevada á la potencia $-\frac{1}{2}$ que es la del binomio. La propuesta quedará reducida á $aax^{-\frac{3}{2}}$ $dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}$. Si la aplicamos la regla del primer caso (510) no se podrá integrar; pero si hacemos que sea negativo el esponente de x en el binomio, tendremos $aax^{-\frac{3}{2}}.(x)^{-\frac{1}{2}}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$, ó $aax^{-2}dx \times (ax^{-1}$ $+1)^{-\frac{1}{2}}$ que es integrable (512). Haremos, pues, $ax^{-1}+1=z$, y será $x^{-1}=\frac{z-1}{a}$, cuya diferencial es $-x^{-2}dx=\frac{dz}{a}$, ó $x^{-2}dx=\frac{-dz}{a}$; luego $aax^{-2}dx$ $(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ se transforma en $-adz.z^{-\frac{1}{2}}$, ó $-az^{-\frac{1}{2}}dz$, cuya integral es $\frac{-az^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$, ó $-2az^{\frac{1}{2}}$ $+C$, ó con substituir en lugar de z su valor, $-2a$ $(ax^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}+C$, ó finalmente $-2a\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)}+C$.

514 Las diferenciales binomias que no estuvieren comprehendidas en ninguno de los dos casos que hemos especificado, no tienen integral alguna puramente algebráica.

Usos de las Series para integrar las cantidades.

515 Hay diferenciales cuya integral no es posible ha-

hallar por ninguno de los métodos que ván declarados, pero Fig.
se pueden integrar despues de transformadas en una serie de términos que vayan menguando continuamente; hecha esta transformacion, se integran separadamente unos quantos de dichos términos, y con pocos suele bastar para sacar la integral que se necesita. Bien se echa de ver que este recurso no es necesario, ni para las diferenciales monomias, cuyas integrales se hallan facilmente, ni tampoco para las binomias de que hemos hecho mencion; solo se hace indispensable respecto de las que no ván comprehendidas en ninguno de los casos espresados.

516 Se hace, pues, uso de las series para integrar estas diferenciales, que es lo propio que integrarlas por aproximacion. Toda la dificultad consiste en reducir á series las diferenciales propuestas, cuya operacion se egecuta del mismo modo que si fuesen cantidades de la misma naturaleza que las que consideramos en otro lugar (II. 286 y sig.). Pero como en la aplicacion de las series al cálculo integral suele ser preciso elevar á una potencia, ó sacar una raiz de un *infinitomio*, hemos de dar ahora la fórmula que prometimos (II. 449) para conseguirlo.

517 Primero hemos de dar una fórmula general que represente el producto de dos series. Para cuyo fin supondremos que el primer término de cada una de las dos series sea una cantidad constante, y que el segundo no lleve mas que la primera potencia de x. Porque una vez que los esponentes de x han de formar una progresion arismé-

Fig. tica, es facil reducir á esta forma una serie qualquiera. Porque si el primer término llevare x, se borrará en todos los términos, pues será factor de todos, y será en virtud de esto una cantidad constante el primer término de la serie. Si el esponente de x en el segundo término fuese fraccionario ó negativo, supondremos x con su esponente igual á z, y practicando la substitucion correspondiente, serán enteros todos los términos de la serie.

Sentado esto, multiplico una por otra, segun las reglas dadas (II. 22 y sig.), las dos series generales $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ &c. y $a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 +$ &c. Llamando la primera M, y la segunda N, y egecutando la multiplicacion, sale el producto

$$\begin{array}{llllll}
aA + aBx & + aCx^2 & + aDx^3 & + aEx^4 & + aFx^5 & + \&c. \\
\phantom{aA +{}} bAx & + bBx^2 & + bCx^3 & + bDx^4 & + bEx^5 & + \&c. \\
 & + cAx^2 & + cBx^3 & + cCx^4 & + cDx^5 & + \&c. \\
 & & + eAx^3 & + eBx^4 & + eCx^5 & + \&c. \\
 & & & + fAx^4 & + fBx^5 & + \&c. \\
 & & & & + gAx^5 & + \&c.
\end{array}$$

En cuyo resultado es de reparar que el primer término es el producto de los dos primeros términos de las series propuestas; el segundo se saca multiplicando el primer término de la serie N por el segundo término de la serie M, el primer término de la serie M por el segundo de la serie N, y sumando los productos; el tercer término es la suma de los tres productos que se sacan multiplicando el primer término de la serie N por el tercero de la serie M, el segun-

gundo término de la serie N por el segundo de la serie M, Fig.
y el tercer término de la serie N por el primero de la serie M; y así de los demás.

Si las dos series que se han de multiplicar fuesen $a + x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{aa} + \frac{x^4}{a^3} + \frac{x^5}{a^4}$ &c. y $a - 2x + \frac{3x^2}{a} - \frac{4x^3}{a^2} + \frac{5x^4}{a^3} - \frac{6x^5}{a^4}$ &c. sería $A = a$, $B = 1$, $C = \frac{1}{a}$, $D = \frac{1}{aa}$, $E = \frac{1}{a^3}$ &c. $a = a$, $b = -2$, $c = \frac{3}{a}$, $e = -\frac{4}{aa}$, $f = \frac{5}{a^3}$ &c, y egecutando las substituciones correspondientes saldria el producto $aa - ax + 2x^2 - \frac{2x^3}{a} + \frac{3x^4}{aa} - \frac{3x^5}{a^3}$ &c.

518 Para sacar el valor de $\frac{1}{a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 + \&c.}$ supondríamos en virtud de lo dicho (II. 286 y sig.) esta fraccion igual á la serie $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5$ &c. que multiplicada por el denominador de la espresada fraccion daria

$$
\begin{array}{rl}
1 = aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + aFx^5 + \&c. \\
+ bAx + bBx^2 + bCx^3 + bDx^4 + bEx^5 + \&c. \\
+ cAx^2 + cBx^3 + cCx^4 + cDx^5 + \&c. \\
+ eAx^3 + eBx^4 + eCx^5 + \&c. \\
+ fAx^4 + fBx^5 + \&c. \\
+ gAx^5 + \&c.
\end{array}
$$

con suponer igual á la unidad el primer término de este producto, y cada uno de los demás igual á cero, sacaremos $A = \frac{1}{a}$, $B = \frac{-bA}{a}$, $C = \frac{-bB - cA}{a}$, $D = \frac{-bC - cB - eA}{a}$, $E = \frac{-bD - cC - eB - fA}{a}$, $F = \frac{-bE - cD - eC - fB - gA}{a}$ &c.

Si hubiéramos de hallar la serie igual al cociente de la unidad dividida por la serie $1 - \frac{2x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} - \frac{4x^3}{a^3} + \frac{5x^4}{a^4}$ &c. substituiríamos en los valores que acabamos de

sa-

Fig. sacar de A, B, C &c. los valores de a, b, c &c. sacados de la serie propuesta, y hallaríamos $A = 1$, $B = \frac{2}{a}$, $C = \frac{1}{a^2}$, $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$ &c. Por consiguiente el cociente no es serie ninguna infinita, sino el trinomio $1 + \frac{2x}{a} + \frac{xx}{aa}$ ó $\left(1 + \frac{x}{a}\right)^2$.

519 Veamos ahora cómo se puede elevar una serie infinita ó un infinitomio á una potencia qualquiera. Supongamos que hayamos de elevar á la potencia m la serie $a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 + hx^6 +$ &c. $= M$. Supondremos que la potencia m de la espresada serie es igual á $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 +$ &c. $= N$, por manera que será $M^m = N$. Esta equacion se verifica sea el que fuere el valor de x, y por consiguiente aun quando $x = 0$; pero quando $x = 0$, sale $A = a^m$; luego queda determinado el valor del primer coeficiente A. Si diferenciamos la equacion $M^m = N$, tendremos $mM^{m-1}dM = dN$; y si substituimos en lugar de dM la diferencial de la serie propuesta, y en lugar de dN la diferencial de la otra á la qual suponemos igual la potencia m de la primera, sacaremos

$$(A)$$

$$mM^{m-1}.(bdx + 2cxdx + 3ex^2dx + 4fx^3dx + 5gx^4dx + 6hx^5dx + \text{\&c.}) = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + 5Fx^4dx + 6Gx^5dx + \text{\&c.}$$

Si consideramos que siendo por el supuesto $M^m = N$, será tambien $M^m dx = Ndx$, y que $M^{-1} = \frac{1}{M}$, ó la unidad dividida por la serie propuesta; inferiremos que si divi-

vidimos el primer miembro de la equacion (A) por $M^m dx$, y el segundo por Ndx, se transformará en

$$\frac{m(b + 2cx + 3ex^2 + 4fx^3 + 5gx^4 + 6hx^5 + \&c.}{a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + gx^5 + hx^6 + \&c.} = \frac{B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + 6Gx^5 + \&c.}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \&c.}$$

520 Para determinar los coeficientes A, B, C &c. eliminaremos los denominadores de la última equacion, multiplicando el numerador del primer miembro por el denominador del segundo, y el numerador del segundo miembro por el denominador del primero, y sacaremos dos productos iguales, esto es

$$mx\left\{\begin{array}{l}
bA + bBx + bCx^2 + bDx^3 + bEx^4 + bFx^5 + bGx^6 + \&c. \\
+ 2cAx + 2cBx^2 + 2cCx^3 + 2cDx^4 + 2cEx^5 + 2cFx^6 + \&c. \\
\qquad + 3eAx^2 + 3eBx^3 + 3eCx^4 + 3eDx^5 + 3eEx^6 + \&c. \\
\qquad\quad + 4fAx^3 + 4fBx^4 + 4fCx^5 + 4fDx^6 + \&c. \\
\qquad\qquad + 5gAx^4 + 5gBx^5 + 5gCx^6 + \&c. \\
\qquad\qquad\quad + 6hAx^5 + 6hBx^6 + \&c. \\
\qquad\qquad\qquad + 7iAx^6 + \&c.
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}
= aB + bBx + cBx^2 + eBx^3 + fBx^4 + gBx^5 + hBx^6 + \&c. \\
+ 2aCx + 2bCx^2 + 2cCx^3 + 2eCx^4 + 2fCx^5 + 2gCx^6 + \&c. \\
\qquad + 3aDx^2 + 3bDx^3 + 3cDx^4 + 3eDx^5 + 3fDx^6 + \&c. \\
\qquad\quad + 4aEx^3 + 4bEx^4 + 4cEx^5 + 4eEx^6 + \&c. \\
\qquad\qquad + 4aFx^4 + 5bFx^5 + 5cFx^6 + \&c. \\
\qquad\qquad\quad + 6aGx^5 + 6bGx^6 + \&c. \\
\qquad\qquad\qquad + 7aHx^6 + \&c.
\end{array}$$

La ley de los términos así orizontales como verticales de ambos miembros de esta equacion es tan patente que solo con echarles una mirada se percibe.

521 Si comparamos los términos homólogos, forma-

Fig. maremos tantas equaciones quantas son las indeterminadas B, C &c. de las quales inferiremos los valores de B, C, D &c. pues el de A ya le sacamos antes. Hallaremos siguiendo este camino

$$A = a^m.$$

$$B = \frac{mbA}{a}$$

$$C = \frac{(m-1)bB + 2mcA}{2a}$$

$$D = \frac{(m-2)bC + (2m-1)cB + 3meA}{3a}$$

$$E = \frac{(m-3)bD + (2m-2)cC + (3m-1)eB + 4mfA}{4a}$$

$$F = \frac{(m-4)\,bE + (2m-3)cD + (3m-2)eC + (4m-1)fB + 5mgA}{5a}$$

$$G = \frac{(m-5)bF + (2m-4)cE + (3m-3)eD + (4m-2)fC + (5m-1)gB + 6mhA}{6a}$$

&c.

522 Bien se echa de ver que la misma fórmula puede servir igualmente para elevar á la potencia m un finitomio qualquiera, ó un polynomio compuesto de un número limitado de términos. Porque bastará suponer iguales á cero los coeficientes de los términos que no llevare el binomio propuesto, en cuyo caso si fuese m un número entero, la serie rematará, y la potencia ó fórmula se compondrá de un número limitado de términos.

523 Todavia podemos darla otra espresion á la fórmula que representa la potencia m de la serie $a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 +$ &c. Porque una vez que $A = a^m$, y $B = \frac{mbA}{a}$, será $B = mba^{m-1}$, $C = \frac{mcA}{a} + \frac{(m-1)}{2a} . bB = mca^{m-1} + \frac{m-1}{2} \times mbba^{m-2}$, con substituir en lugar de A y B sus valores hallados.

$D = \frac{meA}{a} + \frac{(2m-1)cB}{3a} + \frac{(m-2)bC}{3a} = mea^{m-1} + \frac{2m-1}{3} \times$ Fig.
$mcba^{m-2} + \frac{(m-2)}{3}b \times (mca^{m-2} + \frac{m-1}{2} . mbba^{m-3}) =$
$mea^{m-1} + \left(\frac{2m-1}{3} + \frac{m-2}{3}\right)mbca^{m-2} + m . \frac{(m-1)}{2} . \frac{(m-2)}{3}$
$b^3a^{m-3} = mea^{m-1} + m . \frac{m-1}{2} . 2bca^{m-2} + m . \frac{m-1}{2} .$
$\frac{m-2}{3} b^3a^{m-3}$. Siguiendo este camino hallaremos para espresar la potencia m del infinitomio propuesto la siguiente fórmula general $(a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + \&c.)^m$

$$
\begin{array}{l}
= a^m + mba^{m-1}x + \left.\begin{array}{r} m . \frac{m-1}{2} a^{m-2}bb \\ + ma^{m-1}c \end{array}\right\} x^2 \\
\left.\begin{array}{r} + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} a^{m-3}b^3 \\ + m . \frac{m-1}{2} . 2a^{m-2}bc \\ + ma^{m-1}e \end{array}\right\} x^3 \\
\left.\begin{array}{r} + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} a^{m-4}b^4 \\ + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . 3a^{m-3}bbc \\ + m . \frac{m-1}{2} . a^{m-2} \times \left\{\begin{array}{l} 2be \\ + cc \end{array}\right. \\ + ma^{m-1}f \end{array}\right\} x^4 \\
\left.\begin{array}{r} + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} . \frac{m-4}{5} a^{m-5}b^5 \\ + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} . 4a^{m-4}b^3c \\ + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . 3a^{m-3} \left\{\begin{array}{l} bcc \\ + bbe \end{array}\right. \\ + m . \frac{m-1}{2} . 2a^{m-2} \left\{\begin{array}{l} ce \\ bf \end{array}\right. \\ + ma^{m-1}g \end{array}\right\} x^5 \\
.
\end{array}
$$

524 Apliquemos esta fórmula á algunos egemplos.

I. Si hubiéramos de elevar á la quarta potencia la serie $1 + x + x^2 + x^3 + \&c$; sería $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$, &c. $m = 4$, y egecutando las subtituciones correspondientes en la fórmula general, sacaremos que $1 +$

$4x$

Fig. $4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4$ &c. es la quarta potencia de la serie propuesta.

525 II. Para quadrar $\frac{1}{x} + \frac{1}{xx} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ &c. consideraremos que la propuesta es $\frac{1}{x} \times \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$, y por consiguiente quadraremos el factor multinomio, y multiplicando despues su quadrado por $\frac{1}{x^2}$, estará formada la segunda potencia que buscamos.

Para quadrar, pues, $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} +$ &c. reparo que $x = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $e = 1$, &c, $m = 2$; y egecutando en la fórmula general las substituciones correspondientes hallaremos que $\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\ \&c.\right)^2 = 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{5}{x^4}$ &c. Cuya cantidad multiplicada por $\frac{1}{x^2}$ dará el producto $\frac{1}{xx} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5} + \frac{5}{x^6}$ &c. que es el quadrado de la serie propuesta.

526 Si la serie cuyo quadrado se ha de sacar tuviese esta forma $y - y^3 + y^5 - y^7$ &c. que es lo propio que $(1 - y^2 + y^4 - y^6\ \&c.) \times y$, buscaríamos primero el quadrado del factor multinomio para multiplicarle despues por yy; sería, pues, $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $e = 0$, $f = 1$, $g = 0$, $h = -1$, y $m = 2$; y haciendo las substituciones correspondientes en la fórmula, sacaríamos que $(1 - y^2 + y^4 - y^6\ \&c.)^2 = 1 - 2y^2 + 3y^4 - 4y^6$ &c. y multiplicando por yy será finalmente $(y - y^3 + y^5 - y^7\ \&c.)^2 = y^2 - 2y^4 + 3y^6 - 4y^8$ &c.

527 Si se me preguntára qual es la raiz quadrada de $rr - zz + \frac{z^4}{3r^2} - \frac{2z^6}{45r^4} + \frac{z^8}{315r^6}$ &c. consideraria que

$x = zz$, $a = rr$, $b = -1$, $c = \frac{1}{3r^2}$, $e = \frac{-2}{45r^4}$, $f = \frac{1}{315r^6}$ &c. y $m = \frac{1}{2}$, $\frac{m-1}{2} = -\frac{1}{4}$, $\frac{m-2}{3} = -\frac{1}{2}$, $\frac{m-3}{4} = -\frac{5}{8}$; luego $\sqrt{}(rr - zz + \frac{z^4}{3rr}$ &c.$) = r + \frac{1}{2} \times \frac{-1}{r}x - \frac{1}{8r^3}x^2 + \frac{1}{6r^3}x^2$ &c. $= r - \frac{zz}{2r} + \frac{z^4}{24r^3}$ &c. Fig.

528 Finalmente, si hubiéramos de sacar la raiz quadrada de $\frac{1}{rr - \frac{zz}{2} + \frac{z^4}{4rr} - \frac{z^6}{6r^4} + \frac{z^8}{8r^6} \text{ \&c.}}$ consideraríamos que la propuesta es lo mismo que

$$\frac{1}{rr} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{zz}{2rr} + \frac{z^4}{4r^4} - \frac{z^6}{6r^6} \text{ \&c.}}\right),$$ en cuyo supuesto sacaríamos primero la raiz quadrada del factor que incluye el paréntesis, y le multiplicaríamos despues por la raiz quadrada del factor $\frac{1}{rr}$ ó por $\frac{1}{r}$. Pero para sacar la raiz quadrada del factor que el paréntesis encierra, hemos de suponer $x = zz$, $a = 1$, $b = -\frac{1}{2rr}$, $c = \frac{1}{4r^4}$, $e = \frac{-1}{6r^6}$ &c. y $m = -\frac{1}{2}$, $\frac{m-1}{2} = -\frac{3}{4}$, $\frac{m-2}{3} = -\frac{5}{6}$, $\frac{m-3}{4} = -\frac{7}{8}$ &c. Egecutando las substituciones correspondientes, sacaríamos que la raiz quadrada de la cantidad propuesta es

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \frac{x}{4rr} + \frac{3x^2}{32r^4} + \frac{5x^4}{128r^6} \text{ \&c.} \\ \qquad\qquad - \frac{1}{8r^4} - \frac{3}{32r^6} \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \frac{1}{12r^6} \end{array}\right\} \times \frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{x}{4r^3} - \frac{x^2}{32r^5} + \frac{11x^3}{384r^7} - \text{ \&c.}$$

529 La fórmula general (523) sirve tambien para hallar el radical que representa una serie dada. Quando se aplica á esta investigacion 1.° se han de dividir primero todos los términos de la serie propuesta por el primer término

Fig. no, y será en virtud de esta division su primer término $= 1$. 2.° se compararán los tres primeros términos de la serie dada con los tres primeros de la fórmula, cada uno con el suyo, suponiendo $a = 1$, y c, e &c. $= 0$. 3.° De la comparacion de los dos segundos, y de los dos terceros resultarán dos equaciones, que darán el valor del esponente, y el segundo término del radical que se busca. Si de esta operacion no se sacare nada, se compararán quatro términos de la serie con quatro de la fórmula, para hallar el radical trinomio; ó cinco términos de la serie con cinco de la fórmula, para hallar un radical quadrinomio. Suponiendo $e = 0$, ó $f = 0$.

530 Si la serie propuesta fuese $1 - \frac{y}{a} + \frac{yy}{aa} - \frac{y^3}{a^3} + \frac{y^4}{a^4}$ &c. suponiendo $a = 1$, y $c = 0$, los tres primeros términos de la fórmula serian $1 + mbx + m.\frac{m-1}{2}bbxx$; comparando respectivamente con los tres primeros de la serie dada, sacaremos $mbx = -\frac{y}{a}$, y $m.\frac{m-1}{2}bbxx = \frac{yy}{aa}$; dividiendo la última de estas dos equaciones por la primera sale $\frac{m-1}{2}bx = -\frac{y}{a}$, y como $-\frac{y}{a} = mbx$, será tambien $\frac{m-1}{2}bx = mbx$, luego $m - 1 = 2m$, y $m = -1$. Por consiguiente $mbx = -bx = -\frac{y}{a}$, ó $bx = \frac{y}{a}$. De donde resulta que el esponente del radical es -1, y que su segundo término es $\frac{y}{a}$. Será, pues, el radical cifrado en la serie $= (1 + \frac{y}{a})^{-1}$ ó $\frac{1}{1 + \frac{y}{a}}$, ó $\frac{a}{a+y}$ la cantidad que la serie representa.

531 Si la serie dada fuese $a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5}$ &c, des-

despues de divididos todos sus términos por a, sería $1 + \frac{xx}{2aa} - \frac{x^4}{8a^4}$ &c. Los tres primeros términos de la fórmula (523) en el supuesto de $a = 1$, y $c = 0$ serian $1 + mbx + m.\frac{m-1}{2}bbxx$. Sacaremos, pues, las dos equaciones siguientes $mbx = \frac{xx}{2aa}$, $m.\frac{m-1}{2}bbxx = -\frac{x^4}{8a^4}$; dividiendo la segunda por la primera, sale $\frac{m-1}{2}bx = -\frac{xx}{4aa}$; luego $xx = mbx \times 2aa = -4aa \times \frac{m-1}{2}bx$; de donde sale $-m = m - 1$, y $2m = 1$, ó $m = \frac{1}{2}$, que será el esponente del radical. Será por consiguiente $mbx = \frac{1}{2}bx = \frac{xx}{2aa}$ ó $bx = \frac{xx}{aa}$ el segundo término del radical. Luego el radical será $a \times \left(1 + \frac{xx}{aa}\right)^{\frac{1}{2}} = (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$. Fig. I

532 Finalmente, supongamos que se me ofrezca averiguar de qué espresion radical proviene la serie $x\sqrt[4]{8} - \frac{5aa}{8x}\sqrt[4]{8} - \frac{5aa}{8x}\sqrt[4]{8} - \frac{75a^4}{512x^3}\sqrt[4]{8}$ — &c. que es lo mismo que $x\sqrt[4]{8}\left(1 - \frac{5aa}{8xx} - \frac{75a^4}{512x^4} \text{ \&c.}\right)$. Si en la fórmula suponemos $bx = y$, y sus tres primeros términos $1 + my + m.\frac{m-1}{2}yy$; en este supuesto será $my = \frac{-5aa}{8xx}$, $m.\frac{m-1}{2}yy = -\frac{75a^4}{512x^4}$; egecutando la division sacaremos $\frac{m-1}{2}y = \frac{15aa}{64xx}$, luego $y = -\frac{5aa}{8xxm} = \frac{15aa}{32xx(m-1)}$, y $-\frac{1}{m} = \frac{3}{4(m-1)}$, ó $-4m + 4 = 3m$, y $7m = 4$; luego $m = \frac{4}{7}$; este será el esponente del radical. De $y = \frac{-5aa}{8mxx}$ sacaremos $-\frac{5aa}{\frac{32}{7}xx} = -\frac{35aa}{32xx}$, que será el segundo término del radical. Luego el radical cifrado en la serie será $x\sqrt[4]{8}\left(1 - \frac{35aa}{32xx}\right)^{\frac{4}{7}}$.

533 Para aplicar las series á la integracion de una

Fig. diferencial, se transforma la diferencial propuesta en una serie cuyos términos se integran todos separadamente. Supongamos que hayamos de integrar la diferencial $\frac{a^3 dx}{a^3 - x^3}$, que no admite una integracion cabal. Reduciremos la fraccion á serie infinita, por manera que tengamos $\frac{a^3}{a^3 - x^3} = 1 + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^9}{a^9}$ &c. Luego $\frac{a^3 dx}{a^3 - x^3} = dx + \frac{x^3 dx}{a^3} + \frac{x^6 dx}{a^6} + \frac{x^9 dx}{a^9}$ &c. y por consiguiente $S. \frac{a^3 dx}{a^3 - x^3} = x + \frac{x^4}{4a^3} + \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^{10}}{10a^9}$ &c. Si a fuere mayor que x será convergente esta serie; y será divergente si fuere x mayor que a. En este último caso convendrá darla á la diferencial esta forma $\frac{-a^3 dx}{x^3 - a^3}$, y transformar en serie la fraccion $\frac{a^3}{x^3 - a^3}$, de cuya operacion sacaremos $\frac{a^3}{x^3 - a^3} = \frac{a^3}{x^3} + \frac{a^6}{x^6} + \frac{a^9}{x^9} + \frac{a^{12}}{x^{12}} +$ &c. y multiplicando ambos miembros por $-dx$, será $\frac{-a^3 dx}{x^3 - a^3} = \frac{-a^3 dx}{x^3} - \frac{a^6 dx}{x^6} - \frac{a^9 dx}{x^9} - \frac{a^{12} dx}{x^{12}}$ &c. y $S. \frac{-a^3 dx}{x^3 - a^3} = \frac{a^3}{2x^2} + \frac{a^6}{5x^5} + \frac{a^{12}}{11x^{11}}$ &c. que es convergente, y convergerá tanto mas quanto mayor fuere x respecto de a.

534 Supongamos que convenga integrar la diferencial $xdx(a + x)^m$, que por lo dicho (510) es integrable. Sea m el número que se quisiere, positivo ó negativo, entero ó quebrado, con tal que no sea $m = -1$. Reducirémos á serie la potencia m del binomio $a + x$, y supondremos que a es mayor que x. Tendremos, pues, $(a + x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m.m-1}{2} a^{m-2}x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3} a^{m-3}x^3 +$ &c. Multiplicando ambos miembros por xdx, sacaremos $xdx (a+x)^m = a^m xdx + ma^{m-1}x^2dx + \frac{m.m-1}{2} \times a^{m-2}x^3dx + \frac{m.m-1.m-2}{2.3} a^{m-3}x^4dx +$ &c. Luego

S.

$$S.xdx(a+x)^m = \frac{a^m x^2}{2} + \frac{ma^{m-1}x^3}{3} + \frac{m.m-1.a^{m-2}x^4}{2.4}$$ Fig.

$$+ \frac{m.m-1.m-2a^{m-3}x^5}{2.3.5} \&c.$$

Es tal esta integral que se desvanecerá si x fuese $= 0$. Si fuese m un número entero, y positivo, la serie rematará, y se compondrá de un número limitado de términos; porque como en los términos se halla succesivamente $m-2$, $m-3$, $m-4$ &c. llegará el caso de ser o alguna de las cantidades que llevan los coeficientes respectivos de los términos de la serie; en el caso de ser por egemplo $m=3$, será $m-3=0$, y serán cero todos los términos que $m-3$ multiplicare. Pero quando m fuese un número quebrado, ó negativo, la serie no rematará, y será infinita. Esto manifiesta que no se puede decidir que dexe de ser integrable algebraicamente una diferencial, porque sea su expresion una serie infinita, pues hay series diferenciales, qual es la propuesta quando $m=3$, por egemplo, cuya integral se puede sacar cabal. Conviene, pues, irse á la mano en formar juicio de la *integrabilidad* de los diferenciales por medio de las series. Porque si la serie rematare, la diferencial de donde proviniere será integrable algebraicamente; podrá serlo tambien, aunque no remate la serie, con tal que se pueda sumar, ó en general, ó continuada al infinito.

535 Aplicarémos el método de integrar por apro-

Fig. xîmacion buscando por medio del cálculo infinitesimal los logaritmos hiperbólicos. Supondrémos que el número cuyo logaritmo hemos de sacar, se compone de dos partes a y x, de manera que sea $a+x$, siendo a la parte mayor. De lo dicho (343) inferirémos $d\log(a+x)=\frac{dx}{a+x}$, cuya diferencial no admite una integracion algebráica. La hemos, pues, de reducir á serie, dándola primero esta forma $dx(a+x)^{-1}$. Pero hemos visto (II. 101) que $(a+x)^{-1}=a^{-1}\left(1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}\ \&c.\right)=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}\ \&c.$ Luego $d\log(a+x)=dx(a+x)^{-1}=\left(\frac{dx}{a}-\frac{xdx}{a^2}+\frac{x^2dx}{a^3}-\frac{x^3dx}{a^4}\ \&c.\right)$; luego integrando $L(a+x)=\left(\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}\ \&c.\right)+C.$ Para determinar la constante C, repararémos que la equacion que acabamos de sacar, siempre se ha de verificar, sea x la que fuere; luego tambien se verificará quando $x=0$, pero como en este último supuesto queda reducida á $La=C$, se infiere que $C=La$; luego $L(a+x)=La+\left(\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}\ \&c.\right)$. Servirá esta serie para calcular el logaritmo de un número qualquiera, con tal que se conozca el de otro número. Si suponemos, por egemplo, $a=10$, y $a+x=11$, será $x=1$. y por lo mismo $\frac{x}{a}=\frac{1}{10}$, de donde resulta que $L11=L10+\left(0{,}1-\frac{(0{,}1)^2}{2}+\frac{(0{,}1)^3}{3}\ \&c.\right)$ que manifiesta lo que se le ha de añadir al logaritmo de 10 para sacar el de 11.

536 Como la serie general que acabamos de sacar no converge bastante en algunas ocasiones, buscarémos por otro camino una serie que no tenga este inconve-

veniente. Nos propondremos buscar el logaritmo de una fraccion cuyo numerador sea mayor que el denominador; dentro de poco manifestaremos cómo se puede reducir á esto la investigacion de todo logaritmo. Fig.

Sea a la suma, y x la diferencia del numerador y del denominador de la fraccion propuesta; será (I. 673), pues, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x$ el numerador, y $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$ el denominador, y por consiguiente la fraccion propuesta será $\frac{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x}$ $= \frac{a+x}{a-x}$ con suprimir el factor comun $\frac{1}{2}$, de cuya fraccion representaremos el logaritmo por $L\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = L(a+x) - L(a-x)$. Si diferenciamos considerando a como constante, y x sola como variable *, sacaremos (343) $\frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}$ que se reduce á $\frac{2adx}{aa-xx}$ ó $2adx(aa-xx)^{-1}$; reduciendo $(aa-xx)^{-1}$ á serie, hallaremos (II. 101) $(aa-xx)^{-1} = a^{-2}\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} + \&c.\right)$; luego $2adx(aa-xx)^{-1}$ $= 2a^{-1}dx\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}\ \&c.\right) = 2\left(\frac{dx}{a} + \right.$

* Aunque esta fraccion ha de representar toda fraccion propuesta, esto no impide que podamos considerar como constante la suma a del numerador y del denominador; porque no hay fraccion alguna que no podamos preparar de modo que la suma del numerador y del denominador llegue á ser igual á qualquiera número, el que quisiésemos. Si quisiéramos reducir, por egemplo, la fraccion $\frac{3}{5}$ á que fuese 12 la suma del numerador y del denominador, bastaria suponer, despues de multiplicados ambos términos por un mismo número n, de donde resultaría $\frac{3n}{5n}$, bastaría, digo, suponer $3n + 5n$ ó $8n = 12$; de donde sacaríamos $n = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$; luego $\frac{3}{5} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}$, de cuyo numerador y denominador la suma es con efecto 12.

$\frac{x^2\,dx}{a^3} + \frac{x^4\,dx}{a^5} + \frac{x^6\,dx}{a^7} + \frac{x^8\,dx}{a^9} +$ &c.). Luego $S.\ \frac{2a\,dx}{aa - xx}$ ó $L\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \frac{x^9}{9a^9} + \text{\&c.}\right),$ $+ C$. Por lo que mira á la constante C, determinaremos su valor como antes, considerando que quando $x = 0$, la equacion para en $L\frac{a}{a} = C$; luego $C = L\frac{a}{a} = L1 = 0$; por consiguiente $L\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$ es $2\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7}\ \text{\&c}\right)$, en cuya serie cada término es el antecedente multiplicado por el quadrado de $\frac{x}{a}$ ó del primer término; y se toma despues el primero, el tercio del segundo, el quinto del tercero &c. y el duplo de la suma.

Busquemos por este camino el logaritmo de $2 = \frac{2}{1}$; será, pues, $a = 3$, $x = 1$; luego $\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$, y $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{9}$. Será por consiguiente facil hallar cada término, pues bastará para lograrlo tomar la $\frac{1}{9}$ parte del término antecedente, y sacaremos la serie $\frac{x}{a}$, $\frac{x^3}{a^3}$, $\frac{x^5}{a^5}$ &c. y será

$\frac{x}{a}$	$= 0{,}333333333$; luego	$\frac{x}{a}$	$= 0{,}333333333$
$\frac{x^3}{a^3}$	$= 0{,}037037037$;	$\frac{x^3}{3a^3}$	$= 0{,}012345679$
$\frac{x^5}{a^5}$	$= 0{,}004115226$;	$\frac{x^5}{5a^5}$	$= 0{,}000823045$
$\frac{x^7}{a^7}$	$= 0{,}000457247$;	$\frac{x^7}{7a^7}$	$= 0{,}000065321$
$\frac{x^9}{a^9}$	$= 0{,}000050805$;	$\frac{x^9}{9a^9}$	$= 0{,}000005645$
$\frac{x^{11}}{a^{11}}$	$= 0{,}000005645$;	$\frac{x^{11}}{11a^{11}}$	$= 0{,}000000513$
$\frac{x^{13}}{a^{13}}$	$= 0{,}000000627$;	$\frac{x^{13}}{13a^{13}}$	$= 0{,}000000048$
$\frac{x^{15}}{a^{15}}$	$= 0{,}000000069$;	$\frac{x^{15}}{15a^{15}}$	$= 0{,}000000004$

Luego la suma es 0,346573588
y el duplo que ha de ser el log. de 2 es 0,693147176
que ciñéndonos á ocho decimales es 0,69314718.

Por ser 4 el quadrado de 2, y 8 su cubo, el duplo

plo del logaritmo que hemos sacado será el logaritmo de 4 ; y su triplo será el logaritmo de 8.

El logaritmo de 3 le sacaremos calculando el de $\frac{4}{3}$, y restándole del logaritmo de 4, la resta será el logaritmo de 3, por ser 3 lo mismo que 4 dividido por $\frac{4}{3}$; luego $L3 = L4 - \frac{L4}{3}$. Pero le hallaremos mas facilmente calculando el logaritmo de la fraccion $\frac{8}{9}$, y restándole del logaritmo de 8 que ya conocemos; la diferencia será el logaritmo de 9, cuya mitad será el logaritmo de 3. La suma del log. de 3, y del log. de 2 será el log. de 6; para hallar el de 5 calcularemos primero el de 10, calculando el de $\frac{10}{8}$; y añadiéndole al logaritmo de 8, la suma será el log. de 10. Y restando de este el log. de 2, la resta será el log. de 5.

537 Al paso que es mayor el número, cuyo logaritmo se busca, es mas breve el cálculo; por manera que una vez sacados los logaritmos no mas que hasta el del número 10, bastan para calcular los demas los tres primeros términos de la serie, quando no se piden mas que ocho decimales; y para sacar los logaritmos de los números que están entre 100 y 1000 bastan los dos primeros términos de la serie, y despues de 1000 basta con el primero.

En quanto al modo de reducir estos logaritmos hyperbólicos á los tabulares, ya lo hemos declarado (II. 354).

Algunos usos del método de integrar por aproximacion.

538 La integral de muchas diferenciales que se in-

Fig. tegran por aproximacion se puede sacar sin reducirlas primero á serie, y en esta clase están comprehendidas todas las diferenciales que pueden reducirse al círculo ó á los logaritmos. Porque como en las tablas de los logaritmos, senos, tangentes &c. se hallan los valores de los logaritmos, y de las diferentes partes del círculo, son de muchísimo socorro para concluir con mas brevedad la integracion de las espresadas diferenciales. Es, pues, muy importante dar señas seguras para conocerlas, aquellas por lo menos que ocurren con mas frecuencia.

212. 539 Si llamamos a el diámetro del círculo cuyo arco es AM; AP, x; PM, y; y si despues de tiradas la pm infinitamente próxima á PM, y la Mr paralela á AC, llamamos el arco AM, u; será $Pp = Mr = dx$, $Mm = du$, y los triángulos semejantes CPM, Mrm darán $PM : CM :: Mr : Mm$, esto es $ax - xx : \frac{1}{2}a :: dx : du = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$. Será, pues, $S. \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ el valor del arco AM. Por consiguiente, si se nos pidiera qual es el valor de esta integral, quando x tiene un valor determinado, restaríamos de CA ó $\frac{1}{2}a$ el valor conocido de x ó AP, y resultaría CP. Luego en el triángulo rectángulo CPM conoceríamos el ángulo recto, la hypotenusa $CM = \frac{1}{2}a$, y el lado CP; luego podríamos valuar el ángulo ACM. Y como dado el radio CM, y el ángulo ACM, ó sabiendo quantos grados coge el arco AM, es facil hallar (I.505) su valor, ó

quan-

quanto coge de largo, sacaríamos facilmente la integral de Fig.
la diferencial propuesta.

540 Si en el supuesto de ser h, g, p y k cantidades conocidas, hubiéramos de integrar la diferencial $\frac{hdx}{\sqrt{(gkx-pxx)}}$, la reduciríamos á la antecedente, dividiendo primero el numerador y el denominador por $\sqrt{p}$, y resultaría $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}}$, ó $\frac{h}{\sqrt{p}}\times\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}}$; y si dx estuviese multiplicada por la mitad de $\frac{gk}{p}$ que multiplica x en el radical, se parecería esta diferencial á la de antes (539). Hagamos, pues, que concurra en ella esta circunstancia, multiplicando y dividiendo á un tiempo por $\frac{1}{2}\,\frac{gk}{p}$ ó $\frac{gk}{2p}$, de cuya operacion sacaremos $\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}}{\frac{gk}{2p}}\times\frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}}$ ó $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}\times\frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}}$. Puesta la diferencial en esta forma, se echa de ver que su integral es un arco de círculo cuyo diámetro $=\frac{gk}{p}$, y la abscisa $=x$, multiplicado por $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$; será, pues, facil determinarla por lo dicho poco há.

541 Si en vez de contar las abscisas desde el punto
A, las hubiéramos contado desde el centro *C*, llamando b el 212.
radio *CA*, y x la abscisa *CP*, hubiera sido $\frac{-bdx}{\sqrt{(bb-xx)}}$ el elemento del arco *AM*. Esto lo sacaríamos comparando los triángulos semejantes *CPM*, *Mrm*, teniendo presente que $PM=\sqrt{(bb-xx)}$, y que pues *AM* mengua al paso

que

Fig. que $CP = x$ crece, su diferencial ha de ser negativa. Por consiguiente quando ocurriese integrar una diferencial como $\frac{kdx}{\surd(gh - pxx)}$, se deberá transformar como antes en $\frac{k}{\surd p} \times \frac{dx}{\surd\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}$, y como $\frac{gh}{p}$ representa en este caso bb, la cantidad $-b$, que ha de llevar el numerador, es $-\surd\frac{gh}{p}$; multiplicaremos, pues, y dividiremos á un tiempo por $-\surd\frac{gh}{p}$, y saldrá $\frac{\frac{k}{\surd p}}{-\surd\frac{gh}{p}} \times \frac{-\surd\frac{gh}{p}\,dx}{\surd\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}$. Luego con suponer $CA = \surd\frac{gh}{p}$, y $CP = x$, resultará la integral $\frac{\frac{k}{\surd p}}{-\surd\frac{gh}{p}} \times AM$, ó mas generalmente $\frac{\frac{k}{\surd p}}{-\surd\frac{gh}{p}} \times AM +$ C, ó $\frac{-k}{\surd gh} \times AM + C$.

Por lo que mira á la constante C, se determinará por las circunstancias de la cuestion de que proviniere la diferencial propuesta, y el arco AM se determinará conforme hemos dicho (540); quiero decir, calculando el triángulo CPM.

542 De lo probado (356) consta que $\frac{aadx}{aa + xx}$ representa un arco de círculo cuyo radio $= a$, y la tangente $= x$; cuyo arco se valuará facilmente quando tuviere x un valor determinado, calculando el ángulo ACN,
212. y el arco M' por medio de los grados que cogiere el ángulo ACN, y del radio a (I.505).

Luego si la diferencial propuesta fuese $\frac{kdx}{gb^2 + hxx}$, dividiríamos el numerador y el denominador por b; y resulta-

Fig.

taría $\frac{k}{h} \times \frac{dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$, multiplicando despues ambos términos por $\frac{gb^2}{h}$, sacaríamos $\frac{\frac{k}{h}}{\frac{gb^2}{h}} \times \frac{\frac{gb^2}{h}dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$ ó $\frac{k}{gb^2} \times \frac{\frac{gb^2}{h}dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$; por consiguiente la integral sería el producto del arco cuya tangente fuese $= x$, y el radio $= \sqrt{\frac{gb^2}{h}}$, multiplicado por $\frac{k}{gb^2}$.

543 Las cantidades que se refieren inmediatamente á los logaritmos son todas aquellas, en las quales la diferencial propuesta es ó puede ser una fraccion cuyo numerador sea la diferencial del denominador, ó esta diferencial multiplicada ó dividida por un número constante.

Quando el numerador es la diferencial cabal del denominador, la integral es el logaritmo del denominador; por egemplo, $S. \frac{dx}{x} = Lx + C$; $S. \frac{dx}{a+x} = L(a+x) + C$; $S. \frac{2xdx}{aa+xx} = L(aa + xx) + C$.

Pero quando el numerador es la diferencial cabal del denominador multiplicada ó dividida por un número constante, es preciso resolver la diferencial propuesta en dos factores, tales que el uno sea una fraccion cuyo numerador sea la diferencial cabal del denominador, y el otro factor sea un número constante. La integral será el logaritmo del numerador variable, multiplicado por el factor constante. Así para integrar $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3}$ reparo que la diferencial de $a^3 + x^3$ es $3x^2dx$, y que por lo mismo he de

pre-

Fig. preparar la diferencial de modo que $3x^2dx$ esté en el numerador; con esta mira la doy esta forma $\frac{a}{3} \times \frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$, cuya integral es $\frac{a}{3}L(a^3+x^3)+C$.

Por lo mismo $S.\frac{dx}{a-x} = S.\frac{1}{-1} \times \frac{-1dx}{a-x} = -L(a-x)+C = 0 - L(a-x) + C = L1 - L(a-x) + C = L\left(\frac{1}{a-x}\right) + C$.

$S.\frac{xdx}{aa+xx} = \frac{1}{2} \times \frac{2xdx}{aa+xx} = \frac{1}{2}L(aa+xx) + C = L\left[\sqrt{(aa+xx)}\right] + C$.

$$S.\frac{ax^{n-1}dx}{k+bx^n} = S.\frac{a}{bn} \times \frac{nbx^{n-1}dx}{k+bx^n} = \frac{a}{bn} \times L(k+bx^n) + C = L(k+bx^n)^{\frac{a}{bn}} + C.$$

544 Hay muchas diferenciales que tambien se integran directamente por logaritmos, aunque no se las pueda preparar como las antecedentes; tal es la diferencial $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$. A las de esta clase se consigue muchas veces darlas la forma diferencial logarítmica multiplicándolas por una funcion de x, tal que el producto sea la diferencial de dicha funcion, ó la misma diferencial multiplicada ó dividida por un número constante. Si despues de esto se divide el resultado por la misma funcion, la diferencial será patentemente una diferencial logarítmica. Para aplicar esto á $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$ la multiplicaremos por $x+\sqrt{(xx-1)}$, y sacaremos $\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}} + dx$, que es con efecto la diferencial de $x + \sqrt{(xx-1)}$, por manera que $S.\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}} =$

$$S.\frac{dx + \frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}}{x+\sqrt{(xx-1)}} = L\left[x+\sqrt{(xx-1)}\right] + C.$$

Tam-

Tambien sacaremos la integral de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ multiplicando ambos términos por $\sqrt{-1}$, de donde resultará $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}}$, cuya integral, segun acabamos de manifestar, es $\sqrt{-1} \times L\left(x+\sqrt{(xx-1)}\right)+C.$ Fig.

545 De todo esto resulta 1.º que la integral de $\frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = L.\left[x+\sqrt{(x^2 \pm a^2)}\right]$. Porque si diferenciamos $x+\sqrt{(x^2 \pm a^2)}$ sacaremos $dx + \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = . . \frac{dx\sqrt{(x^2 \pm a^2)}+xdx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}} \times \left(\sqrt{(x^2 \pm a^2)}+x\right)$, dividiendo esta cantidad por $x+\sqrt{(x^2 \pm a^2)}$, resultará $\frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)}}$, que es la misma diferencial propuesta.

2.º Que la integral de $\frac{dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}} = L\left[a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}\right]$. Porque la diferencial de $a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}$ es $dx+\frac{adx+xdx}{\sqrt{(2ax+xx)}} = \frac{dx}{\sqrt{(2ax+xx)}} \times \left[\sqrt{(2ax+x^2)}+a+x\right]$, cuya diferencial dividida por el número dá $\frac{dx}{\sqrt{(2ax+xx)}}$.

3.º Que la integral de $\frac{2adx}{a^2-x^2}$ es $L\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$. Porque si diferenciamos $\frac{a+x}{a-x}$ sacaremos $\frac{dx(a-x)+dx(a+x)}{(a-x)^2} = \frac{2adx}{(a-x)^2}$, cuya cantidad dividida por $\frac{a+x}{a-x}$ dá $\frac{2adx}{(a-x)^2} \times \frac{a-x}{a+x} = \frac{2adx}{(a+x)(a-x)} = \frac{2adx}{a^2-x^2}$.

Finalmente $S.\frac{2adx}{x\sqrt{(a^2 \pm x^2)}} = L\left(\frac{a-\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}{a+\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}\right)$. Porque la diferencial de $\frac{a-\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}{a+\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}$ es $\frac{\mp xdx}{\sqrt{(a^2 \pm x^2)}} \times \left[\frac{a+\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}{(a+\sqrt{(a^2 \pm x^2)})^2}\right]$

$$\mp \frac{xdx}{\sqrt{(a^2 \pm x^2)}} \times \left[\frac{a-\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}{(a+\sqrt{(a^2 \pm x^2)})^2}\right] = \frac{\mp 2axdx}{\sqrt{(a^2 \pm x^2)} \times (a+\sqrt{(a^2 + x^2)})^2},$$

cuya cantidad dividida por $\frac{a-\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}{a+\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}$ dá

$$\frac{\mp 2axdx}{\sqrt{(a^2 \pm x^2)} \times [a+\sqrt{(a^2 \pm x^2)}]^2} \times \frac{a+\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}{a-\sqrt{(a^2 \pm x^2)}} =$$

$$\frac{\mp 2axdx}{\sqrt{(a^2 \pm x^2)} \times [a+\sqrt{(a^2 \pm x^2)}] \times (a-\sqrt{(a^2 \pm x^2)})} = \frac{\mp 2axdx}{\sqrt{(a^2 \pm x^2)} \times \mp x^2}$$

$=$

Fig. $= \frac{2adx}{x\sqrt{(a^2 \pm x^2)}}$, que es la diferencial propuesta.

546 Es muy facil señalar el valor numérico de todas estas integrales. Supongamos, por egemplo, que nos importe averiguar el valor de $L(a+x)$, siendo $a = 5$, en el supuesto de ser $x = 2$. Habremos, pues, de señalar el valor de $L.7$. Buscaremos en las tablas ordinarias el logaritmo de 7, que es 0,8450980; le multiplicaremos (II. 354) por 2,30258509 ó 2,3025811, y sacaremos 1,9459100 ó 1,94591, que será el valor de $L(a+x)$, ó de la integral de $\frac{dx}{a+x}$, quando $a = 5$, y $x = 2$.

Integracion de las diferenciales que llevan senos y cosenos.

547 Una vez que segun hemos visto (352) $d(\text{sen } z) = dz \cos z$, y $d(\cos z) = - dz \text{ sen } z$; podemos inferir que la integral de $dz \cos z$ será sen z, ó mas generalmente sen $z + C$, que tiene la misma diferencial. La integral de $- dz$ sen z será $\cos z + C$.

548 Si hubiéramos de integrar $dz \cos 3z$, la daríamos esta forma $\frac{3dz \cos 3z}{3}$, y sería su integral $\frac{\text{sen } 3z}{3} + C$. Para hallar la integral de dz sen $3z$, escribiríamos $\frac{-3dz \text{ sen } 3z}{-3}$, y sacaríamos que su integral es $\frac{\cos 3z}{-3} + C$. En general $S.\, dz$ sen mz se transforma en $S.\frac{-mdz \text{ sen } mz}{-m} = \frac{-\cos mz}{m} + C$, con tal que sea m un número constante.

549 Quando ocurriere integrar $(\text{sen } z)^n\, dz \cos z$, convendrá reparar que la diferencial propuesta es la misma que estotra $(\text{sen } z)^n\, d(\text{sen } z)$; y si miramos sen z como una

una variable, podremos integrar por la regla fundamental, Fig. y sacaremos que $S.\ (\mathrm{sen}\ z)^n\ dz \cos z = \frac{(\mathrm{sen}\ z)^{n+1}}{n+1} + C.$

Si la diferencial que se ha de integrar fuese $(\mathrm{sen}\ mz)^n\ dz \cos mz$, la daríamos esta forma $\frac{(\mathrm{sen}\ mz)^n mdz \cos mz}{m}$, que viene á ser $\frac{(\mathrm{sen}\ mz)^n\ d(\mathrm{sen}\ mz)}{m}$, cuya integral es ... $\frac{(\mathrm{sen}\ mz)^{n+1}}{m(n+1)}$.

550 Para hallar la integral de $(\cos mz)^n dz\ (\mathrm{sen}\ mz)$; la escribiremos de este modo $\frac{(\cos mz)^n \times -mdz\ \mathrm{sen}\ mz}{-m}$, cuya integral es $\frac{(\cos mz)^{n+1}}{-m(n+1)} + C.$

551 Si hubiéramos de integrar dz sen $pz \cos qz$; en virtud de lo dicho (II. 378) transformaríamos sen pz cos qz en $\frac{1}{2}$ sen $(pz + qz) + \frac{1}{2}$ sen $(pz - qz)$, ó $\frac{1}{2}$ sen $(p+q)z + \frac{1}{2}$ sen $(p-q)z$; y tendríamos que integrar $\frac{1}{2}\ dz$ sen $(p+q)z + \frac{1}{2}\ dz$ sen $(p-q)z$, cuya cantidad si la escribimos de este modo $\frac{1}{2}\ \frac{(p+q)\,dz\ \mathrm{sen}\ (p+q)z}{p+q} + \frac{1}{2}\ \frac{(p-q)dz\ \mathrm{sen}\ (p-q)z}{p-q}$, tiene por integral $\frac{-\frac{1}{2}\cos (p+q)z}{p+q} - \frac{\frac{1}{2}\cos (p-q)z}{p-q} + C.$

Por el mismo camino hallaríamos la integral de dz

Fig. dz sen pz cos qz sen rz &c, transformando estos productos en senos ó cosenos de la suma, ó de la diferencia de los arcos pz, qz, rz &c. por lo dicho (II. 578).

552 Supongamos que hayamos de integrar $dz(\text{sen } z)^3$; la transformarémos en dz sen z $(\text{sen } z)^2$; pero (II. 578) $(\text{sen } z)^2$ ó sen $z \times$ sen $z = \frac{1}{2}\cos(z - z) - \frac{1}{2}\cos(z + z) = \frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{2}\cos 2z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z$, porque $\cos 0 = 1$; luego sen $z\,(\text{sen } z)^2 = \frac{1}{2}$ sen $z - \frac{1}{2}$ sen $z \times$ cos $2z$. Luego $dz(\text{sen } z)^3 = \frac{1}{2}dz$ sen $z - \frac{1}{2}dz$ sen z cos $2z$. Reducirémos, pues, sen z cos $2z$ del mismo modo que hemos reducido (551) sen pz cos qz, y será facil la integracion. Esto manifiesta como haríamos para integrar $dz\,(\text{sen } z)^n$, siendo n un número entero positivo. El mismo rumbo seguiríamos para integrar $dz(\cos z)^n$. Por consiguiente los principios que hemos sentado pueden servir para integrar las cantidades de esta forma $(\text{sen } pz)^m (\cos qz)^n (\text{sen } rz)^s$ &c. en el supuesto de ser m, n, s números enteros positivos.

553 Finalmente, sirven estos mismos principios, juntamente con lo que llevamos dicho hasta aquí acerca del modo de integrar las cantidades, para hallar las integrales de las diferenciales afectas de senos y cosenos, quando tienen una integral algebráica; y quando llevaren tangentes será facil reducirlas á diferenciales de senos, y cosenos teniendo presente que tang $z = \frac{\text{sen } z}{\cos z}$ (II. 367).

In-

Fig.

Integracion de las diferenciales logarítmicas y esponenciales.

554 Supongamos que se nos ofrezca integrar $\frac{dx}{xLx}$, haremos $Lx = y$, que dará $\frac{dx}{x} = dy$; por consiguiente la propuesta se transformará en $\frac{dy}{y}$, cuya integral es Ly (476); y poniendo en lugar de y su valor Lx, será $S.\frac{dx}{xLx} = L.Lx$.

555 Para integrar $m(Lx)^{m-1}\frac{dx}{x}$, haremos tambien $Lx = y$, de cuyo supuesto sacaremos $\frac{dx}{x} = dy$, $(Lx)^{m-1} = y^{m-1}$; luego $m(Lx)^{m-1}\frac{dx}{x} = my^{m-1}dy$; y como la integral de esta última diferencial es y^m, se infiere que $S.m(Lx)^{m-1}\frac{dx}{x} = (Lx)^m$ despues de substituido en lugar de y su igual Lx.

556 Si se me pidiera la integral de $m(L.Lx)^{m-1}\frac{dx}{xLx}$, haría $Lx = y$, de donde inferiría $\frac{dx}{x} = dy$; $L.Lx = Ly$; luego se transformaría la diferencial propuesta en estotra $m(Ly)^{m-1}\frac{dy}{y}$, cuya integral es (555) $(Ly)^m$, y substituyendo en lugar de Ly su valor $L.Lx$, será $S.m(L.Lx)^{m-1}$ $\frac{dx}{xLx} = (L.Lx)^m$.

557 En el caso de ser la diferencial propuesta nm $(Lx^m)^{n-1}\frac{dx}{x}$, haríamos $x^m = y$, de donde inferiríamos $dx = \frac{dy}{mx^{m-1}}$; $Lx^m = Ly$, y egecutando las substituciones correspondientes sacaríamos la transformada $nm(Ly)^{n-1}\frac{dy}{mx^m}$ $= n(Ly)^{n-1}\frac{dy}{y}$, cuya integral (555) es $(Ly)^n$. Substituyendo, pues, en lugar de y su igual x^m, será $S.\,nm(Lx^m)^{n-1}\frac{dx}{x} = (Lx^m)^n$.

Fig. 558 Supongamos finalmente que la diferencial propuesta sea $nm\left[L(Lx)^m\right]^{n-1}\cdot\frac{dx}{xLx}$; haremos $Lx = y$; luego $\frac{dx}{x} = dy$; $(Lx)^m = y^m$; y egecutando las substituciones correspondientes sacaremos la siguiente transformada $nm(Ly^m)^{n-1}\frac{dy}{y}$, cuya integral es (557) $(Ly^m)^n$. Luego $S.nm\left[L.(Lx)^m\right]^{n-1}\frac{dx}{xLx} = \left[L(Lx)^m\right]^n$.

559 Por lo que mira á las diferenciales esponenciales, seguiremos para integrarlas un camino opuesto al que nos guió para diferenciarlas. Por consiguiente *la integral de una diferencial esponencial es la misma diferencial dividida por la diferencia de su logaritmo.*

Porque una vez que (349) la diferencial de c^x es $c^x dx$, se sigue que $S.c^x dx = c^x$. La misma regla nos enseña que la integral de $x^y dyLx + x^{y-1}ydx$ es x^y; Porque la diferencia del logaritmo de x^y es $dyLx + \frac{ydx}{x}$. Dividiendo $x^y dyLx + x^{y-1}ydx = x^y dyLx + \frac{x^y ydx}{x}$ por $dyLx + \frac{ydx}{x}$, sale el cociente x^y.

560 Si hubiéramos de integrar $x^{y^z} y^z x^{-1} dx + x^{y^z} y^z dzLxLy + x^{y^z} y^{z-1} zdyLx$, hallaríamos que la integral es x^{y^z}. Porque el logaritmo de x^{y^z} es $y^z Lx$, cuya diferencia es $y^z\frac{dx}{x} + y^z dzLx.\ Ly + y^{z-1}zdyLx$. Dividiendo la propuesta por esta cantidad, el cociente de la division será x^{y^z}.

561 Tambien podemos hacer uso de las substitucio-

ciones para integrar las diferenciales esponenciales. Supongamos que se nos pida la integral de $c^x dx$, haremos $c^x = y$; luego $xLc = Ly$, ó por ser $Lc = 1$, $x = Ly$. Luego $dx = \frac{dy}{y}$. Substituyendo, sacaremos $\frac{ydy}{y} = dy$, cuya integral es y, que hemos hecho igual á c^x. Por consiguiente $S.\, c^x dx = c^x$. Fig.

562 Si buscamos la integral de $x^y dyLx + \dfrac{x^y ydx}{x}$, haríamos $x = z$, de donde inferiríamos $yLx = Lz$, y diferenciando $\frac{ydx}{x} + dyLx = \frac{dz}{z}$. Egecutando en la propuesta las substituciones correspondientes, sacaremos la transformada dz, cuya integral es $z = x^y$, la misma que sacamos antes (559) por la regla general.

563 Para sacar la integral de $x^{y^z} \times (y^z x^{-1} dx + y^z dzLx.Ly + y^{z-1} zdyLx)$, haremos como antes $x^{y^z} = u$; de donde inferiremos $y^z Lx = Lu$, y $y^z x^{-1} dx + y^z dzLxLy + y^{z-1} zdyLx = \frac{du}{u}$. Si despues de egecutadas las substituciones correspondientes en la propuesta, integramos, sale por fin $S.du = u$; y por consiguiente la integral de la propuesta será x^{y^z}.

Usos del cálculo integral para quadrar las curvas.

564 Como la unidad con la qual suelen compararse las areas de las figuras es un quadrado (I.494), lo mismo es quadrar una figura que medir el espacio que su perímetro encierra. Para esta quadratura de los espacios

Fig. es de un uso generalísimo, segun hemos insinuado (474), el cálculo integral, por aplicarse á la medida de qualesquiera espacios, sea la que fuere la especie ó naturaleza de las lineas que los terminan. Verdad es que hay muchos espacios que ni aun con este socorro es posible quadrar absolutamente; pero facilita quadraturas muy aproximadas, quando no se pueden sacar cabales, y abrevia muchísimo el modo de hallarlas.

565 Para valuar la superficie, ó, lo que es lo propio, para sacar la quadratura de las lineas curvas, las
213. consideramos como polýgonos de una infinidad de lados; y desde los estremos M, m de cada lado concebimos tiradas las perpendiculares MP, mp al ege de las abscisas, con lo que está dividida la superficie en una infinidad de trapecios infinitamente pequeños. Cada trapecio $PpmM$ se considera como la diferencial del espacio finito APM; porque $PpmM = Apm - APM = d(APM)$ (322). Solo falta espresar algebráicamente el trapecio $PpmM$, é integrar despues su espresion, por medio de las reglas de integracion que hemos declarado.

Pero es de reparar que el trapecio $PpmM$ que consideramos como la diferencial de la superficie contándola desde el origen A de las abscisas, puede ser tambien la diferencial de otro espacio qualquiera $KPML$, contándole desde un punto fijo, y determinado K, porque tambien $PpmM = KpmL - KPML = d(KPML)$. Por consiguiente la integral que resultare podrá espresar el espacio

APM, y el espacio *KPLM* que discrepa del primero de Fig.
un espacio *KAL* determinado y constante. Será, pues, indispensable añadirla á la integral que se hallare, una constante que determine la diferencia que hay entre el espacio que quisiéramos valuar, y el que resulta del cálculo: los egemplos manifiestan el modo de determinar esta constante. Por ahora nos ceñiremos á sacar la espresion del espacio *PpmM*.

566 Para cuyo fin llamaremos AP, x; PM, y; y será $Pp = dx$, $rm = dy$. La superficie del trapecio $PpmM$ (I. 500) es $\frac{PM+pm}{2} \times Pp = \frac{2y+dy}{2} \times dx = ydx + \frac{dxdy}{2}$. Pero la cantidad $\frac{dxdy}{2}$ es despreciable respecto de ydx (326); luego la espresion general de la diferencial ó del elemento de la superficie de una curva se reducirá á ydx.

Para aplicar esta fórmula á una superficie propuesta cuya equacion fuese dada, se habrá de sacar de la espresada equacion el valor de y para substituirle en la fórmula ydx; cuya substitucion transformará la fórmula en una cantidad en que no habrá mas que x y dx, cuya integral, dado caso que se pudiere conseguir, espresará, añadiéndola una constante, la superficie ó area de la curva, contándola desde el punto que quisiéremos. Solo restará determinar la constante, determinando el punto desde el qual se ha de contar la superficie.

567 Quando las ordenadas, bien que paralelas las unas á las otras no forman un ángulo recto con las abscisas, resulta para la quadratura una fórmula algo diferen-

Fig. te de la que acabamos de sacar. Porque el trapecio elemental $PpmM$ que ha de ser igual á $\frac{PM+pm}{2}$ multiplicado por la distancia que hay entre los dos lados paralelos, no será ya $\frac{PM+pm}{2} \times dx$ como antes (566), sino $\frac{PM+pm}{2}$
214. multiplicada por pn, que no es lo mismo que Pp. Busquemos, pues, el valor de la altura pn del trapecio elemental, y hallaremos que es el seno del ángulo APM ó pPM que forman las ordenadas paralelas con el ege de las abscisas; porque si miramos Pp como el radio será (I.666) pn el seno del ángulo pPM, cuyo seno es el mismo (I.646) que el del ángulo APM. Luego si llamamos r el radio Pp, y φ el ángulo pPn, tendremos. (I.664) $Pp : pn :: r :$ sen φ. Luego $pn = \frac{Pp \times \text{sen}\ \varphi}{r} = dx \times \frac{\text{sen}\ \varphi}{r}$. Por consiguiente la espresion del trapecio diferencial $PpmM$ será $\frac{PM+pm}{2} \times dx . \frac{\text{sen}\ \varphi}{r} = \frac{2y+dy}{2} \times dx . \frac{\text{sen}\ \varphi}{r}$, que se reduce á $ydx \times \frac{\text{sen}\ \varphi}{r}$, y los espacios serán $\frac{\text{sen}\ \varphi}{r} S.ydx$. En cuyo caso serán tanto menores los espacios quanto mayor fuere la razon entre el radio r y sen φ, pues quanto mayor fuere esta razon, tanto menor será la cantidad $\frac{\text{sen}\ \varphi}{r}$. Quando $r = 1$, será $ydx \times \frac{\text{sen}\ \varphi}{r} = ydx .$ sen φ, y $\frac{\text{sen}\ \varphi}{r} S.ydx$ $=$ sen $\varphi\ S.ydx$.

568 En lo que acabamos de decir en orden á la quadratura de las curvas hemos supuesto que las ordenadas sean paralelas unas á otras. Pero si las ordenadas salieren todas desde un centro comun, se supondrá dividida la

area

área de la curva en triángulos, y no en trapecios, de cuyo supuesto resultará alguna diferencia en la fórmula general de la quadratura. Por egemplo, para valuar la superficie del segmento CNQ, le concebiremos dividido en una infinidad de triángulos infinitamente pequeños, como CQq. Si desde el punto Q bajáramos á Cq la perpendicular Qt, ó, lo que es lo propio, si desde el punto C como centro, y con el radio CQ trazamos el arco Qt, la espresion del triángulo CQq será $\frac{Cq \times Qt}{2}$. Por consiguiente si llamamos CQ, y; y el arco Qt, dx, será $Cq = y + dy$; y por consiguiente el triángulo $CQq = \frac{y+dy}{2} dx = \frac{ydx+dxdy}{2}$, esto es $\frac{ydx}{2}$, despues de desechado (326) el término $\frac{dydx}{2}$. Solo faltará, pues, sacar de la equacion que espresare la relacion entre x é y el valor de y en x para substituirle en la fórmula en lugar de y, y despues integrar. Fig. 215.

569 Cuestion I. *Hallar la superficie de un triángulo rectángulo* ABC. 216.

Llamaremos AB, a; la perpendicular BC, b, y considerando la porcion AD de la base como una cantidad variable, la llamaremos x; y á la ordenada ó perpendicular correspondiente DE la llamaremos y. Los triángulos semejantes ABC, ADE darán $a : b :: x : y = \frac{bx}{a}$; luego ydx que espresará la diferencial de la area ADE, será en este caso $= \frac{bxdx}{a}$, cuya integral es $\frac{bx^2}{2a}$ (472). Por consiguiente quando $x = a$, y DE se confunde con BC, $\frac{bx^2}{2a} = \frac{ab}{2} = \frac{AB \times BC}{2}$ que será la area del triángulo propuesto, la misma que hallamos en otro lugar (I. 497).

 Cues-

Fig. 570 Cuestion II. *Quadrar la parábola vulgar, cuya equacion es* yy $=$ px.

De la equacion de la curva sacaremos $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; luego ydx será $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$; como la integral de esta última cantidad (472) es $\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx}{\frac{3}{2}dx} + C$ ó $\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$, será esta última espresion el valor de la superficie
213. de la parábola; por manera que si conociéramos la abscisa x, y el parámetro p, conoceríamos el valor del espacio APM, ó del espacio $KPML$ contado desde un punto determinado K, si fuese determinada la constante C; quiero decir, si dicha integral espresára actualmente desde qué punto se cuenta.

Supongamos, pues, que querámos contár los espacios desde el punto A; será en este caso $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$. Para averiguar quál ha de ser el valor de C, á fin de que se verifique esta equacion, hemos de reparar que quando $x = 0$, el espacio APM es tambien cero, en cuyo supuesto la equacion viene á ser $0 = 0 + C$; luego $C = 0$; luego para que la integral esprese los espacios contados desde el punto A, es preciso que la constante C sea cero; quiero decir que entonces no hay que añadir constante alguna, y en general el espacio indeterminado $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$.

Pero si quisiésemos contar los espacios desde el punto K, de modo que siendo b una cantidad conocida fuera $AK = b$; en este supuesto sería $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; pero estos espacios llegan á ser cero quando AP ó $x = b$;

lue-

luego entonces $0 = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + C$, luego $C = -\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, Fig.
y por consiguiente $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$.

Esto acaba de manifestar para qué sirve la constante que se añade á una integral, y que solo las circunstancias de la cuestion pueden determinarla.

Conviene reparar que $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x$; pero $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$; luego $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ ó $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x = \frac{2}{3}xy$; luego ya que $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ es la espresion del espacio APM, será tambien $APM = \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}AP \times PM$, ésto es, los $\frac{2}{3}$ del rectángulo $APMO$, sea la que fuere AP.

Tambien $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b$; pero quando $x = AK = b$, la equacion $yy = px$ dá $yy = pb$; y por consiguiente $y = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, esto es $KL = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; luego $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$ ó $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b = \frac{2}{3}KL \times AK$; luego ya que $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$ es el valor del espacio $KPML$, el mismo espacio será tambien $= \frac{2}{3}AP \times PM - \frac{2}{3}AK \times KL$, esto es $\frac{2}{3}APMO - \frac{2}{3}AKLI$.

571 Cuestion III. *Quadrar las parábolas de todos los géneros, cuya equacion es* $y^{m+n} = a^m x^n$.

De esta equacion sacarémos que $y = \sqrt[m+n]{a^m x^n} = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$; luego $ydx = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} dx$, cuya integral es $\dfrac{a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}+1}}{\frac{n}{m+n}+1} + C$, que se reduce á $\frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}+1} + C$, que es lo mismo que $\frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} \times x + C = \frac{m+n}{m+2n} xy + C$, despues de haber

subs-

Fig. substituido y en lugar de su igual $a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$. Por manera que si queremos contar los espacios *APM* desde el origen *A* de las abscisas x, la integral será cero quando *APM*
217. fuere cero, y por consiguiente quando x es cero, la constante C es cero, y se reduce la integral á $\frac{m+n}{m+2n} xy$. Luego el espacio *APM* es siempre una porcion determinada del producto xy, ó del rectángulo *APMO*; cuya porcion la determina la fraccion $\frac{m+n}{m+2n}$, cuyo valor pende de los valores m y n, esto es del grado de la parábola.

572 Cuestion IV. *Quadrar las hypérbolas de todos los grados, comparadas con sus asýmtotas.*

De la equacion general $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}}$ de estas curvas, sacaremos que $ydx = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}} dx$, cuya integral es $\frac{a^{\frac{m+n}{m}} x^{1-\frac{n}{m}}}{1-\frac{n}{m}} + C$, ó $\frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} x^{1-\frac{n}{m}} + C$,

por medio de cuya espresion se determina facilmente la constante, quando m es mayor que n. Pero quando m es menor que n, sale infinita la constante, si se cuentan los espacios desde el origen de las x, y sale finita contando los espacios desde el otro punto qualquiera. Supongamos, por egemplo, $m = 1$, $n = 2$; en cuyos supuestos la equacion general se transformará en $= a^3 x^{-2}$, y la superficie será $-a^3 x^{-1} + C$, ó $C - \frac{a^3}{x}$. Luego si contamos los espacios desde el origen *A* de las x, será preciso que

C

$C - \frac{a^3}{x}$ sea cero, quando $x = o$; quiero decir que $C - \frac{a^3}{o}$ Fig.
$= o$, y por consiguiente $C = \frac{a^3}{o}$, ó es infinita. Pero si contáramos los espacios desde el punto K, de modo que $CK = b$, tendríamos $C - \frac{a^3}{b} = o$, y $C = \frac{a^3}{b}$.

Para averiguar lo que significa esta espresion hemos de considerar que la curva cuya equacion es $y = a^3x^{-2}$ 218.
ó $y = \frac{a^3}{x^2}$, corre al infinito á lo largo de las asýmtotas CZ, CY; pero se acerca mucho mas á la asýmtota CZ que á la asýmtota CY, conforme se puede inferir de su equacion; por manera que si contamos los espacios desde la asýmtota CY son infinitos, porque el espacio comprehendido entre dicha asýmtota y el ramo infinito BS, es infinito. Este es el motivo de no poderse apreciar los espacios $CPMS$ contados desde la asýmtota CY. Al contrario los espacios comprehendidos entre el ramo BM, y la asýmtota CZ hasta el infinito, tienen un valor finito, porque á muy corto trecho, el ramo se acerca con mucha rapidez á su asýmtota; de modo que la espresion del espacio infinitamente largo $KLMOZ$ es $\frac{a^3}{b}$, y $PMOZ = \frac{a^3}{x}$, y por consiguiente $KLMP = \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{x}$. De donde se infiere que aunque no se puedan valuar los espacios contándolos desde CY, se pueden valuar los espacios $KLMP$ contados desde un punto K tan arrimado quanto se quisiere á CY.

573 Ahora declararemos la mudanza que resulta en los logaritmos hyperbólicos de no ser recto el ángulo que forman las asýmtotas, ó qual es el verdadero valor del quadrilátero $AGFf$, por egemplo, quando no fuese equi- 218.
lá-

Fig. 218. látera la hypérbola LBO, porque será facil aplicar lo que de este digéremos á otro qualquiera trapecio hyperbólico.

Para esto supondremos primero que sea equilátera la espresada hypérbola, y que $(CG)^2 = aa$, siendo $CG = a$. Hemos probado (481) que si fuese $CF = x$ será el quadrilátero $AGFf$ el logaritmo hyperbólico de la abscisa CF; por consiguiente, si suponemos $CG = 1$, y $GF = x$, probaríamos por el mismo camino que el quadrilátero $AGFf$ sería el logaritmo hyperbólico de la abscisa $CF = 1 + x$, ó del número CF mayor que la unidad.

Veamos ahora qual es la espresion del logaritmo de $CF = 1 + x$ en el supuesto de ser $CG = a$, y $(CG)^2 = aa =$ la potencia de la hypérbola, cuya investigacion se reduce á hallar en estos supuestos el valor del quadrilátero $AGFf$. Por lo dicho (171) sabemos que $(CG)^2 = CF \times Ff$, ó que $aa = (a + x) \times Ff$; luego $Ff = \frac{aa}{a+x}$, cuya cantidad multiplicada por dx ha de ser (566) el elemento del espresado quadrilátero; por manera que $S. \frac{aadx}{a+x} = AGFf$. Para hallar esta integral reduciremos á serie la cantidad $\frac{dx}{a+x}$, y saldrá $\frac{dx}{a} - \frac{xdx}{aa} + \frac{xxdx}{a^3} - \frac{x^3dx}{a^4}$ &c. Será, pues, $S. \frac{aadx}{a+x} = aa\,S\left(\frac{dx}{a} - \frac{xdx}{aa} + \frac{xxdx}{a^3} - \frac{x^3dx}{a^4} + \&c.\right) = aa\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2aa}xx + \frac{1}{3a^3}x^3 - \frac{1}{4a^4}x^4 + \&c.\right) = aaL\left(1 + \frac{x}{a}\right) = aaL\left(\frac{a+x}{a}\right)$ (II. 352). Luego si llamamos CF, z, será $AGFf = aaL\frac{z}{a}$. Si el ángulo que forman las asýmtotas no fuese recto, y le llamáramos φ, se habria (567) de multiplicar su espresion por sen φ para hallar su valor ca-

cabal, y sería aa sen $\varphi \frac{z}{a}$ el verdadero valor de $aaL\frac{z}{a}$ en el caso actual. Fig.

574 Pero si fuese equilátera la hypérbola, y $a = 1$ sería $AGFf = Lz$, como ha de ser (481), y lo mismo que allí sacamos.

Si formáran las asýmtotas un ángulo de $25° 44' 25''$, el quadrilátero $AGFf$ sería el logaritmo tabular de la abscisa CF; porque si multiplicamos el logaritmo natural Lz de dicha abscisa por el módulo 0,43429448 &c.(II. 354) que llamaremos A, es preciso que aa sen $\varphi\, L\frac{z}{a} = ALz$, cuya equacion solo puede verificarse quando $a = 1$, y entonces sale sen $\varphi = A = 0,43429448$ &c. que en las tablas de los senos naturales corresponde á $25° 44' 25''$. Por consiguiente los logaritmos tabulares representan las areas asymtóticas de una hypérbola cuya potencia es 1, y cuyas asýmtotas forman un ángulo de $25° 44' 25''$.

Si hubiéramos de determinar un espacio hyperbólico $AGPM$ que tuviera con el espacio $AGFf$ la misma razon que p con q; llamaríamos CF, z; CP, u; y sería aa sen $\varphi L\frac{z}{a} : aa$ sen $\varphi\, L\frac{u}{a} :: p : q :: L\frac{z}{a} : L\frac{u}{a}$; luego $qL\frac{z}{a} = pL\frac{u}{a}$, ó $L(\frac{u}{a})^p = L(\frac{z}{a})^q$, de cuya equacion se sacará $(\frac{u}{a})^p = (\frac{z}{a})^q$; $\frac{u}{a} = (\frac{z}{a})^{\frac{q}{p}}$, $\frac{u}{a} = \frac{z^{\frac{q}{p}}}{a^{\frac{q}{p}}}$, y $u = z^{\frac{q}{p}} a^{-\frac{q}{p}+1} = z^{\frac{q}{p}} a^{\frac{p-q}{p}} = \sqrt[p]{(z^q a^{p-q})}$.

575 Cuestion V. *Quadrar el sector de círculo* ACB.

Lla-

Fig. Llamemos a el radio $AC = BC$; al arco AB, con-
219. siderándole como variable, le llamaremos x, y será el arco BM, infinitamente pequeño, dx. Será, pues, el triángulo CBM el elemento de la area que buscamos, y su espresion será $\frac{adx}{2}$; por consiguiente la area total será $S.\frac{adx}{2} = \frac{ax}{2} = AC \times \frac{1}{2}AB$. De donde se infiere que la area de qualquiera círculo es igual al producto de la mitad de su circunferencia por la mitad del diámetro.

220. 576 Cuestion VI. *Quadrar el semicírculo* AEH.

Llamaremos el diámetro AH, a; AB, x; BR, y; la propiedad del círculo dará $(BR)^2 = AB \times BH$ ó $yy = ax - xx$, é $y = \sqrt{(ax - xx)}$, cuyo valor substituido en ydx dará $dx\sqrt{(ax - xx)} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx \times (1 - \frac{x}{a})^{\frac{1}{2}}$. Si reducimos á serie (II. 107) el radical que lleva esta espresion, será $ydx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx\,(1 - \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} - \frac{x^3}{16a^3} - \frac{5x^4}{128a^4}$ &c $) = a^{\frac{1}{2}}\,(x^{\frac{1}{2}}\,dx - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2a} - \frac{x^{\frac{5}{2}}\,dx}{8a^2} - \frac{x^{\frac{7}{2}}\,dx}{16a^3}$ &c). Sacando la integral de cada término separadamente será $S.\,ydx = a^{\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5a} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{28a^2} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{72a^3} - \frac{5x^{\frac{11}{2}}}{704a^4}\ \&c.\right)$$

$= x\sqrt{ax} \times (\frac{2}{3} - \frac{x}{5a} - \frac{x^2}{28a^2} - \frac{x^3}{72a^3} - \frac{5x^4}{704a^4}$ &c.$)$ = la area ABR.

Quando $x = \frac{1}{2}a$, la ordenada no se distingue del radio OE; en cuyo caso la area será $= \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}aa}\,(\frac{2}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{112} - \frac{1}{576} - \frac{5}{11264}$ &c.$) = \frac{a^2\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$ (0,6666 — 0,1

$-0{,}0089 - 0{,}0017 - 0{,}0004$ &c) $= 0{,}1964a^2$ Fig.
cuyo valor multiplicado por 2 dará $0{,}3928a^2$, que será con muy corta diferencia el valor de la area del semicírculo AEH.

Como la serie que hemos sacado para quadrar el quadrante AOE converge muy lentamente, y sería menester tomar muchos de sus términos para sacar un resultado muy aproximado, buscaremos por otro camino la quadratura que pide la cuestion. Quadraremos una porcion como ABR del quadrante propuesto, suponiendo x muy pequeña en comparacion de a, y sacaremos una serie tan convergente que con pocos de sus términos lograremos el intento.

Con esta mira recordaremos, que si el arco AR fuese $= \frac{1}{3}AE$, ó de 30°, su seno BR será $= \frac{1}{2}AO$(I. 642); y por consiguiente AB ó $x = AO - OB = AO - \sqrt{[(OR)^2 - (BR)^2]} = 0{,}133974 6$ con muy corta diferencia, suponiendo para mayor facilidad el radio $AO = 1$. Substituyendo el valor de a en la serie $\sqrt{ax^3}(\frac{2}{3} - \frac{x}{5a} - \frac{x^2}{28a^2}$ &c.) se transformará en $(0{,}0693505) \times (0{,}6666666 - 0{,}0133975 - 0{,}0001603 - 0{,}0000042 -$ &c) $= 0{,}0693505 \times 0{,}6531046 = 0{,}0452931 =$ á la area ABR, que sumada con la area $OBR = OB \times \frac{1}{2}BR = \sqrt{\frac{3}{4}} \times \frac{1}{4} = 0{,}2165063$, dá $0{,}2617994$, que será el valor del sector AOR, cuyo triplo $= 0{,}7853982$, por ser $AR = \frac{1}{3}AE$, será el valor de la area de todo el quadrante AOE.

El mismo resultado sacaremos buscando primero el

va-

Fig. valor del espacio comprehendido entre el radio OE, y la ordenada BR, y mirando como variable el coseno OB en lugar del seno verso AB.

Sea, pues, $OB = x$, y $OR = OA = b$; será $BR = \sqrt{[(OR)^2 - (OB)^2]}$, ó $y = (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$, y por consiguiente la diferencial de la area $OBRE$ será $= dx(bb - xx)^{\frac{1}{2}} = bdx - \frac{x^2dx}{2b} - \frac{x^4dx}{8b^3} - \frac{x^6dx}{16b^5} - \frac{5x^8dx}{128b^7} - \frac{7x^{10}dx}{256b^9}$ &c. Luego la area será $= bx - \frac{x^3}{6b} - \frac{x^5}{40b^3} - \frac{x^7}{112b^5} - \frac{5x^9}{1152b^7} - \frac{7x^{11}}{2816b^9}$ &c.

Si hiciéramos $x = OB = \frac{1}{2}AO$, en cuyo supuesto sería $ER = \frac{1}{3}AE$, y substituyéramos la unidad en lugar de $b = AO$, sería

$$x^3 = x \times x^2 = ,5 \times \frac{1}{4} = \frac{,5}{4} = 0,125$$
$$x^5 = x^3 \times x^2 = \frac{,125}{4} = 0,03125$$
$$x^7 = x^5 \times x^2 = \frac{,03125}{4} = 0,0078125$$
$$x^9 = x^7 \times x^2 = \frac{x^7}{4} = 0,0019531 +$$
$$x^{11} = x^9 \times x^2 = \frac{x^9}{4} = 0,0004883 -$$

Dividiendo estas potencias de x respectivamente por 6, 40, 112, 1152, 2816 &c, sacaremos 0,5000000 — 0,0208333 — 0,0007812 — 0,0000698 — 0,0000085 — 0,0000012 — 0,0000002 &c. = 0,4783057 que espresará la area $OBRE$ en el supuesto de ser $OB = \frac{1}{2}OA$; de la qual restando el triángulo $OBR = \sqrt{\frac{3}{4}} \times \frac{1}{4} = 0,2165063$, el residuo, 2617994 será la area del sector EOR, cuyo triplo por ser $ER = \frac{1}{3}AE$, será el valor de la area del quadrante entero $= 0,7853982$ como antes.

Cues-

577 Cuestion VII. *Quadrar la elipse.* Fig.

Sea la elipse que hemos de quadrar AEB; su ege mayor $AB = a$, su conjugado $CE = b$; de la propiedad de esta curva sacaremos $DR = y = \frac{b}{a} \sqrt{(ax - xx)}$, y por consiguiente $ydx = \frac{b}{a} dx \sqrt{(ax - xx)}$ que será el elemento de la area ARD, en el supuesto de ser $AD = x$. Pero por lo que acabamos de hallar (576) $dx\sqrt{(ax - xx)}$ es el elemento del segmento correspondiente ADn del círculo AGB trazado sobre el ege mayor de la elipse dada, como diámetro; de cuyo elemento hallamos allí mismo la integral; y si representamos por A dicha integral, la de $\frac{b}{a} dx \sqrt{(ax - xx)}$, será $\frac{b}{a} \times A$. Será, pues, $\frac{b}{a} \times A$ el valor del espacio ARD. De donde inferiremos que la area de un segmento elíptico es á la area del segmento correspondiente del círculo circunscripto á la elipse, como el ege menor de la elipse es al mayor; y que por consiguiente toda la elipse es á todo el círculo en la misma razon. 221.

578 Cuestion VIII. *Quadrar la area hyperbólica* ABD, *y el sector hyperbólico* CAD; *suponiendo que sea* C *el centro, y* A *el vértice principal de la curva.* 222.

Llamemos el semiege CA, a; su semiconjugado, b; CB, x; de la propiedad de la curva sacaremos $BD = y = \frac{b}{a} \sqrt{(xx - aa)}$; y por consiguiente $ydx = \frac{bdx}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$, que será la espresion del elemento de la area ABD.

Para hallar la diferencial del sector CAD, reparare-

Fig. mos que dicho sector $CAD = CBD - ABD = \frac{xy}{2} - S.ydx$, de cuya cantidad la diferencial es $\frac{xdy+ydx}{2} - ydx = \frac{xdy-ydx}{2}$. Si en esta última espresion substituimos en lugar de y y dy sus valores respectivos $\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$, $\frac{bxdx}{a\sqrt{(xx-aa)}}$, se reducirá finalmente á $\frac{ab}{2}\times\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$, cuya integral es (545) $\frac{ab}{2}\times L\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C$. Para hallar el valor de la constante C, haremos $a=x$, de cuyo supuesto sacaremos que $C = -\frac{ab}{2}\times La$. Luego la integral completa de $\frac{ab}{2}\times\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}} = \frac{ab}{2}\times L.\left(x+\sqrt{(x^2-a^2)}\right) - \frac{ab}{2}La = \frac{ab}{2}\times L\left(\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}\right)$ = al sector ADC. Si restamos el sector de $\frac{bx\sqrt{(x^2-a^2)}}{2a} = \frac{BC\times BD}{2}$ = al triángulo CBD, será el residuo $\frac{bx\sqrt{(x^2-a^2)}}{2a} - \frac{ab}{2}\times L\left(\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}\right)$ el valor del espacio hyperbólico ABD.

579 Cuestion IX. *Quadrar la cisoide de Diocles, ó hallar el valor del espacio cisoidal* APM.

Llamaremos AB, a; AP, x; PM, y, y será $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ la
223. equacion de la curva, é $y = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(a-x)}}$. Luego $ydx = \frac{dx\sqrt{x^3}}{\sqrt{(a-x)}}$,
y multiplicando arriba y abajo por $\sqrt{x}$, será $ydx = \frac{dx\sqrt{x^4}}{\sqrt{(ax-xx)}} = \frac{x^2dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, que será la diferencial del espacio APM. Si la integramos de modo que sea nula quando $x=0$, será la integral el valor cabal del espresado espacio. Para integrar $\frac{x^2dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$, la daremos esta forma $-2 \times \frac{-x^2dx}{2\sqrt{(ax-xx)}}$; y dejando á un lado por ahora el factor -2, con el qual contaremos á su tiempo, transformo $\frac{-x^2dx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ en otra cantidad de igual valor que ella, añadiéndole, y quitándole á un tiempo la cantidad $\frac{dx\sqrt{(ax-xx)}}{2}$, de

de modo que $\frac{-x^2 dx}{2\sqrt{(ax-xx)}} = \frac{-x^2 dx}{2\sqrt{(ax-xx)}} + \frac{dx\sqrt{(ax-xx)}}{2} - \frac{dx\sqrt{(ax-xx)}}{2}$. Sumando el primero y segundo término del segundo miembro, sacaremos $\frac{-x^2 dx}{2\sqrt{(ax-xx)}} = \frac{-dx\sqrt{(ax-xx)}}{2} + \frac{(ax-2xx)dx}{2\sqrt{(ax-xx)}} = \frac{-3}{2} dx\sqrt{(ax-xx)} + dx \times \sqrt{(ax-xx)} + \frac{(ax-2xx)dx}{2\sqrt{(ax-xx)}}$, porque $-1 = \frac{-3}{2} + 1$. Fig.

Luego $S. \frac{-x^2 dx}{2\sqrt{(ax-xx)}} = S.\left[-\frac{3}{2}dx \times \sqrt{(ax-xx)} + dx\sqrt{(ax-xx)} + \frac{(ax-2xx)dx}{2\sqrt{(ax-xx)}}\right]$, y como los dos últimos términos del segundo miembro son la diferencial de $x\sqrt{(ax-xx)}$, se sigue que $S. \frac{-x^2 dx}{2\sqrt{(ax-xx)}} = x\sqrt{(ax-xx)} - \frac{3}{2} S.dx\sqrt{(ax-xx)}$. Ahora servirá el multiplicador -2 que arrinconamos al principio de la operacion, para multiplicar los dos miembros de la última equacion, y sacaremos $S. \frac{x^2 dx}{\sqrt{(ax-xx)}} = 3\ S.\ dx\sqrt{(ax-xx)} - 2x\sqrt{(ax-xx)}$.

Si prolongamos la ordenada *PM* hasta que encuentre en *N* el círculo, es evidente que $S.dx\sqrt{(ax-xx)}$ será el valor del segmento circular *APN*, que es cero quando $x = 0$, y que $x\sqrt{(ax-xx)}$ es el rectángulo *AP* × *PN*. Luego la area cisoidal *APM* es igual á la diferencia que vá del triplo del semisegmento *APN* al duplo del rectángulo *AP* × *PN*, ó al triplo del semisegmento *APN* menos dos veces el rectángulo *AP* × *PN*.

Si fuere $x = a$, el semisegmento *APN* será igual al semicírculo, y el rectángulo *AP* × *PN* $= 0$. Luego el espacio cisoidal asymtótico *AMFB* es triplo del semicírculo generador.

580 Cuestion X. *Quadrar la conchoide de Nicomedes* AR, *ó hallar el espacio conchoidal* CARS, *siendo la* 224.

Fig. *equacion de la curva* $x^2y^2 = (a + y)^2 \times (b^2 - y^2)$, *en el supuesto de ser* $BC = a$, $RV = AC = b$, $CS = x$, *y* $SR = y$.

De la equacion de la curva sacaremos $x = \frac{a\sqrt{(b^2 - y^2)}}{y} + \frac{y\sqrt{(b^2 - y^2)}}{y} = \frac{a\sqrt{(b^2 - y^2)}}{y} + \sqrt{(b^2 - y^2)}$. Con la mira de reducir esta espresion á una forma mas sencilla, haremos $SV = \sqrt{(b^2 - y^2)} = z$, y será $zz = b^2 - y^2$, $y = \sqrt{b^2 - zz}$; substituyendo en el valor de x que sacamos antes, resultará $x = \frac{az}{\sqrt{(b^2 - z^2)}} + z$; y $dx =$

$$\frac{adz\surd(b^2 - z^2dz + \frac{zdz \times az}{\sqrt{(b^2 - z^2)}}}{b^2 - z^2} + dz = \frac{adz(b^2 - z^2) + az^2dz}{(b^2 - z^2)\sqrt{(b^2 - z^2)}} + dz$$

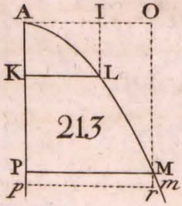
$= \frac{ab^2z}{(b^2 - z^2)\sqrt{(b^2 - z^2)}} + dz$; y por consiguiente $ydx = (b^2 - z^2) \times \left(\frac{ab^2dz}{(b^2 - z^2)\sqrt{(b^2 - z^2)}} + dz\right) = \frac{ab^2dz}{b^2 - z^2} + dz\sqrt{(b^2 - z^2)}$.

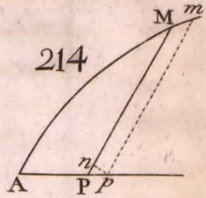
Para integrar esta diferencial, desde el punto C como centro, y con el radio $CA = b$, trazaremos el quadrante de círculo AED, y prolongaremos RH hasta que encuentre en E su periferia; tiraremos tambien EF paralela á AC, y la linea CE. Esto supuesto, es evidente por ser $CE = CA = VR$, y $EF = RS$, que tambien $CF = VS = z$, y por lo mismo $EF = \sqrt{\left[(CE)^2 - (CF)^2\right]} = \sqrt{(b^2 - z^2)}$, y el segundo término $dz\sqrt{(b^2 - z^2)}$ de la diferencial que deseamos integrar, espresará el elemento de la area $AEFC$. Si al valor de esta area se le añade $S. \frac{ab^2dz}{b^2 - z^2} = L\frac{b+z}{b-z} \times \frac{1}{2}ab$ (545), la suma será el valor de la area $ARCS$.

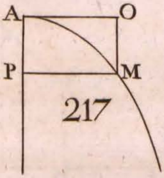
225. 581 Cuestion XI. *Quadrar la logarítmica* RD, *ó valuar la area logarítmica* ABDR.

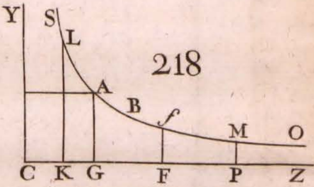
Llamaremos AB, x; BD, y; AR, b; y la subtangen-

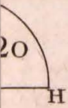

A
P
M
p
m
r
C
212

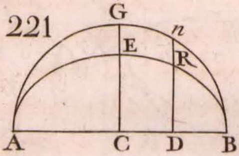

A I O
K L
213
P M
p r m

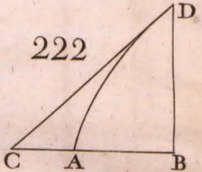

M m
214
n
A P p

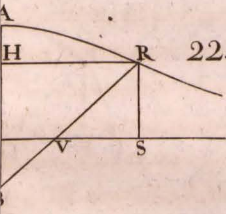

A O
P M
217

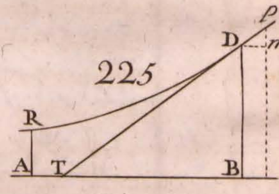

Y S
L
218
A
B
f
M O
C K G F P Z

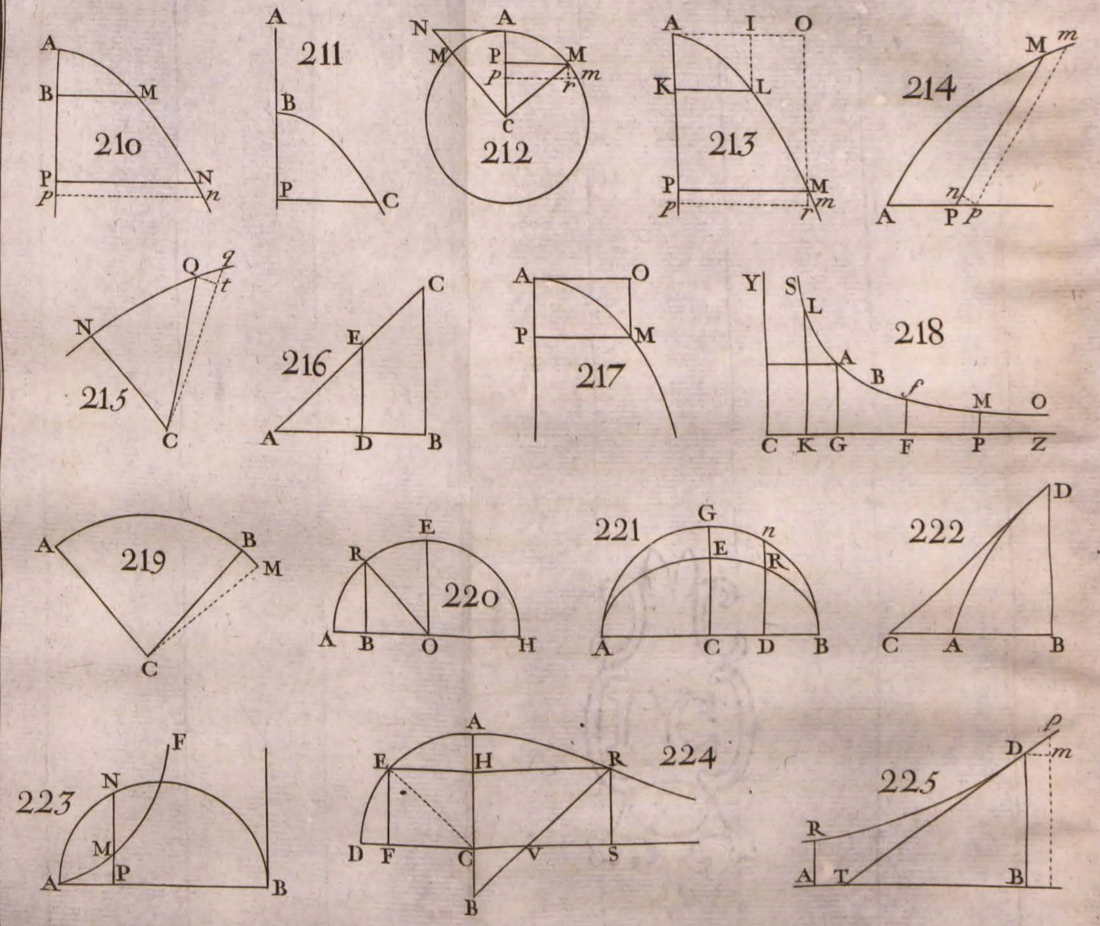

20
H


221
G
n
E
R
A C D B


D
222
C A B


A
H R
224
V S


ρ
D m
225
R
A T B


210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225

gente BT, a. Los triángulos semejantes Dmp, DBT darán Fig.
$ady = ydx$; luego el espacio que buscamos $= S.ydx$ $= S.ady = ay$; y como en el supuesto de $x = 0$, será $y = b$, y ay será $= ab$, resulta que la area $ABDR$ será $= ay - ab$.

582 Cuestion XII. *Quadrar la espiral de Arquimedes* BED, *ó hallar, por egemplo, el valor del espacio espiral* BEDB. 226.

Si llamamos el radio AB, r; el arco AC, u; BD, y; y c la circunferencia entera del círculo cuyo radio $= r$, tendremos (366) $c : u :: r : y$, y $cy = ru$, de donde sacaremos diferenciando, $du = \frac{cdy}{r}$. Es evidente que Cc será $= du$, y $DR = dx$, y que los triángulos semejantes BCc, BDR darán $r : du :: y : dx$, de donde sacaremos $du = \frac{rdx}{y}$; comparando los dos valores hallados de du sacaremos $dx = \frac{cydy}{rr}$; cuyo valor substituido en la fórmula general de la quadratura (568) $\frac{1}{2}ydx$ será $\frac{cyydy}{2rr}$ el elemento de la area que buscamos, cuya integral es $\frac{cy^3}{6rr}$ $=$ al espacio $BDEB$.

583 Cuestion XIII. *Quadrar la espiral hyperbólica* CODM, *ó hallar el valor del espacio* COMC. 227.

Llamaremos el radio CA, a; el arco AN, x; la ordenada CM, y; será $Nn = -dx$, porque quando crece CM, mengua AN. De los triángulos semejantes CNn, CMr sacaremos $a : -dx :: y : Mr = \frac{-ydx}{a}$; luego $COMC =$ $\frac{1}{2}S.\frac{-yydx}{a}$. Pero siendo $xy = ab$ por la naturaleza de la curva (368), será $x = \frac{ab}{y} = aby^{-1}$; luego $dx =$ —

Fig. $-y^{-2}ab$; substituyendo en $\frac{-yydx}{a}$ en lugar de dx su valor $-y^{-2}ab$, sacaremos $-\frac{yydx}{a} = bdy$, y el espacio comprehendido entre la curva y la ordenada CM será $= \frac{1}{2}by$ igual al sector circular CMQ.

228. 584 Cuestion XIV. *Quadrar la cycloide* AD, *ó hallar el valor del espacio cycloidal* ABDA.

Llamaremos AB, x; BD, y; AE, $2r$; FC, u; el arco AC, t. Esto supuesto, la propiedad del círculo dará $2ry - yy = uu$, $du = \frac{rdy - ydy}{u}$. Si tiramos las fg, bg infinitamente próximas, y respectivamente paralelas á las FD, BD, será $eg = dy = Cm$, $Cc = dt$, y de los triángulos semejantes COF, Ccm, inferiremos $CF : CO :: Cm : Cc$ ó $u : r :: dy : dt = \frac{rdy}{u}$. Ahora bien, la propiedad de la cycloide dá $x = u + t$, y $dx = dt + du = \frac{rdy}{u} + \frac{rdy - ydy}{u} = \frac{2rdy - ydy}{\sqrt{(2ry - yy)}}$. Luego $ydx = \frac{2ry - yy}{\sqrt{(2ry - yy)}} \times dy = dy\sqrt{(2ry - yy)}$, y como esta diferencial es el elemento del segmento circular AFC, será tambien la area $ABDA$ igual al espresado segmento.

Si quisiéramos valuar el espacio cycloidal $ADCA$, del rectángulo $ABDF$ restaríamos el espacio $ABDA$, y del residuo $ADFA$ restaríamos el segmento AFC.

De la Rectificacion de las curvas.

585 Rectificar una linea curva es determinar quanto coge de largo, ó hallar una linea recta que sea igual á dicha curva. Para conseguirlo se considera la curva AM

229. como un polýgono de una infinidad de lados, y podemos

con-

considerar el pequeño lado Mm, como la diferencial del arco AM, porque $AM = Am - AM = d(AM)$. Fig. 229.
Despues tiraremos Mr paralela á AP, y será $Mm = \surd[(Mr)^2 + (rm)^2] = \surd(dx^2 + dy^2)$, y la integral de esta cantidad será el valor del arco AM. Para hallar dicha integral, diferenciaremos la equacion de la curva, y despues de hallado por su medio el valor de dx en y y dy, ó el de dy en x y dx, se substituirá en $\surd(dx^2 + dy^2)$ en cuya espresion no habrá mas que x y dx^2, ó y y dy^2; se pasará dx^2 ó dy^2 fuera del radical (II.62), é integraremos. Luego $S.\ \surd(dx^2 + dy^2)$ es la fórmula general para la rectificacion de las curvas, y sirve igualmente para las que tienen paralelas sus ordenadas, y para las demás cuyas ordenadas ván todas á parar á un centro comun.

586 Pero si las ordenadas $BC = y$ no formasen con 230.
las abscisas $AB = x$ un ángulo recto, será algo diferente la fórmula. Porque si tiramos IE paralela é infinitamente próxima á BC, y CV paralela á BI, será $BI = CV = dx$, $VE = dy$. Tiremos desde el punto C la CF perpendicular á IE, y llamemos φ el ángulo constante CVF. Si tomamos CV por el radio r del círculo cuyo centro esté en V, será CF el seno, y FV el coseno del ángulo CVF. Luego tendremos $r : \cos\varphi :: CV : VF$, ó $r : \cos\varphi :: dx : VF = \frac{\cos\varphi}{r} dx$.
Sentado esto, $(CE)^2 = (CF)^2 + (FE)^2 = (CF)^2 + (FV + VE)^2 = (CF)^2 + (FV)^2 + 2FV \times VE + (VE)^2 = (CV)^2 + (VE)^2 \pm 2EV \times VF$, despues de substitui-

Fig. do en el último miembro de la penúltima equacion en lugar de $(CF)^2$ su valor $(CV)^2 - (VF)^2$ sacado del triángulo rectángulo CFV. Será $+ 2EV \times VF$ quando el ángulo CVE fuese obtuso, y será $-2EV \times VF$ si dicho ángulo fuese agudo. Substituyendo en lugar de las lineas sus espresiones literales, sacaremos para la rectificacion de las curvas que abraza el supuesto en que caminamos, $\sqrt{(dx^2 + dy^2 \pm \frac{2 \cos \varphi}{r} dxdy)}$, cuyo último término será positivo quando el ángulo CVE fuere obtuso, y será negativo quando fuere agudo el espresado ángulo.

231. 587 Cuestion I. *Rectificar la parábola vulgar, cuya equacion es* $2ax = yy$.

La diferencial de esta equacion es $adx = ydy$, que dá $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{a^2}$; substituyendo este valor en lugar de dx^2 en la fórmula $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, sacaremos $\frac{dy}{a}\sqrt{(yy + aa)} = ds$, llamando s el arco de la curva que hemos de rectificar. Luego $dy\sqrt{(yy + aa)} = ads$, y $S.ads = as = S.dy\sqrt{(yy + aa)}$, cuya equacion nos está diciendo que la rectificacion de la parábola pende de la quadratura de la hypérbola.

Supongamos que la parábola propuesta sea NAM, en cuyo vértice sea tangente la AQ; si llamamos AP, y, será $as = S.dy\sqrt{(y^2 + a^2)}$. Tiremos á la AP la perpendicular $AA' = a$, y tracemos una hypérbola equilátera $N'A'P'$, cuyo centro esté en A, y el vértice en A'. Desde el punto P tirémosle á la parábola la ordenada PM, prolongándola hasta que encuentre la hypérbola en P'; será $AA'P'P$

=

$= S.dy\sqrt{(y^2+a^2)}$; luego $as = AA'P'P$; por consiguiente el arco AM de la parábola será igual al espacio hyperbólico $AA'P'P$ dividido por la mitad del parámetro. Fig.

588 Cuestion II. *Rectificar la segunda parábola cúbica, cuya equacion es* $y^3 = ax^2$.

De la equacion de la curva inferiremos que $x^2 = \frac{y^3}{a}$, y $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$; luego $dx = \frac{\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy}{a^{\frac{1}{2}}}$; y $dx^2 = \frac{9}{4}\frac{ydy^2}{a}$; por consiguiente $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{(dy^2+\frac{9}{4a}ydy^2)} = dy\sqrt{(1+\frac{9y}{4a})}$ (II. 62). Esta cantidad es facil de integrar por lo dicho (509) por ser el esponente de y fuera del binomio una unidad menor que en el binomio; porque no habiendo y fuera del radical es lo mismo que si hubiera y^0. Será, pues, $S.dy\sqrt{(1+\frac{9y}{4a})}$, ó $S.dy(1+\frac{9y}{4a})^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{dy(1+\frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9dy}{4a}} + C = \frac{8a}{27}\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Para determinar la constante C, hemos de considerar que si queremos contar los arcos AM desde el punto A origen de las y, será preciso que la integral ó el valor del arco AM sea cero quando fuere $y = 0$. Pero en este supuesto la integral queda reducida á $\frac{8a}{27}(1)^{\frac{3}{2}} + C$, ó $\frac{8a}{27} + C$; luego la longitud de un arco qualquiera AM cuyo origen esté en A, será $\frac{8a}{27}(1+\frac{9y}{4a})^{\frac{3}{2}} - \frac{8a}{27}$. 229.

589 Cuestion III. *Rectificar el círculo.* 232.

Buscaremos primero la longitud de un arco de círculo AM por medio de su seno verso AP.

Su-

Fig. Supondremos para el intento el arco *Mm* infinitamente pequeño; si tiramos *pm* paralela á *PM*, y *Mr* paralela á *AP*, y el radio *CM*, resultarán dos triángulos semejantes *CPM*, *Mrm*, que darán $PM : CM :: Mr : Mm$. Si llamamos *AP*, x; el diámetro *AB*, a ó 1 para calcular con mas facilidad, tendremos $Mr = dx$; $CM = \frac{1}{2}$, y $PM = \sqrt{(x - xx)}$. Luego $\sqrt{(x - xx)} : \frac{1}{2} :: dx : Mm$; luego $Mm = \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(x - xx)}}$, y por consiguiente $AM = S.\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(x - xx)}}$. Como esta cantidad no se puede integrar sin transformarla en serie, lo egecutaremos; pero primero la daremos esta forma $S.\frac{\frac{1}{2}dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1 - x)}} = S.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$ (II. 91). Y como $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$ transformada en serie $= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \&c$ (II. 101); será $S.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = S.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx\,(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \&c.) = S.(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}dx + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}dx + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}}dx + \&c) = \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{3}{16}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{\frac{5}{32}x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + \&c. = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \&c.$ á cuya integral no hay que añadir constante alguna, porque quando $x = 0$, tambien será cero la integral, y así debe ser, pues entonces es nulo el arco *AM* que representa.

Por razon del multiplicador comun $x^{\frac{1}{2}}$, se la puede dar á la serie que espresa el arco *AM*, la forma siguiente $x^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \&c)$. Si consideramos que el seno verso x, es siempre menor que el diámetro 1, ex-

excepto quando el arco es igual á la semicircunferencia, Fig.
x será siempre un quebrado; por consiguiente los valores de los términos de la serie irán menguando tanto mas, quanto menor fuese el seno verso del arco cuya longitud se buscáre. Así, si quisiéramos averiguar quanto coge un arco, cuyo seno verso es la centésima parte del diámetro, sería $x = \frac{1}{100} = 0,01$, y por tanto $x^{\frac{1}{2}} = 0,1$, sería, pues, el valor de dicho arco $= 0,1 \times \left(1 + \frac{0,01}{6} + \frac{3(0,01)^2}{40} + \frac{5(0.01)^3}{112}\right)$, y como el término siguiente de esta serie sería por lo menos cien veces menor que el último que vá puesto, por ser cada uno mas de cien veces menor que su antecedente inmediato, considerando el valor de $\frac{5}{112}(0,01)^3$, y tomando su centésima parte, podremos formar juicio de lo mucho que nos acercaremos al verdadero valor del espresado arco con calcular no mas que los quatro primeros términos de la serie. Pero $\frac{5}{112}(0,01)^3$ es lo propio que $\frac{5}{112}(0,000001) = \frac{0,000005}{112} = 0,0000000446$, cuya centésima parte es $0,000000000446$; por consiguiente podemos valuar con seguridad cada término de la serie hasta diez decimales, sin temor de que el valor que resultare del arco, discrepe de una unidad en la novena decimal. Luego será $\frac{5}{112}(0,01)^3 = 0,0000000446$; $\frac{3}{40}(0,01)^2 = 0,0000075000$; $\frac{0,01}{6} = 0,0016666666$; por consiguiente el total de la serie será $0,1(1,0016742112)$, ó finalmente $0,100167421$, ciñéndonos á nueve decimales.

Este es el valor del arco, cuyo seno verso fuese la cen-

Fig. centésima parte del diámetro. Luego si supiéramos el número de veces que los grados que coge dicho arco, caben en 360°, con multiplicar la longitud del arco por dicho número de veces sacaríamos su longitud aproximada. Pero esto es cabalmente lo que no sabemos.

Como sabemos (I. 642) que el seno de 30° es la mitad del radio, y que en conociendo el seno de un arco es facil hallar su seno verso (I. 641), podríamos calcular el seno verso de 30°, y substituirle en lugar de x en la serie hallada, y multiplicando el resultado por 12 que espresa quantas veces 30° caben en 360°, sacaríamos por aproximacion lo que coge de largo la circunferencia. Pero convergeria muy poco la serie, y sería preciso calcular muchos de sus términos para sacar un valor bastante aproximado de la circunferencia. Por lo mismo enseñaremos otro camino por donde llegaremos mas pronto al término que deseamos.

590 Hemos visto que si llamamos x la tangente de un arco, y a el radio, será $\frac{aadx}{aa+xx}$ el elemento de dicho arco, cuyo valor será $S.\frac{aadx}{aa+xx}$. Como no se puede integrar cabalmente esta diferencial, es preciso acudir á la aproximacion, para cuyo fin la daremos esta forma: $S.aadx(aa+xx)^{-1}$, y como (I. 101) $(aa+xx)^{-1}=a^{-2}(1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}-\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}-$ &c.), será $S.aadx\,(aa+xx)^{-1}$ $=S.(dx-\frac{x^2dx}{aa}+\frac{x^4dx}{a^4}-\frac{x^6dx}{a^6}+\frac{x^8dx}{a^8}-$ &c.) $=x$ $-\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^5}{5a^4}-\frac{x^7}{7a^6}+\frac{x^9}{9a^8}-$ &c.) $=x(1-\frac{x^2}{3a^2}+\frac{x^4}{5a^4}-\frac{x^6}{7a^6}+\frac{x^8}{9a^8}-$ &c).

Ya no nos falta sino saber si hay algun arco que que-

pa

pa un número determinado de veces en la circunferencia, y tenga una tangente conocida. Concurre esta circunstancia en el arco de 45° que cabe 8 veces en la circunferencia, y tiene su tangente $= 1$ (I. 643). Luego haremos $x = a$, y la longitud de un arco de 45° será la que espresa esta serie $a(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c)$. Pero como los términos de esta serie menguan con suma lentitud, hemos de ver si se puede resolver el arco de 45° en otros dos, cuyas tangentes sean conocidas. No le hace el que no sepamos quantos grados coge cada uno de estos arcos, con tal que formen juntos 45°: quando hubiésemos calculado sus longitudes por medio de sus tangentes, las sumaremos una con otra, y sacaremos la del arco de 45°. Como cada uno de estos arcos ha de valer menos de 45°, sus tangentes serán menores que el radio, y será por lo mismo la serie mas convergente, y menos trabajosa de calcular. Fig.

Para hallar estos dos arcos, recurriremos á lo que dejamos dicho (I. 408). Con efecto, ya sabemos que $\tang (a + b) = \frac{\tang a + \tang b}{1 - \tang a \tang b}$, siendo a y b dos arcos qualesquiera, y suponiendo que el radio $= 1$. Luego si suponemos $a + b = 45^\circ$, en cuyo caso será $\tang (a + b) = 1$, sacaremos $\frac{\tang a + \tang b}{1 - \tang a \tang b} = 1$, y resolviendo esta equacion por las reglas ordinarias del Álgebra, $\tang b = \frac{1 - \tang a}{1 + \tang a}$. Hagamos, pues, $\tang a = \frac{1}{2}$, y resultará $\tang b = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Ya

Fig. Ya no nos falta síno calcular por medío de la serie que hemos dado mas arriba, la longitud del arco cuya tangente x es $\frac{a}{2}$ ó la mitad del radio ; y la longitud del arco cuya tangente x es $\frac{a}{3}$; la suma de estas dos longitudes formará la del arco de 45°. Substituyendo en lugar de x, $\frac{a}{2}$, y despues $\frac{a}{3}$, resultará $\frac{a}{2}(1 - \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^4} - \frac{1}{7.2^6} + \frac{1}{9.2^8} - \frac{1}{11.2^{10}} + \frac{1}{13.2^{12}}$ &c.), y $\frac{a}{3}(1 - \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^4} - \frac{1}{7.3^6} + \frac{1}{9.3^8} - \frac{1}{11.3^{10}} + \frac{1}{13.3^{12}}$ &c).

Para sacar las espresiones exactas hasta nueve decimales de los valores de estos arcos, deberíamos calcular los 15 primeros términos del primero, y los 10 primeros términos no mas del segundo, cuyo cálculo es sumamente facil, si se atiende á que en el primero se pueden calcular consecutivamente los términos, formando primero una serie que tenga cada uno de sus términos igual al que le precede multiplicado por $\frac{1}{2^2}$, esto es, igual á $\frac{1}{4}$ de su precedente; multiplicando despues los términos de dicha serie, por los de la serie $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ &c. cada uno por el suyo; y finalmente juntando unos con otros los términos de número par, y los de número impar tambien unos con otros, se restará la suma de estos últimos de la de los primeros, y se multiplicará el residuo por $\frac{a}{2}$. El cálculo de la segunda serie se reduce á formar una serie, tal que cada uno de sus términos se componga del precedente multiplicado por $\frac{1}{3^2}$ ó por $\frac{1}{9}$, esto es, que sea $\frac{1}{9}$ del que le precede; se multiplicará despues cada término de dicha serie por cada uno de los de la serie $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ &c. respec-

pectivamente, y se proseguirá del mismo modo que quando se calculó la primera serie; pero en lugar de multiplicar como antes por $\frac{a}{2}$, se habrá de multiplicar ahora por $\frac{a}{3}$. Si executamos la operacion continuando la aproxîmacion hasta 10 decimales, el valor de la primera serie será $\frac{a}{2}(0,9272952180)$, ó $a(0,4636476090)$; y el de la segunda será $\frac{a}{3}(0,9652516632)$, ó $a(0,3217505544)$; luego el arco de 45°, que es la suma de los dos, será $a(0,7853981634)$. Para sacar la semicircunferencia, se tomará el quádruplo de este valor, y resultará .... $a(3,1415926536)$; luego el radio es á la semicircunferencia, ó el diámetro es á la circunferencia, como a: $a(3,1415926536)$ :: 1 : 3,1415926536; lo mismo que sacamos (II. 424) casi por el mismo camino que ahora.

591 Cuestion IV. *Rectificar el arco de elipse* FM, *en el supuesto de ser* AD = a, AF = c, AB = x, BM = y, FM = z. 233

Por la naturaleza de la curva será $y = \frac{c}{a}\sqrt{(aa-xx)}$, luego $dy = \frac{-cxdx}{a\sqrt{(aa-xx)}}$; luego $dz = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx\frac{\sqrt{(a^4-a^2x^2+c^2x^2)}}{\sqrt{(a^4-a^2x^2)}} =$ (con dividir arriba y abaxo por aa, y hacer $\frac{aa-cc}{aa} = m$) $dx\frac{\sqrt{(aa-mxx)}}{\sqrt{(aa-xx)}} = dx\frac{\sqrt{[(a^2-mxx.(aa-xx)]}}{aa-xx} = dx + \frac{1-m}{2aa}x^2dx + \frac{3-2m-mm}{8a^4}x^4dx +$ &c. Por consiguiente $z = x + \frac{1-m}{6aa}x^3 + \frac{3-2m-mm}{40a^4}x^5 + \frac{5-3m-mm-m^3}{112a^6}x^7 +$ &c. $= FM$.

592 Cuestion V. *Rectificar el arco* FM *de hypérbola.* 234

Con-

Fig. Considerarémos AB como la mitad de un primer diámetro, y la llamarémos a; llamarémos c la mitad AF de su conjugado; AP, x; PM, y; FM, z. La equacion de la curva dará $y = \sqrt{(cc + \frac{ccxx}{aa})}$, $dy = \frac{cxdx}{\sqrt{(a^4 + a^2x^2)}}$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2})} = dx\frac{\sqrt{(a^4 + a^2x^2 + c^2x^2)}}{\sqrt{(a^4 + a^2x^2)}}) = dx\frac{\sqrt{(aa + mxx)}}{\sqrt{(aa + xx)}}$, con dividir arriba y abaxo por aa, y hacer $\frac{aa + cc}{aa} = m$. Luego $dz = dx\frac{\sqrt{(aa + mxx)}}{\sqrt{(aa + xx)}} = dx\frac{\sqrt{[(aa + mxx).(aa + xx)]}}{aa + xx} = dx\left(1 - \frac{1 - m}{2aa}x^2 + \frac{3 - 2m - m^2}{8a^4}x^4 - \frac{5 - 3m - m^2 - m^3}{16a^6}x^6 + \&c.\right)$, y por consiguiente $z = x - \frac{1 - m}{6aa}x^3 + \frac{3 - 2m - mm}{16a^4}x^5 - \frac{5 - 3m - m^2 - m^3}{112a^6}x^7 \&c. = FM$.

593 Cuestion VI. *Rectificar la espiral de Arquimedes.*

235 Si llamamos a el radio del círculo $ABFG$, el arco $AGFBN$, x; la circunferencia entera, c; la ordenada CM, y; y tiramos el radio Cn infinitamente próximo á CN, será (366) $x = \frac{cy}{a}$; $Nn = dx$; los triángulos semejantes CNn, CMr darán $Mr = \frac{ydx}{a}$; será, pues, $Mm = d(COM) = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{y^2dx^2}{a^2}\right)}$, y substituyendo en lugar de dx^2 su valor $\frac{c^2dy^2}{a^2}$ sacado de $\frac{cy}{a} = x$, sacarémos $\sqrt{\left(dy^2 + \frac{c^2y^2dy^2}{a^4}\right)} = dy\sqrt{\left(1 + \frac{c^2y^2}{a^4}\right)} = dy\frac{\sqrt{(a^4 + c^2y^2)}}{\sqrt{a^4}} = \frac{dy}{a^2}\sqrt{\left(a^4 + c^2y^2\right)} = \frac{c}{a^2}dy\sqrt{\left(y^2 + \frac{a^4}{c^2}\right)}$. Luego $COM = \frac{c}{a^2} \times S.dy\sqrt{\left(yy + \frac{a^4}{c^2}\right)}$. Pero hemos visto (587) que esta diferencial es el elemento de un arco de parábola cuya abscisa es y, y el parámetro es igual al duplo de la raiz quadrada de la cantidad constante que está debaxo del radical; luego se reduce la rectificacion de la espiral á la de la parábola.

Por

Por consiguiente trazaremos en el caso actual una parábola Fig.
CN' cuyo parámetro $= \frac{2a^2}{c}$; haciendo $CQ = CM$, y tirando la ordenada QN, será $CN' = \frac{c}{a^2} S.\, dy\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2} + yy\right)}$. Luego $CN' = COM$.

594 Cuestion VII. *Rectificar la cycloide, ó hallar el valor de un arco* AD. 228.

Llamaremos AF, x; FD, y; AE, a; FC, u; el arco AC, s; será (369) $y = s + u$. Por la naturaleza del círculo $uu = ax - xx$, $du = \frac{adx - 2xdx}{2u}$, y $ds = \frac{adx}{2u}$ (589); por consiguiente $dy = ds + du = \frac{a - x}{u}dx$; de donde sale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{\left(1 + \frac{(a-x)^2}{uu}\right)} = \frac{dx}{u}\sqrt{(aa - xx)} = dx \times \frac{\sqrt{(aa - ax)}}{\sqrt{(ax - xx)}} = dx\sqrt{\frac{a}{x}}$, cuya integral es $2\sqrt{ax}$ $=$ 2 cuerda AC (I. 463).

Usos del cálculo integral para medir la solidez de los cuerpos.

595 Para medir la solidez de los cuerpos, podemos suponer que se componen de rebanadas infinitamente delgadas y paralelas unas á otras, ó de una infinidad de pirámides, cuyos vértices se juntan todos en un punto comun. Quando se consideran como formados de rebanadas infinitamente delgadas y paralelas, la diferencia de las dos superficies opuestas que terminan cada rebanada, es infinitamente pequeña, y por lo mismo se debe omitir en los cálculos, si queremos dar á entender que dicha rebanada es infinitamente delgada. De donde resulta que su solidez se ha de espresar por el producto de la una de

Fig. sus dos bases opuestas por su altura infinitamente pequeña.

236. Por egemplo, si imaginamos que la pirámide $SABC$ se compone de rebanadas como $abcfeg$ infinitamente delgadas, podremos espresar la solidez de dicha rebanada por el producto de la superficie abc, ó de la superficie gef por el grueso de la rebanada.

237. Si consideramos el sólido de revolucion engendrado por la rotacion de la curva AM al rededor de la recta AP, como compuesto de rebanadas paralelas é infinitamente delgadas; habremos de espresar la medida de cada rebanada por el producto de la superficie del círculo cuyo radio es PM, por el grueso Pp.

596 Sentado este principio, declararemos como se podrá valuar la solidez de los cuerpos. Consideraremos cada rebanada como la diferencial del sólido, porque en la realidad $MmlL = AmlA - AMLA = d(AMLA)$; y despues de determinada la espresion algebráica de dicha rebanada, se integrará.

236. Supongamos, por egemplo, que queramos medir la pirámide $SABC$. Supondremos que la superficie ABC de su base es igual á la cantidad conocida bb, y su abscisa $ST = a$; llamaremos x la distancia St de una rebanada qualquiera, y será dx la diferencia de dicha rebanada. Por lo que mira á la superficie abc, la sacaremos (I. 554) de esta proporcion: $(ST)^2 : (St)^2 :: ABC : abc$; esto es, $aa : xx :: bb : abc = \frac{bbxx}{aa}$; por consiguiente la solidez de la rebanada será $\frac{bbxxdx}{aa}$, cuya integral es $\frac{bbx^3}{3aa} + C$, ó solamen-

te

te $\frac{bbx^3}{3aa}$, si contamos la solidez desde el vértice S. Esta cantidad que representa la solidez de la porcion piramidal qualquiera $Sabc$, es lo mismo que $\frac{bbxx}{aa} \times \frac{x}{3}$, que no se distingue de $abc \times \frac{St}{3}$, cuyo resultado concuerda con el que sacamos tiempos há (I. 603). Fig.

597 En orden á los sólidos de revolucion, se puede sacar una fórmula general que represente la rebanada elemental ó diferencial. Imaginemos, pongo por caso, que $r : c$ señale la razon que hay entre el radio, y la circunferencia; la circunferencia cuyo radio es PM ó y la sacaremos de esta proporcion $r : c :: y : \frac{cy}{r}$; si multiplicamos este valor $\frac{cy}{r}$ de la circunferencia cuyo radio es PM, por $\frac{1}{2}y$ mitad del radio, será $\frac{cy^2}{2r}$ la superficie, cuyo producto por el grueso Pp ó dx es $\frac{cy^2dx}{2r}$, que es la espresion del elemento de la solidez de todo el sólido de revolucion. Y como en el supuesto de ser $r : c$ la razon entre el radio, y la circunferencia, ha de ser (II. 232) $\frac{c}{2r}$ la area del círculo cuyo radio $= 1$; si llamamos p esta area, y substituimos p en la fórmula en lugar de $\frac{c}{2r}$, se transformará en $pyydx$. De donde inferiremos que en el supuesto de ser p la area del círculo cuyo radio $= 1$, será pyy la area de un círculo cuyo radio $= y$, pues $1^2 : y^2 :: p : pyy$; porque son las areas de las figuras semejantes como los quadrados de sus lados homólogos. Para aplicar esta fórmula á los casos particulares, se substituirá en lugar de y su valor en x sacado de la equacion de la curva generatriz AM, y se integrará. 237.

Fig. 238. 598 Cuestion I. *Hallar la solidez del cono engendrado por el triángulo rectángulo* ABD, *dando la vuelta al rededor del lado* AB.

Llamemos AB, x; BD, y; y φ el ángulo BAD. Si tomamos AD por radio, tendremos $\cos\varphi : \text{sen}\,\varphi :: x : y = \frac{x\,\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi}$, y por consiguiente $yy = \frac{(\text{sen}\,\varphi)^2}{(\cos\varphi)^2}xx$. Luego el cono espresado será $= \frac{c}{2r}\,S.\frac{\text{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi}x^2dx = \frac{c}{2r}.\frac{\text{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{x^3}{3} = \frac{c}{2r}\frac{xy^2}{3}$, que segun sabemos es la tercera parte del cilindro que tiene una misma base y altura que él.

Por el mismo camino sacaríamos que el cono engendrado por el mismo triángulo dando la vuelta al rededor del lado ó ege AC, sería $= \frac{c}{2r}.\ \frac{x^2y}{3}$. Luego el primer cono será á el segundo $:: y : x ::$ sen φ : cos φ. De donde sacaremos la respuesta á la siguiente pregunta:

¿Qué se ha de hacer para hallar dos conos tales, que la altura del uno sea igual al radio de la base del otro, y sean uno con otro en razon dada? Para esto se dividirá el ángulo recto CAB de modo que el seno del ángulo BAD sea al seno del ángulo CAD en la razon dada; y tirando desde un punto qualquiera D las ordenadas DB, DC, los dos conos engendrados el uno del triángulo ADB que dá la vuelta al rededor de AB, y el otro del triángulo ADC al rededor de AC, serán los que se piden.

599 Cuestion II. *Hallar la solidez de un conoide parabólico, ó de un paraboloide.*

Llá-

Llámase *Conoide* en general todo cuerpo formado por la revolucion de la area de alguna de las tres secciones cónicas al rededor del ege, de la ordenada, ó de la tangente de dicha seccion. Quando el sólido resulta de la revolucion de una semiparábola al rededor de su ege, el sólido se llama *Conoide parabólico*, ó *Paraboloide*; *Conoide elíptico*, ó *Elipsoide*, si se origina de la revolucion de una semielipse al rededor del uno de sus eges; quando la area elíptica dá la vuelta al rededor del ege mayor de la curva, engendra el *Elipsoide prolongado*, y si dá la vuelta al rededor del ege menor, engendra el *Elipsoide aplanado.* El elipsoide, sea el que fuere, se llama tambien *Esferoide.* Finalmente quando el sólido resulta de la revolucion de una area hyperbólica al rededor del uno de sus eges, se llama *Conoide hyperbólico*, ó *Hyperboloide.* Sentado esto, busquemos la solidez del paraboloide. Fig.

Como la equacion de la parábola es $yy = ax$, la fórmula $\frac{cyydx}{2r}$ se transformará en $\frac{caxdx}{2r}$, cuya integral es $\frac{cax^2}{4r} + C$, ó $\frac{cax}{2r} \times \frac{x}{2} + C$, ó con substituir en lugar de ax su valor yy, $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2} + C$. Si queremos apreciar la solidez del 237. paraboloide desde el punto A, como en este supuesto el sólido es cero, quando x es cero, la constante C ha de ser cero, y la solidez se reduce á $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2}$; pero $\frac{cyy}{2r}$ espresa la superficie del círculo, cuyo radio sería PM, ó la base del paraboloide $AMLA$; luego el paraboloide es la mitad del producto de su base por su altura x; luego es la mitad del cilindro de igual base y altura que él.

Fig. Si quisiéramos contar la solidez desde un punto dado K, tal que $AK = e$; como en este supuesto sería cero la solidez en el punto K, esto es, quando $x = e$, la integral general ha de ser cero en este caso, quiero decir que $\frac{cax^2}{4r} + C$, que será $\frac{cae^2}{4r} + C$, ha de ser cero; luego $\frac{cae^2}{4r} + C = 0$, y $C = -\frac{cae^2}{4r}$; luego la solidez de una porcion de paraboloide comprehendida entre dos planos paralelos, que están respectivamente á las distancias x y e del vértice, es $\frac{cax^2}{4r} - \frac{cae^2}{4r}$.

239. 600 Cuestion III. *Hallar la solidez del elipsoide prolongado, formado por la revolucion de la elipse al rededor de su ege mayor.*

Si llamamos el ege mayor AB, a; el menor CD, b; AP, x; PM, y, la equacion de la elipse será $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$. Por consiguiente la fórmula $\frac{cy^2dx}{2r}$ se transformará en $\frac{cbb}{2raa}dx\,(ax - xx)$, ó $\frac{cbb}{2raa}(axdx - xxdx)$, cuya integral es $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C$, ó solamente $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$, si contamos la solidez desde el punto A.

Para sacar la solidez de todo el esferoide, haremos $x = AB = a$, y resultará $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right)$ que se reduce á $\frac{cabb}{12r} = \frac{cbb}{4r} \times \frac{1}{3}a$, ó á $\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3}a$; pero $\frac{cbb}{8r}$ espresa la superficie del círculo, cuyo diámetro es $b = CD$, y por lo mismo $\frac{cbb}{8r} \times a$ es la solidez del cilindro circunscripto al elipsoide; luego una vez que, segun hemos hallado, la solidez del elipsoide es $\frac{cbb}{8r} \times \frac{2}{3}a$, hemos de inferir que la solidez del elipsoide es los $\frac{2}{3}$ del cilindro circunscripto. Y como la esfera es lo mismo que un elipsoide cuyos dos eges

son

son iguales, será tambien la esfera los $\frac{2}{3}$ del cilindro circunscripto. Fig.

601 Por el mismo camino hallaríamos que el elipsoide aplanado es los $\frac{2}{3}$ del cilindro circunscripto; quiero decir, que en el supuesto de ser a y b los eges mayor y menor de la elipse generatriz, la solidez del esferoide aplanado será $\frac{caab}{12r}$; por consiguiente el esferoide prolongado es al aplanado $:: \frac{cabb}{12r} : \frac{caab}{12r} :: b : a ::$ como el ege menor es al mayor.

602 Si en lo dicho (600) hubiéramos contado la solidez desde un punto determinado K, tal que $AK = e$, hubiéramos tomado la integral general $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C$; y como la solidez hubiera empezado desde el punto K, dicha integral sería cero en dicho punto, esto es, quando $x = e$. Pero entonces se transforma en $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right) + C$; luego $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right) + C = 0$; y por consiguiente $C = - \frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right)$, y por consiguiente la espresion de la solidez contada desde el punto K es $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right)$. Esta es la espresion de una rebanada de esferoide comprehendida entre dos planos paralelos, perpendiculares al ege, entre los quales hay la distancia $x - e$.

603 Cuestion IV. *Hallar la solidez del hyperboloide* MAm *engendrado por la hypérbola dando la vuelta al rededor de su primer ege.* 240.

Llamemos a el primer ege de la curva; b, el segundo; AP, x; PM, y. Su equacion será $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, y $pyydx$ será $\frac{pbbdx}{aa} \times (ax + xx)$, cuya integral es $\frac{pbbxx}{2aa} + \frac{pbbx^3}{3aa}$,

 que

Fig. que con substituir el valor de bb sacado de la equacion de la curva, se reduce á $\frac{3ax+2xx}{6a+6x} \times pyy = \frac{3a+2x}{6a+6x} \times x \times pyy$; será, pues, la solidez el producto de $\frac{3a+2x}{6a+6x}$ por la altura x, y por su base (597) pyy.

De donde inferiremos que quando $x = 0$, el sólido será $= \frac{1}{2}$ base $\times$ por la altura, y si x fuese infinita, el el hyperboloide será $= \frac{1}{3}$ base $\times$ la altura; y que por consiguiente tiene un medio entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ del cilindro circunscripto, y será como unos $\frac{5}{12}$ de él.

604 Cuestion V. *Hallar la solidez del hyperboloide*
241. *engendrado por la hypérbola, dando la vuelta al rededor de su segundo ege.*

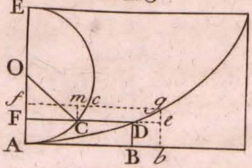
Sea CM la hypérbola generatriz, cuyo centro está en A, y llamemos AC, b; su semiconjugado, a; AP, x; PM, y. La propiedad de la curva dará $yy = bb + \frac{bbxx}{aa}$. Luego $pyydx$ será $= pbbdx + \frac{pbbx^2dx}{aa}$, cuya integral $pbbx + \frac{pbb}{3aa}x^3 = \frac{2}{3}pbbx + \frac{1}{3}pyyx$, despues de substituido en lugar de $\frac{bb}{aa}xx$ su valor $yy - bb$ sacado de la equacion de la curva. Es, pues, $\frac{2}{3}pbbx + \frac{1}{3}pyyx$ la solidez del cuerpo que forma la area $CAPM$ al tiempo de dar la curva una vuelta.

242. 605 Cuestion VI. *Hallar el sólido formado por la revolucion de una hypérbola equilátera al rededor de su asýmtota.*

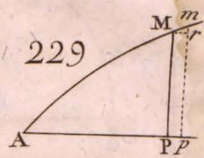
Sea MGN la hypérbola; AM, AN sus asýmtotas. Para hallar el valor del sólido engendrado por la area $GFDB$ dando la vuelta al rededor de AB, llamaremos $AF = FG$,

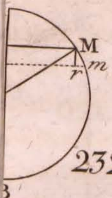
x,

228

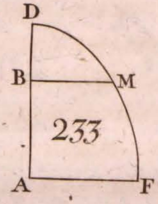


229

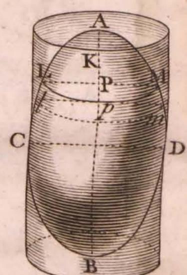




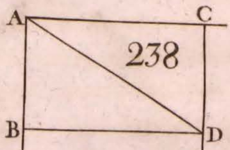
232



233

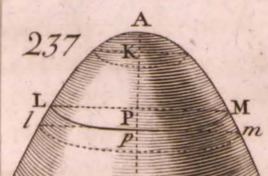


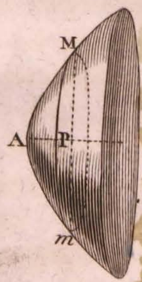
239



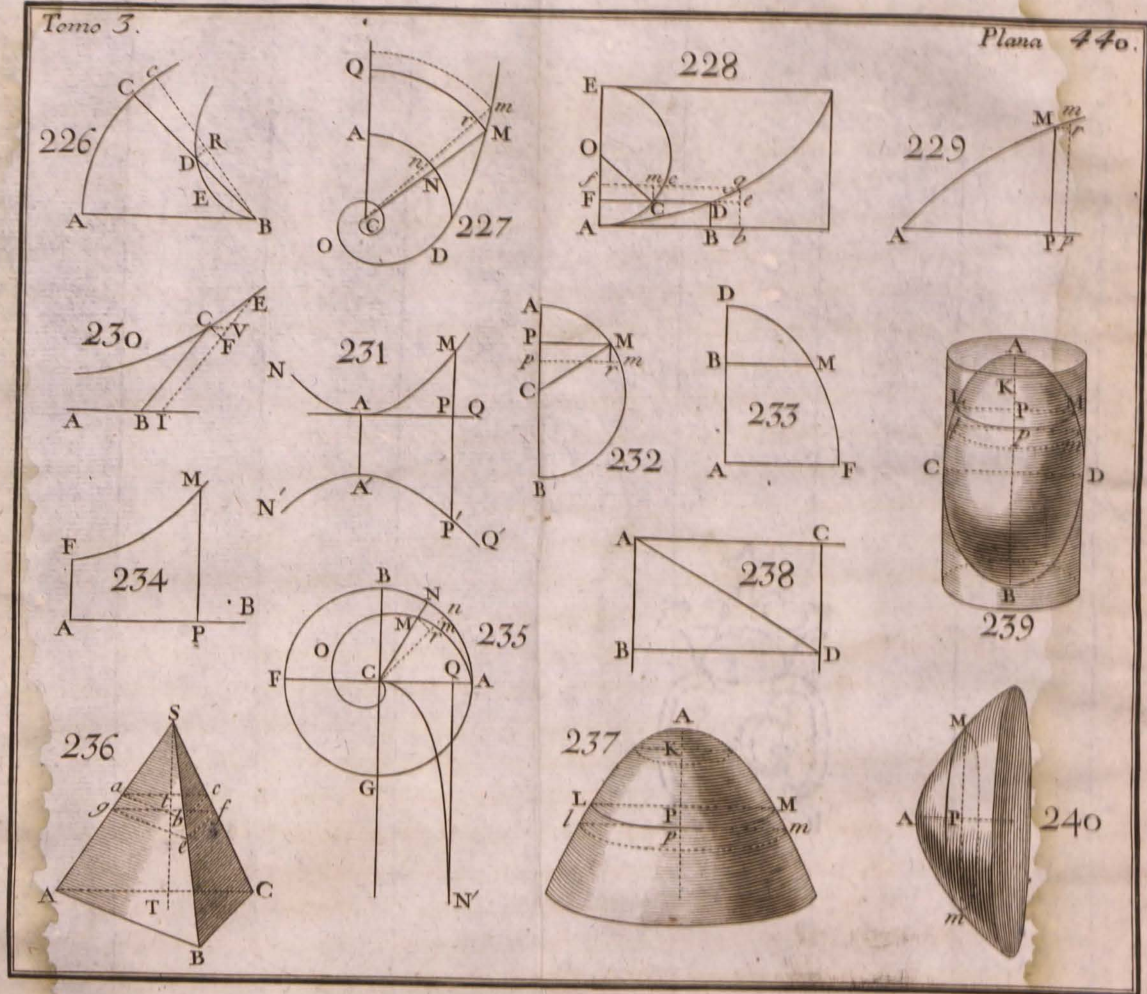
238

237





240


226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240

x, y será (171) $aa = xy$, ó $yy = \frac{a^4}{x^2}$; cuyo valor Fig.
substituido en $\frac{c}{2r}$ $S.y^2dx$ dará $\frac{c}{2r}$ $S.$ $\frac{a^4 dx}{x^2}$. Y como la integral de $\frac{a^4 dx}{x^2}$ ó a^4x^{-2} dx es $-\frac{a^4}{x} + C$, será la espresion del hyperboloide que buscamos $\frac{c}{2r} \times \left(C - \frac{a^4}{x}\right)$. El valor de la constante C le hallaremos con suponer que el sólido es nulo quando $x = 0$, en cuyo supuesto $C = a^3$; luego el valor cabal del sólido será $\frac{c}{2r}\left(a^3 - \frac{a^4}{x}\right) = \frac{c}{2r}\left(a^3 . \frac{(x-a)}{x}\right)$; de cuya fórmula inferiremos que si crecieren las abscisas en progresion arismética, de modo que sean a, $2a$, $3a$ &c. resultarán sólidos iguales á $\frac{c}{2r}a^3$, multiplicados succesivamente por 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ &c. Si fuese x infinita, el sólido será $\frac{c}{2r}a^3$, igual al cilindro engendrado en la misma revolucion por el rectángulo *AFGC*. Si fuese x menor que a, el sólido será negativo, é infinito si fuese $x = 0$. Por lo que el sólido infinitamente largo engendrado por el espacio *GFN* es finito, y el que engendra la area *AFGM* dando la vuelta al rededor de la asýmtota *AN* es infinito.

606 Cuestion VII. *Hallar la solidez de un sólido* 243.
parabólico ACBDA *engendrado por la rotacion de una parábola dada* ACB *al rededor de la ordenada* AB.

Llamemos a la abscisa *CM* de la parábola dada, y b la semiordenada *AM* ó *BM*; y suponiendo que sea *ENF* una seccion del sólido paralela á *DC*, llamaremos u la distancia *MN* ó *EP* que hay entre la espresada seccion, y la linea *CD*. Sentado esto, la propiedad de la parábola dá $(AM)^2 : (EP)^2 :: CM : CP$, ó $bb : uu :: a : CP = \frac{auu}{bb}$. Luego $EN = CM - CP = a - \frac{auu}{bb} = \frac{a \times (b^2 - u^2)}{bb}$, y por

con-

Fig. consiguiente será $p \times (EN)^2 = \frac{pa^2}{b^4} \times (b^4 - 2bbuu + u^4)$ la espresion de la area de la seccion EF. El producto de esta area por la diferencial du de MN dará $\frac{pa^2}{b^4}$ $(b^4du - 2b^2u^2du + u^4du)$, que será el elemento del sólido que buscamos. Luego su integral $\frac{pa^2}{b^4}(b^4u - \frac{2}{3}b^2u^3 + \frac{1}{5}u^5)$ será el valor de la mitad del sólido quando $u = b$, en cuyo supuesto dicha integral será $\frac{8pa^2b}{15}$.

244. 607 Cuestion VIII. *Hallar el valor del sólido* ACBDA *engendrado por la rotacion del segmento de círculo* ACB *al rededor de la cuerda ú ordenada* AB.

Supongamos que esté el centro en O, y llamemos el radio OE, r; OM, m; y EP, u. Será $OP = \sqrt{[(OE)^2 - (EP)^2]} = \sqrt{(rr - uu)}$, y $EN = OP - OM = \sqrt{(rr - uu)} - m$. Se transformará, pues, en este caso la fórmula general en $pdu(\sqrt{(rr - uu)} - m)^2 = pdu[r^2 - u^2 + m^2 - 2m\sqrt{(r^2 - u^2)}] = pdu(r^2 - u^2 - m^2) - pdu(2m\sqrt{(r^2 - u^2)} - 2m^2)$. La integral de $pdu(2m\sqrt{(rr - u^2)} - 2m^2) = 2mp \times du \times [\sqrt{(rr - uu)} - m] = 2mp \times du \times EN$, será $2mp \times$ area $MNEC$; por consiguiente toda la integral será $pu(r^2 - m^2 - \frac{1}{3}u^2) - 2mp \times$ area $MNEC$, que es igual á $p \times MN \times [(AM)^2 - \frac{1}{3}(MN)^2] - 2p \times OM \times$ area $MNEC$; que en el supuesto de ser $MN = MA$ es $p \times \frac{2}{3}(AM)^3 + 2p \times OM \times$ area ACM, y será el valor de la mitad del sólido.

245. 608 Cuestion IX. *Hallar la solidez del cuerpo prismoidal, ó del prismoide* AEGB, *siendo sus quatro lados* AH, AF, CH, CF *superficies planas, y* ADCB, EFGH *rectán-*

tángulos dados, paralelos el uno al otro. Fig.

Llamemos AB, a; AD, b; EH, c; EF, e; la altura perpendicular del sólido, h; y x, la distancia, considerándola como variable, á que está del plano EG una seccion IL del sólido hecha con un plano paralelo á la base.

La naturaleza misma de la figura está diciendo que la seccion IL es un rectángulo; y que (I.451) $h : x :: AB - EH : IM - EH :: BC - HG : ML - HG$. De cuyas proporciones inferiremos $IM - EH = \frac{(a-c)x}{h}$, y $ML - HG = \frac{(b-e)x}{h}$. Luego $IM = \frac{(a-c)x}{h} + c$, y $ML = \frac{(b-e)x}{h} + e$; y por consiguiente la area del rectángulo $IL = \frac{(a-c)\times(b-e)}{h^2} \times x^2 + \frac{ae-2ce+cb}{h} x + ce$. Si multiplicamos esta espresion por dx, y sacamos despues la integral, resultará $\frac{(a-c)(b-e)x^3}{3h^2} + \frac{(ae-2ce+cb)x^2}{2h} + cex$, que será el valor del sólido $IFGL$, que quando $x = h$ se transforma en $\frac{((a-c)(b-e))h}{3} + \frac{(ae-2ce+cb)h}{2} + ceh = (2ab + ae + bc + 2ce) \times \frac{1}{6}h = [AB \times AD + EH \times EF + (AB + EH) \times (AD + EF)] \times \frac{1}{6}h$, que es el valor de todo el prismoide.

Si $EF = e$ llegára á ser nula, las lineas EH, FG coincidirian, y los planos $AEHB$, $DFGC$ formarian un ángulo en la parte superior del sólido, que en este caso tendria la forma de la armadura de un tejado. Su solidez se sacaría muy facilmente, y sería $= (2ab + bc) \times \frac{1}{6}h$, ó $(2AB + EH) \times AD \times \frac{1}{6}h$.

Si fuese $EF = EH$, y $AD = AB$, el sólido sería un trozo de pirámide quadrada, sería su solidez $= (a^2 + ac$

+

Fig. $+ c^2) \times \frac{1}{3}b = ((AB)^2 + AB \times EH + (EH)^2) \times \frac{1}{3}b$; y si supusiéramos $EH = 0$, resultaría la solidez de toda la pirámide cuya base sería $(AB)^2$, y la altura $= b$, y cuya solidez sería $= (AB)^2 \times \frac{1}{3}b$.

609 Cuestion X. *Hallar la solidez del cuerpo llamado* Groin.

Este sólido que los Autores Ingleses llaman *Groin* es de tal configuracion, que todas las secciones paralelas á la base son quadrados, y las dos secciones hechas perpendicularmente á la base por el medio de los lados opuestos son semicírculos. Sea, pues, *cefg* una seccion paralela á la base, llamemos x la distancia Ab que hay desde el vértice del sólido á dicha seccion; y supongamos que sea $= a$ el radio $AB = BN$ de la seccion circular $ANBMA$ perpendicular á la base. En estos supuestos será $bn = \sqrt{(ax - xx)}$ por la naturaleza del círculo, y el lado del quadrado *cefg* será $2\sqrt{(2ax - xx)}$, y su area será $4(2ax - xx)$. Será, pues, el elemento de la porcion $cefgA$ del groin $= 4dx(2ax - xx)$, cuya integral será $4ax^2 - \frac{4x^3}{3}$, y espresará el valor de dicha porcion. Luego si hacemos $x = a$, resultará $\frac{(2a)^3}{3}$ que será la espresion de todo el sólido.

Por el mismo camino sacaríamos la solidez del groin, aun quando las secciones perpendiculares al medio de los lados opuestos en lugar de ser semicírculos, fuesen otras curvas qualesquiera, y las secciones paralelas á la base fuesen rectángulos, y no quadrados. Supongamos, por egemplo,

plo, que la una de las dos espresadas secciones sea un círculo, y la otra una parábola, cuyas ordenadas correspondientes á una misma abscisa x sean respectivamente $\sqrt{(px - xx)}$, y $\sqrt{ax}$; en virtud de esto, los lados de la seccion rectangular paralela á la base del groin serán $2\sqrt{(px - xx)}$, y $2\sqrt{ax}$; será, pues, la area de la misma seccion $= 4x\sqrt{(ap - ax)}$, y el elemento del sólido será $4xdx\sqrt{(ap - ax)}$, y su integral (510) Fig.

$$\frac{16p^2\sqrt{ap} - a^{\frac{1}{2}} \times (p-x)^{\frac{3}{2}} \times (16p + 24x)}{15}$$

será el valor que se busca.

610 Cuestion XI. *Hallar la solidez de la pirámide ó cono* ABCD *formado con tirar muchas lineas rectas desde todos los puntos de un plano dado* BDC *á un punto dado* A *fuera de dicho plano.* 247.

Sea EFG una seccion paralela á BDC; llamemos x la distancia perpendicular AQ á que está dicha seccion del vértice A; a, la altura dada AP del sólido; y b la area de la base BDC que suponemos dada.

Por lo dicho (I. 551) es constante que los dos planos BDC, EFG son semejantes; y como las figuras semejantes tienen unas con otras la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos, será $(AP)^2 : (AQ)^2 :: BDC : EFG$, ó $a^2 : x^2 :: b : EFG = \frac{bx^2}{a^2}$, cuya espresion multiplicada por dx diferencial de la altura AQ ó $\frac{bx^2dx}{aa}$, será el elemento del sólido $AEGF = S. \frac{bx^2dx}{aa} = \frac{bx^3}{3aa} = \frac{ab}{3}$ quando $x = a$; será, pues, $\frac{ab}{3}$ la solidez del sólido propuesto.

Cues-

Fig. 611 Cuestion XII. *Hallar la solidez de una úngula cilíndrica.*

Llamamos *Úngula cilíndrica* el sólido $ADBE$ que resulta de cortar un cilindro con un plano oblíquo respecto
248. de su base, y que para escusar complicaciones supondremos que pasa por el centro de dicha base.

Si imaginamos la úngula cortada por planos paralelos infinitamente inmediatos unos á otros, y perpendiculares á la base AEB, las secciones serán triángulos semejantes cuyas superficies estarán en razon de los quadrados de sus lados homólogos. Por consiguiente, si llamamos r el radio CE de la base; a, la altura DE; é y, la base PM del triángulo PMN, tendremos $CED : PMN :: rr : yy$; pero $CED = \frac{ar}{2}$; luego $PMN = \frac{aryy}{2rr} = \frac{ayy}{2r}$. Luego si llamamos AP, x, será dx el grueso de la rebanada comprehendida entre dos planos paralelos, y será $\frac{ayydx}{2r}$ su valor. Como y es la ordenada del círculo que sirve de base, y es $yy = 2rx - xx$, la rebanada elemental será $\frac{adx(2rx - xx)}{2r}$ ó $\frac{a}{2r}(2rxdx - xxdx)$, cuya integral, contando desde el punto A, es $\frac{a}{2r}\left(rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$. Por consiguiente sacaremos el valor de todo el sólido con hacer $x = 2r$, y resultará $\frac{a}{2r}\left(4r^3 - \frac{8r^3}{3}\right)$, ó $\frac{2}{3}ar^2$, ó $\frac{ar}{2} \times \frac{4}{3}r$, ó $CED \times \frac{4}{3}AC$, ó finalmente $CED \times \frac{2}{3}AB$; quiero decir, los dos tercios del prisma cuya base sería el triángulo CED, y la altura el diámetro AB.

249. 612 Cuestion XIII. *Hallar la solidez de una úngula cónica* EFGC, *cortada en el cono* ABC *por un plano* EFG *que pasa por su base.*

Sea

Sea AD la altura perpendicular del cono ; tiremos Fig.
la AM perpendicular á HE , que es el ege de la seccion FEG , y sea FAG otra seccion del cono hecha por un plano que pasa por el vértice A , y la linea FG.

Esto supuesto, los dos sólidos $CAFG$, $EAFG$, cuyas bases son respectivamente FCG y FEG , serán en virtud de lo que acabamos de probar (611) respectivamente $FCG \times \frac{1}{3}AD$, y $FEG \times \frac{1}{3}AM$; restando el segundo del primero su diferencia $\frac{FCG \times AD - FEG \times AM}{3}$ será el valor de la úngula $CEFG$.

Si las bases FCG y FEG fuesen secciones cónicas, se sacarian sus areas por lo dicho (570 , 577 y 578), y se resolveria la cuestion. Supongamos , por egemplo , que sea EH paralela á AB, la seccion FEG será (215) una parábola , cuya area es (570) $\frac{2}{3} \times FG \times EH$; luego la solidez del segmento $EFGA = \frac{2}{9} \times FG \times EH \times AM$; y rebajando esta cantidad del sólido $CFGA$, el residuo será el valor de la úngula. Se percibe facilmente como se resolverá la cuestion en el caso de ser FEG una elipse ó una hypérbola.

613 Cuestion XIV. *Hallar la fórmula general para cubar los sólidos engendrados por la revolucion de una area al rededor de una linea paralela al ege de las abscisas.*

Supongamos que la curva AM , cuyas coordenadas forman un ángulo recto APD , dé la vuelta no al rededor 250.
del ege AP , sino al rededor de HK paralela á AP ¿quál será el valor del sólido engendrado por la area APM?

Lla-

Fig. Llamaremos AP, x; PM, y; y m la distancia AH que hay entre el ege AP de la curva, y el ege de rotacion HK; en cuyos supuestos será $KM = y + m$. El sólido engendrado por la area $AHKM$ será (597) $= \frac{c}{2r} S.(y + m)^2 dx$; el cilindro engendrado por el rectángulo $AHKP = \frac{c}{2r} m^2 x = \frac{c}{2r} S.\, m^2 dx$; luego si restamos el cilindro del sólido engendrado por la area $AHKM$, el residuo será el sólido engendrado por la area APM dando la vuelta al rededor de HK, cuyo valor será $\frac{c}{2r} S.(y^2 dx + 2mydx)$.

251. Supongamos que dada la hypérbola equilátera AM, cuyo primer ege $AH = m$, y despues de tirada la tangente AT, queramos valuar el sólido engendrado por el trilíneo ATM dando la vuelta al rededor de HK. Si llamamos AT, x; TM, y, la equacion de la curva será $2cy + yy = xx$. Haciendo en la fórmula hallada la substitucion correspondiente, é integrándola, sacaremos que el sólido que buscamos $= \frac{c}{2r} \times \frac{x^3}{3}$ que espresa un cono cuya altura, y el radio de la base son cada uno $= x$.

252. Averiguemos el valor del sólido que engendra el quadrante de círculo $AGDF$ dando la vuelta al rededor del ege HK paralelo á AB. Para aplicarle á este caso la fórmula $\frac{c}{2r} S.(y^2 dx + 2mydx)$ la escribo como sigue: $\frac{c}{2r} S.y^2 dx + \frac{cm}{r} S.ydx$. El primer término espresa el sólido engendrado por la area $AGBD$ dando la vuelta al rededor de AB, cuyo sólido es igual á la mitad de la esfera, cuyo radio es AF, en el caso de ser $AB = AF$. Para saber lo que significa el otro término de la fórmula, es de advertir

que

que $\frac{cm}{r}$ es la circunferencia trazada con el radio *HA*, y que Fig.
$S.ydx$ espresa (566) el espacio *GABD*, que será igual al quadrante de círculo cuyo radio es *AF*, si suponemos $AB = AF$. Por consiguiente el sólido engendrado por el quadrante de círculo *AGF* dando la vuelta al rededor de *HK* es mayor que el emisferio cuyo radio es *AF*, de todo el sólido que resulta multiplicando el quadrante del radio *AF* por la circunferencia, trazada con el radio *HA*.

614 Cuestion XV. *Hallar la mudanza que padece la fórmula* $\frac{c}{2r}$ S.($y^2dx + 2mydx$) *quando la curva está entre el ege de sus abscisas, y el de revolucion.*

Esto es lo mismo que preguntar qual es el valor del sólido engendrado por el espacio *ABD* dando la vuelta al rededor de *HK*, siendo *AB* el ege de la curva *AD*. En este caso es evidente que el valor del espresado sólido se sacará restando del cilindro engendrado por el rectángulo *AHKB* el sólido engendrado por el espacio *AHKD*; por consiguiente el sólido que buscamos será $= \frac{c}{2r}m^2x - \frac{c}{2r} S.(m-y)^2 . dx = \frac{c}{2r} S.(2my-yy). dx.$ 253.

Sea el quadrante del radio $AH = m$, cuya tangente sea *AB*, de modo, que si llamamos $AB, x; BD, y$, la equacion sea $2my - yy = xx$. En estos supuestos, hallaremos con substituir en la fórmula xx en lugar de $2my - yy$, que el sólido engendrado por el trilineo *ADB* al rededor de *HK* será $= \frac{c}{2r}. S.x^2dx = \frac{c}{2r} . \frac{x^3}{3} = \frac{c}{2r} . \frac{m^3}{3}$, quando $x = m$. Será, pues, el sólido igual al cono cuya altura, y el radio de la base es $= m$, cuyo cono se origina del triángu- 254.

Fig. lo *AHF* dando la vuelta al rededor del ege *HF*.

252. Si quisiéramos valuar el sólido engendrado por el quadrante *AFEI* dando la vuelta al rededor del ege *HK*, tiraríamos la recta *BEK*; llamaríamos *AB*, x; *BE*, y; y escribiríamos la fórmula como sigue $\frac{cm}{r} S.ydx - \frac{c}{2r} S.y^2dx$. De los dos términos que lleva la fórmula, el primero es el producto de la circunferencia trazada con el radio *HA* multiplicada por la area *AEIB*, cuya area es igual al quadrante quando $AB = AF$; el otro término espresa el sólido engendrado por la area *AIEB*, dando la vuelta al rededor de *AB*, cuyo sólido es un emisferio quando $AB = AF$. Luego el sólido que engendra el quadrante *AIF* al rededor de *HK* es igual al sólido que resulta de la multiplicacion del quadrante de círculo cuyo radio es *AF* por la circunferencia trazada con el radio *AH*, quitado el emisferio.

Si al sólido engendrado por el quadrante *AFI* se le añade el sólido engendrado por el quadrante *AFG* al rededor de *HK*, resultará el sólido engendrado por el semicírculo *GFI* al rededor de *HK*, igual al duplo del quadrante, ó al mismo semicírculo multiplicado por la circunferencia, cuyo radio $= AH$, y restando el segundo sólido del primero resultará la diferencia igual al duplo del emisferio, ó á toda la esfera.

615 Cuestion XVI. *Hallar una fórmula general para espresar la solidez de los sólidos engendrados por la area comprehendida entre dos curvas, ó entre dos ramos de una misma curva.*

Ave-

Averiguemos el valor del sólido engendrado por la Fig. area ADE, comprehendida entre dos curvas AD, AE, 255. que tienen una misma abscisa AB, y dán la vuelta al rededor del ege KH. Llamaremos AB, z; BD, y; BE, u; y será $KD = m + y$; $KE = m + u$. Por lo dicho hasta aquí consta que el sólido engendrado por la area $ADKH$ $= \frac{c}{2r} \times S.(m+y)^2 dx$, y el que engendra la area $AEKH$ $= \frac{c}{2r} S.(m + u)^2 dx$; luego con restar este del primero, resultará el sólido engendrado por el espacio $ADE = \frac{c}{2r}$ $S.\left[2m(y - u)dx + (y^2 - u^2)dx\right]$. El término $S.(y - u)dx$ es la area ADE, y $S.y^2dx$ es el sólido engendrado por la area ADB dando la vuelta al rededor de AB, y $S.u^2dx$ es el sólido engendrado por la area AEB dando la vuelta al rededor de AB; por consiguiente el sólido engendrado por la area ADE al rededor de HK es igual á $\frac{cm}{r}$ AED mas la diferencia de los sólidos que engendran las areas ADB, AEB al rededor de AB.

Supongamos, para hacer alguna aplicacion de la fórmula, que sobre el diámetro NO se haya trazado el se- 256. micírculo NFO, y que sobre una de sus cuerdas MI paralela á NO, como diámetro, se haya trazado otro semicírculo MGI, y queramos valuar el sólido engendrado por la area $MGIF$ dando la vuelta al rededor de NO. Por el centro H tiraremos la normal HG que lo divide todo por el medio. Llamemos HO, a; AI, b; AH, $m = \sqrt{(aa - bb)}$. Tiraremos la ordenada KD, y llamaremos AB, x; BD, y; BE, u; con lo que las equaciones de las curvas

 GI,

Fig. *GI*, *FI* serán $bb - xx = yy$, $aa - xx = (m + u)^2$. Es constante que $S.(y - u)\,dx = GFED$; luego $\frac{c}{2r}\,S.\,2m(y - u)dx = \frac{cm}{r}GEFD$. Por otra parte $y^2 - u^2 =$

$$\begin{aligned} & bb - x^2 + \\ & -aa + x^2 \\ & -mm \end{aligned}$$

$2m\sqrt{(aa - xx)} = 2m\left[\sqrt{(aa - xx)} - m\right]$; luego $(y^2 - u^2)\,dx = 2m\left[dx\sqrt{(aa - xx)} - mdx\right]$, é integrando $S.(yy - uu)dx = 2m(HFEK - mx)$. Y como $mx = AHKB$, será $S.(yy - uu)dx = 2m(HFEK - HKB) = 2m.\,AFEB$. Por consiguiente el sólido que engendra *GFED* al rededor de $HK = \frac{cm}{r}.\,GFED + \frac{cm}{r}.\,AFEB = \frac{cm}{r}GABD$; luego el sólido que engendra $GIF = \frac{cm}{r}GAI$. El quadrante $GAI = \frac{cb^2}{8r}$; luego el sólido que *GFI* engendra $= \frac{c^2}{8r^2}b^2m$, y el que engendra toda la lúnula, será $= \frac{c^2}{4r^2}b^2m$.

Si la curva á la qual pertenecen las ordenadas *u* estuviera del otro lado, se la deberia considerar como negativa. Por lo que, mudando su signo para que se hiciese positiva, resultaria la fórmula $\frac{c}{2r}\,S.\left[2m(y + u)dx + (y^2 - u^2)dx\right]$. Y si $y = u$, se transformaría la fórmula en $\frac{2mc}{r}$
252. $S.ydx$. Si fuese *GFI* un semicírculo que diera la vuelta al rededor de *HK*, tiraríamos el radio *ABF* paralelo á *HK*, y el sólido engendrado por el espacio *GDEI* sería $= \frac{cm}{r}GDEI$, lo propio que hallamos antes (613 y 614).

616 Cuestion XVII. *Hallar la mudanza que se origina en las fórmulas halladas* (613 y sig.) *quando el ege de revolucion atraviesa la curva.*

257. Supongamos que la curva *GFD*, cuya abscisa *AB* =

$= x$, la ordenada $BD = y$, dé la vuelta al rededor de la linea de las abscisas AB que corta la curva en F. Tiraremos la ordenada GA; en cuyo supuesto el espacio AFG engendrará un sólido redondo, y el espacio FBD engendrará otro. Resta saber si la suma general $\frac{c}{2r} S.y^2dx$ de la cubatura espresa la suma ó la diferencia de estos dos sólidos. Para averiguarlo, tiraremos en la parte de arriba la ordenada $B'D'$ que hemos de mirar como negativa, siendo positiva la abscisa $AB' = x$, y su elemento dx; por cuyo motivo hemos de considerar como negativa la area $AGB'D'$. Pero como el quadrado de una cantidad negativa es positivo, será y^2 positivo, bien que sea negativa y. Luego $S.y^2dx$ será tambien una espresion positiva. Por consiguiente una vez que el sólido engendrado por cada area es positivo, es evidente que la fórmula $\frac{c}{2r} S.y^2dx$, integrada de modo que sea nula quando $x = 0$, representa la suma de los dos sólidos.

Fig.

Lo podemos probar con un egemplo muy sencillo. Supongamos que sea FGD una linea recta que forma un ángulo semirecto con la linea de las abscisas. Sea $AF = GA = a$, tendremos la equacion $x - a = y$; luego $dx = dy$; por consiguiente $\frac{c}{2r} S.y^2dx = \frac{c}{2r} S.y^2dy = \frac{c}{2r} \cdot \frac{y^3 + a^3}{3}$. Hemos añadido la constante, tal que si $y = -a$ la cantidad sea nula. Pero $\frac{c}{2r} \frac{y^3}{3}$ es el cono engendrado por el triángulo FDB, y $\frac{c}{2r} \cdot \frac{a^3}{3}$ es el cono formado por el triángulo AGF; luego la fórmula representa la suma de los dos sólidos. Para hallar su diferencia sería menester hallar sepa-

Fig. radamente el valor de cada uno, y restar el uno del otro.

250. 617 Si en lo dicho (605) quando buscábamos el sólido engendrado por la area AMP dando la vuelta al rededor de HK, concebimos que HK se vá arrimando, moviéndose paralelamente á sí misma, al ege AP hasta llegar á confundirse del otro lado con $H'K'$; es constante que $AH = m$ será negativa; por lo que, mudando en la fórmula el signo de m, se transformará en $\frac{c}{2r} S.(y^2dx - 2mydx)$, donde $AH' = m$. Esta fórmula, integrándola de modo que sea nula quando fuere $x = 0$, espresará la diferencia de los dos sólidos que provienen de las areas MFK', $AFK'P$.

Para manifestarlo, buscaremos primero el sólido que engendra $MAH'K'M$ al rededor de $H'K'$, que por lo dicho (616) sabemos que es la suma de los sólidos que engendran las dos areas MFK', AFH'; despues restaremos el cilindro formado por la revolucion del rectángulo $AH'K'P$, que es positivo, aun quando m es negativa. Es evidente que egecutada esta sustraccion quedará la diferencia de los dos sólidos que engendran las areas MFK', $AFK'P$.

250. Supongamos que sea AFM una linea recta que forma con AP un ángulo semirecto, de modo que $x = y$, Será, pues, $\frac{c}{2r} S. (y^2dx - 2mydx) = \frac{c}{2r} S.(x^2dx - 2mxdx) = \frac{c}{2r} \cdot \frac{x^3}{3} - mx^2$. Démosle á esta espresion la forma siguiente $\frac{c}{2r}\left[\frac{(x-m)^3}{3} - m^2x + \frac{m^3}{3}\right]$; y como $\frac{c}{2r} \cdot \frac{(x-m)^3}{3}$ es el cono engendrado por el triángulo FMK'; $\frac{c}{2r} m^2x$ es el cilindro que engendra el rectángulo $AH'K'P$; y finalmente $\frac{c}{2r} \cdot \frac{m^3}{3}$, es el cono que engendra el triángulo AFH', se infiere que

que el sólido engendrado por la area $AFK'P = \frac{c}{2r}\left(m^2x\right.$ Fig.
$\left.-\frac{m^3}{3}\right)$. Por consiguiente la fórmula espresa la diferencia de los dos sólidos que engendran las areas FMK', $AFK'P$.

618 Si en el caso antes propuesto (615) repasamos las operaciones egecutadas, determinaremos qué cosa significará la fórmula quando el ege de revolucion fuese $H'K'$ 255.
y m fuese negativa. Porque con mudar el signo de la cantidad m, la fórmula se transformará en $\frac{c}{2r}$ $S.\left(-2m(y-u)dx\right.$ $\left.+(y^2-u^2)\,dx\right)$. Esta fórmula se saca si buscamos primero el sólido engendrado por el espacio $ADK'H'$ que vale la suma de los dos engendrados por los trilineos FDK', FAH'; y buscando despues el sólido formado por el espacio $AEK'H'$ igual á la suma de los sólidos engendrados por los trilineos GEK', GAH', y restando el último sólido del primero. Egecutando la sustraccion queda el sólido engendrado por $FGED$, menos el sólido que engendra AFG; luego la fórmula espresa la diferencia de los dos sólidos que engendran las areas $FGED$, AFG.

Apliquemos esto á un caso muy sencillo. Supongamos que sean AFD, AGE dos lineas rectas, y que $AB = x : BD = y :: 1 : f$; y $x : BE = u :: 1 : g$. Luego $y = fx$, y $u = gx$. Por consiguiente la fórmula se transformará en $\frac{c}{2r}$ $S. -2m(f-g)\,xdx + (f^2 - g^2)\,x^2dx = \frac{c}{2r}(f^2 - g^2)\frac{x^3}{3} - (f-g)mx^2$. Veamos, pues, si esta fórmula espresa la diferencia de los dos sólidos que engendran las areas $FGED$, AFG, conforme hemos dicho.

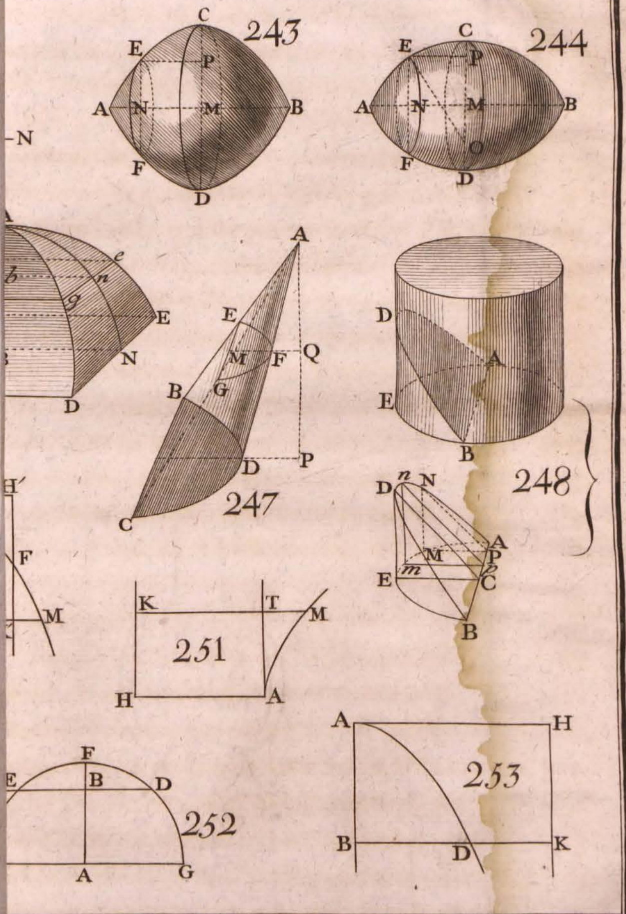
Hallaremos facilmente que $FH' = \frac{m}{f}$, y $GH' = \frac{m}{g}$;

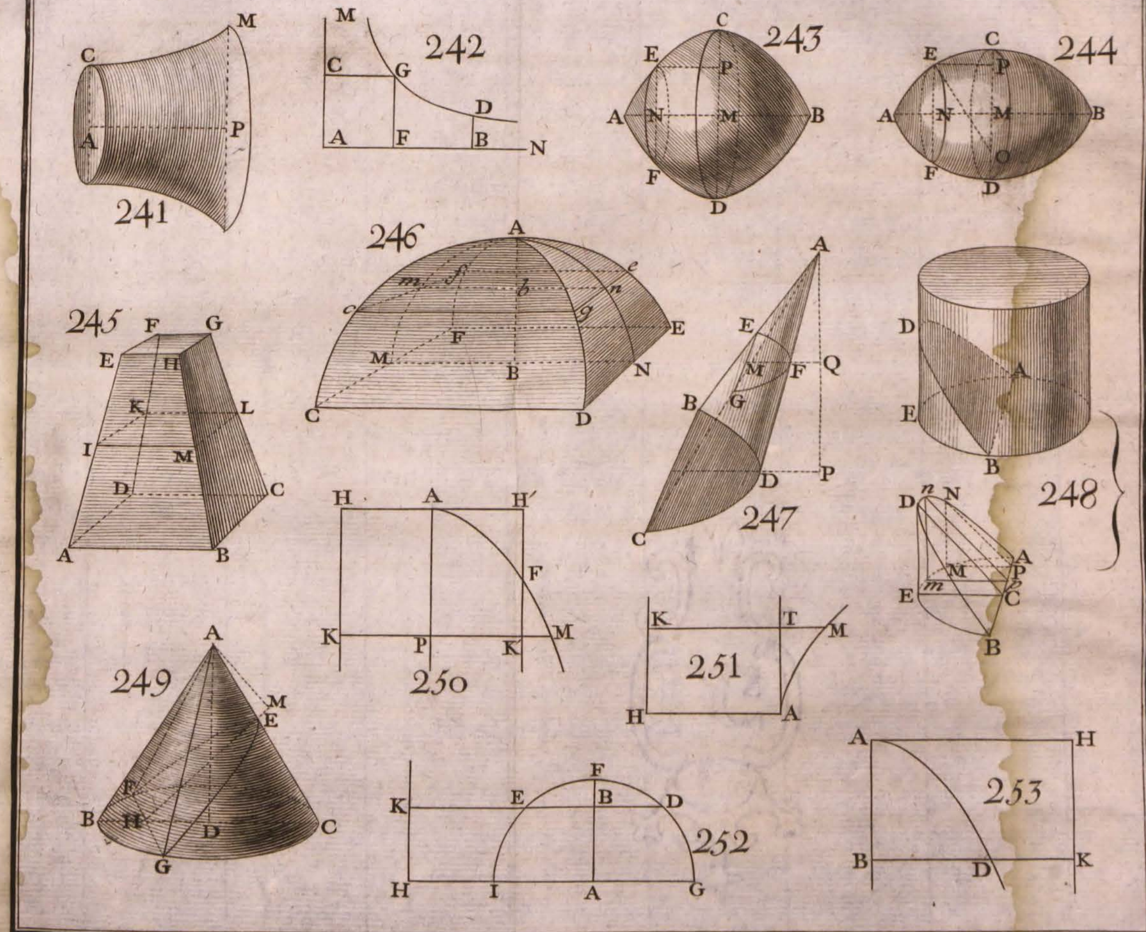
Fig. luego $FK' = x - \frac{m}{f}$, $GH' = x - \frac{m}{g}$; $K'D = fx - m$, $K'E = gx - m$; luego el cono engendrado por el triángulo $FK'D$ al rededor de $FK' = \frac{c}{2r}$). $\frac{(fx - m)^2 (x - \frac{m}{f})}{3}$ $= \frac{c}{2r}\left(\frac{f^2x^3}{3} - fmx^2 + m^2x - \frac{m^3}{3f}\right)$. El cono originado de la revolucion del triángulo $GK'E$ será $= \frac{c}{2r}\left(\frac{g^2x^3}{3} - gmx^2 + m^2x - \frac{m^3}{3g}\right)$; luego si restamos el segundo cono del primero, quedará el sólido engendrado por la area $FGED$ $= \frac{c}{2r}(f^2 - g^2)\frac{x^3}{3} - (f - g)\,mx^2 + \frac{(f-g)m^3}{3fg}$. El cono que engendra el triángulo GAH' es $\frac{c}{2r} \cdot \frac{m^3}{3g}$, y el que engendra el triángulo FAH' es $\frac{c}{2r}\frac{m^3}{3f}$. Restando el segundo sólido del primero, quedará el sólido formado por el triángulo $AFG = \frac{c}{2r} \cdot \frac{(f-g)m^3}{3fg}$. Si restamos este del otro, resultará la fórmula que sacamos antes por medio de la integracion, que por lo mismo representa la diferencia de los dos sólidos formados por las areas $FGED$, FGA.

Usos del cálculo integral para hallar las superficies curvas de los sólidos.

619 Trataremos aquí de las superficies de los sólidos de revolucion. Para cuyo fin imaginaremos que mien-
258. tras la curva AM dé la vuelta al rededor de AP, su porcion Mm infinitamente pequeña traza una zona ó faja, ó porcion de cono truncado que es el elemento de la superficie, y que es (I. 576) igual al producto de Mm por la circunferencia, cuyo radio fuese la perpendicular tirada desde el medio de Mm á AP, ó lo que es lo propio, una vez

que


243
244
247
248
251
252
253


241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253

que *Mm* es infinitamente pequeña, por la circunferencia Fig.
cuyo radio fuese *MP*, ó el diámetro *MM'*. Luego si llamamos p la razon entre el diámetro y la circunferencia, la circunferencia del círculo, cuyo diámetro fuese $MM' = 2y$, será $2py$. Será, pues, $2py\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ el elemento de la superficie de los sólidos de revolucion.

Si llamáramos u la curva *AM*, sería $Mm = du$; y substituyendo en $2py\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, du en lugar de $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ la fórmula se reducirá á estotra $2pydu$, que parece mas sencilla.

620 Cuestion I. *Hallar la superficie del cono recto* ABD.

Imaginemos el cono cortado por un plano *PMNG* paralelo á su base, y el ege *AB*. Si llamamos *AB*, a; *BC*, 259.
b; *PM*, y; y *AM*, u; los triángulos semejantes *ABC*, *AMP* darán $AB : BC :: AM : MP$; esto es, $a : b :: u : y = \frac{bu}{a}$. Substituyendo este valor de y en $2pydu$, resultará $\frac{2pbudu}{a}$ que será el elemento de la superficie del cono parcial *AMN*, cuya integral $\frac{pbu^2}{a}$ será el valor de la superficie del mismo cono. Quando $u = a$, la espresion $\frac{pbu^2}{a}$ espresará la superficie de todo el cono, y como entonces $\frac{pbu^2}{a} = \frac{pba^2}{a} = abp$, será la superficie convexa de todo el cono $= p \times AB \times BC$.

621 Cuestion II. *Hallar la superficie de la esfera* AMBDA, *cuyo radio* CM = a. 260.

Llamaremos *AP*, x; *PM*, y; *AM*, u; será $Mm = du$; $Pp = Mn = dx$. De los triángulos semejantes *CMP*, *Mmn*, sacarémos $PM : MC :: Mn : Mm$; esto es $y : a ::$

dx:

Fig. $dx : du = \frac{adx}{y}$. Substituyendo este valor de du en la fórmula $2pydu$, resultará $2padx$; y por consiguiente la superficie $= 2pax = AP \times$ circunf. $AMBM'A$. Como ap es la periferia del círculo $AMBM'$, y la periferia multiplicada por la mitad del radio a vale la area del espresado círculo; se sigue que dicha periferia multiplicada por a valdrá el duplo de dicha area, y que si la multiplicamos por $2a = AB$, el producto $AB \times$ perif. $AMBM'$ será quádruplo de la area del mismo círculo. Y como en el supuesto de ser $x = AB$, representa la fórmula la superficie de toda la esfera, es evidente que la superficie de toda la esfera es quádrupla de la area de uno de sus círculos máximos, conforme ya lo tenemos averiguado (I. 578) por otro camino.

Luego ya que $AP \times$ perif. $AMBM'$ es la superficie del segmento esférico $AM'PM$, inferiremos que la superficie de un segmento esférico es á la superficie toda la esfera :: $AP \times$ perif. $AMBM' : AB \times$ perif. $AMBM' :: AP : AB$, esto es, como la altura ó grueso del segmento al diámetro de la esfera.

622 Cuestion III. *Hallar la superficie del paraboloide que engendra la parábola* AM *al rededor de su ege.*

258. La equacion de esta curva $yy = ax$ dá $x = \frac{yy}{a}$, $dx = \frac{2ydy}{a}$, y $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$; luego $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dy^2 + \frac{4yydy^2}{aa})} = dy\,\frac{\sqrt{(aa+4yy)}}{\sqrt{aa}}$. Luego la fórmula $2pydu$ se transformará en $\frac{2pydy}{a} \times (a^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}$, cuya integral es (509) $\frac{p \times (a^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}{6a}$; completando esta integral como pide el

su-

supuesto de $y = 0$ (501), será $\frac{p(a^2 + 4yy)^{\frac{3}{2}}}{6a} - \frac{pa^2}{6}$ el valor cabal de la superficie del paraboloide. Fig.

623 Cuestion IV. *Hallar la superficie de un esferoide.* 261.

Supongamos que *ACFHG* represente la una mitad del esferoide propuesto, engendrado por la revolucion de la semielipse *FAG* al rededor del ege *AH*; y llamemos *AH*, a; *FH* ó *HG*, c; *BH*, x; *BC*, y; *FC*, u. La naturaleza de la curva dará $y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$; luego $dy = -\frac{cxdx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; y por consiguiente $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right)} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - (aa - cc)xx}}{a\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - b^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ (con hacer $\sqrt{(a^2 - c^2)} = b$) $= \frac{bdx\sqrt{\left(\frac{a^4}{bb} - x^2\right)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Por consiguiente $2pydu$ será $\frac{2pbcdx}{aa}\sqrt{\left(\frac{a^4}{bb} - x^2\right)}$, cuya integral espresada por una serie infinita es $2pcx \times \left(1 - \frac{b^2x^2}{2.3a^4} - \frac{b^4x^4}{2.4.5a^8} - \frac{3b^6x^6}{2.4.6.7a^{12}}\right)$.

La integral del elemento hallado de la superficie del esferoide se puede hallar mas facilmente por medio de la quadratura del círculo. Porque si desde el centro *H*, y con un radio igual á $\frac{aa}{b}$ trazamos el círculo *IER*, y prolongamos hasta *E* la ordenada *BC*; es evidente que $BE = \sqrt{\left(\frac{a^4}{bb} - xx\right)}$, y que el elemento de la area *EIHB* será $dx\sqrt{\left(\frac{a^4}{bb} - xx\right)}$, que tendrá con el elemento $\frac{2pbcdx}{aa}\sqrt{\left(\frac{a^4}{bc} - xx\right)}$ de la superficie la misma razon que 1 con $\frac{2pbc}{aa}$, y sus integrales tendrán tambien la misma razon. Y como la última espresa la superficie *CFGD*, se sigue que

Fig. $\frac{2pbc}{aa} \times BEIFH = 2p \times \frac{FH}{HI} \times BEIFH$.

Es de reparar que esta resolucion sirve para el esferoide prolongado; pero si fuese AH el ege menor, el esferoide engendrado por la semielipse FAG será aplanado, y como AH sería menor que FH, el valor de $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$ sería imposible. Pero si hiciéramos $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$ y $m = \frac{a^2}{b}$, la cantidad $\frac{2pbcdx}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{bb} + x^2\right)}$ sería $= \frac{2pcdx}{m}\sqrt{(m^2 + x^2)} = \frac{2pc}{m} \times dx\sqrt{(m^2 + x^2)}$. La integral de esta diferencial se hallará por medio de los logaritmos; porque podemos transformar la parte variable $dx\sqrt{(m^2 + x^2)}$ en

$$\frac{dx(m^2 + x^2)}{\sqrt{(m^2 + x^2)}} = \frac{m^2dx + x^2dx}{\sqrt{(m^2 + x^2)}} = \frac{m^2xdx + x^3dx}{\sqrt{(m^2x^2 + x^4)}} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}m^2xdx + x^3dx}{\sqrt{(m^2x^2 + x^4)}} + \frac{\frac{1}{2}m^2xdx}{\sqrt{(m^2x^2 + x^4)}}$$; de cuya espresion el primer término se integrará por lo dicho (492), y hallaremos que su integral $= \frac{1}{2}\sqrt{(m^2x^2 + x^4)}$; y añadiéndola á esta cantidad la integral del otro término $\frac{\frac{1}{2}m^2xdx}{\sqrt{(m^2x^2 + x^4)}}$ ó $\frac{\frac{1}{2}m^2dx}{\sqrt{(m^2 + x^2)}}$ (545), sacaremos $\frac{1}{2}x\sqrt{(m^2 + x^2)} + \frac{1}{2}m^2 \times L\left[x + \sqrt{(m^2 + x^2)}\right]$, que será la integral de $dx\sqrt{(m^2 + x^2)}$. Multiplicándola por $\frac{2pc}{m}$, y practicando lo dicho (501) resultará $\frac{pcx}{m} \times \sqrt{(m^2 + x^2)} + pcm \times L.\left[\frac{x + \sqrt{(m^2 + x^2)}}{m}\right]$ que será el valor de la superficie del esferoide aplanado.

624 Cuestion V. *Hallar la superficie de un conoide hyperbólico.*

Lla-

Llamemos a el primer ege de la hypérbola generatriz; Fig. c, su conjugado; y x la distancia entre la ordenada, y el centro de la curva. Por la propiedad de la hypérbola será $y = \frac{c}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$; luego $dy = \frac{cxdx}{a\sqrt{(xx - aa)}}$, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ será $\frac{dx\sqrt{[(a^2 + c^2)x^2 - a^4]}}{a\sqrt{(xx - aa)}}$, y $2py\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ será $\frac{2pcdx}{aa} \times \sqrt{[(aa + cc)\,xx - a^4]}$, que con suponer $\frac{a^4}{aa + cc} = m^2$ será $\frac{2pcdx}{m}\sqrt{(x^2 - m^2)}$, cuya integral hallaremos por el mismo camino que en la última cuestion $= \frac{pcx\sqrt{(xx - mm)}}{m} - pcm \times L[x + \sqrt{(x^2 - m^2)}]$, y añadiendo la constante hallada con suponer $x = a$, será $\frac{pcx}{m}\sqrt{(xx - mm)} - pc - pcm \times L.\left[\frac{x + \sqrt{(x^2 - m^2)}}{a + \frac{cm}{a}}\right]$, que será el verdadero valor de la superficie del conoide hyperbólico.

625 Cuestion VI. *Hallar la superficie del sólido llamado* Groin.

Sea $cgef$ una seccion del sólido paralela á su base, 262. y llamemos x la distancia á que está del vértice A; llamemos z el arco correspondiente An de la seccion semicircular NnA; y su radio $AB = BN, a$.

Consta (539) que $dz = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, multiplicando esta cantidad por $2\sqrt{(2ax - xx)}$ valor de $ge = 2gn$, resultará $2adx$ (619) que será el elemento de una de las quatro superficies iguales convexas que terminan el sólido. Luego toda la superficie del sólido, no contando la de la base, será $= 8a^2$, que por consiguiente es cabalmente dupla de la base.

Si el groin fuese de otra especie, como si las dos secciones iguales que pasan por el medio de los lados opuestos en vez de ser círculos fuesen otras curvas, se sacaria del mismo modo su superficie. Si las espresadas secciones fuesen, por egemplo, parábolas; como la superficie de un conoide parabólico $= \frac{p(aa + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}{6a} - \frac{pa^2}{6}$ (622) la superficie convexa de un groin en el supuesto de ser AnN una parábola, sería $\frac{4(a^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}}}{6a} - \frac{4a^2}{6}$.

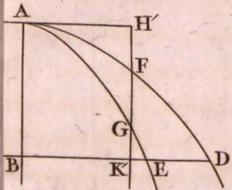
Método para reducir en algunos casos la integracion de una diferencial propuesta á la de otra diferencial conocida, y para conocer quando es posible esta reduccion.

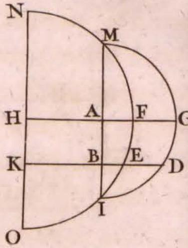
626 Aunque nos ceñiremos aquí á las diferenciales binomias, qualquiera se hará cargo de que quanto digésemos se podrá tambien aplicar á las diferenciales mas compuestas.

Supongamos primero que la diferencial propuesta es $bx^s dx(a + bx^n)^p$, y que su integracion se ha de reducir á la integracion de la diferencial $x^m dx(a + bx^n)^p$; ó lo que es lo propio, supongamos primero que lleve cada binomio un mismo esponente.

Supondremos $S.\, bx^s dx\,(a + bx^n)^p = (a + bx^n)^{p+1} \left(Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} + \ldots . Px^{k+tq}\right) + S.Rx^m dx(a + bx^n)^p$; siendo k y q esponentes incógnitos; t, un número entero positivo; A, B, C, P, R &c. coefi-

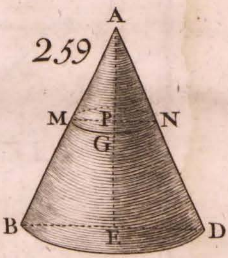
cien-

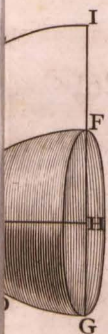




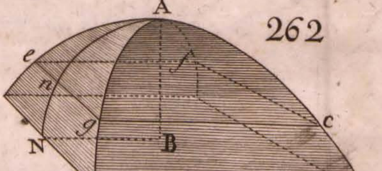
256

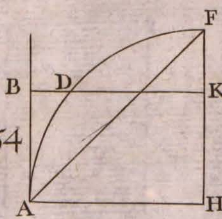
259



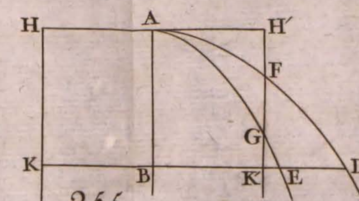


262

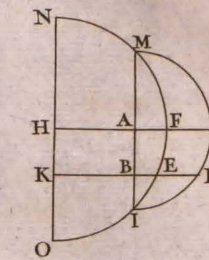




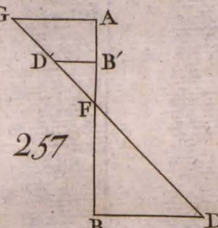
254



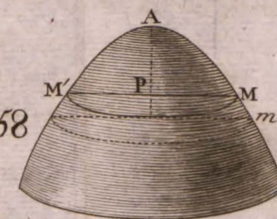
255



256

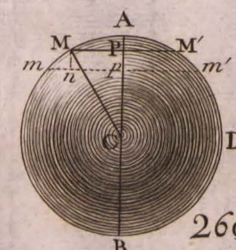


257

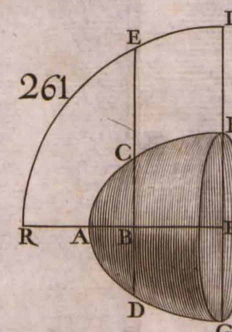


258

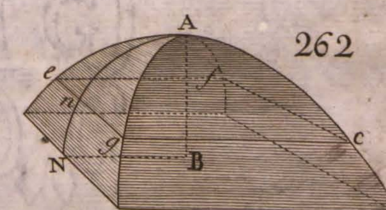
259



260



261



262

cientes constantes, tambien incógnitos. Si diferenciamos, resultará $hx^s dx(a+bx^n)^p = (p+1)nbx^{n-1}dx\,(a+bx^n)^p$ $(Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} \ldots\ldots + Px^{k+tq}) + (a+bx^n)^{p+1}\,(kAx^{k-1}dx + (k+q)\,(Bx^{k+q-1}\,dx) + (k+2q)\,(Cx^{k+2q-1}dx) \ldots\ldots + (k+tq)\,Px^{k+tq-1}\,dx + Rx^m dx(a+bx^n)^p$, ó dividiendo todo por $(a+bx^n)^p dx$, sacaremos $hx^s = (p+1)\,nbx^{n-1}\,(Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} \ldots + Px^{k+tq}) + (a+bx^n)\,(kAx^{k-1} + (k+q)\,Bx^{k+q-1} + (k+2q)Cx^{k+2q-1} \ldots\ldots + (k+tq)Px^{k+tq-1} + Rx^m$.

Para que se verifique esta equacion, sea el que fuere el valor de x, es preciso que despues de egecutadas la multiplicacion y transposicion, la suma de las cantidades que multiplicaren una misma potencia de x, sea cero; con esto se podrán determinar los coeficientes A, B, C &c. pero para esto es indispensable que el número de las potencias de x, que esta equacion llevare no sea mayor que el número de dichos coeficientes.

Pero el número de estos es $t+2$, como es facil comprobarlo; veamos, pues, quál será el de las potencias de x. Para conseguirlo, hemos de determinar k y q.

Como los esponentes k y q son indeterminados, los determinaremos del modo siguiente. Supongamos que sea $k-1$ el menor esponente indeterminado que lleva la equacion; le igualarémos con m ó s, segun fuere m ó s el esponente menor. El mayor esponente que llevare la equacion, será $k+tq+n-1$, segun se echa de ver; le igua-

la-

laremos con s, si hubiéremos igualado $k - 1$ con m, ó le igualáremos con m, si hubiéremos igualado $k - 1$ con s.

Supongamos $k - 1 = m$; tendremos, pues, $k + tq + n - 1 = s$. Sentado esto, para que no haya en la equacion mas potencias de x, que coeficientes indeterminados, es preciso que los esponentes de x en la equacion compongan tambien una progresion arismética, cuya diferencia sea q, y no puede dejar de ser así una vez que hemos supuesto $k - 1 = m$, $k + tq + n - 1 = s$, y t un número entero positivo. Pero como el término mayor de esta progresion es $k + tq + n - 1$, y $k - 1$ es el menor; es facil probar que el número de los términos de esta progresion es (II. 169) $\frac{k + tq + n - 1 - k + 1}{q} + 1$ ó $\frac{tq + n}{q} + 1$; es, pues, preciso que $\frac{tq + n}{q} + 1 = t + 2$; y por consiguiente $q = n$: si substituimos en lugar de q y k su valor en la equacion $k + tq + n - 1 = s$, resultará $tn + m + n = s$, y por lo mismo $t = \frac{s - m - n}{n} = \frac{s - m}{n} - 1$. Luego será posible reducir una diferencial á otra, quando la diferencia $s - m$ de los esponentes de x fuera de los dos binomios, divididos por el esponente de x en el binomio, diere al cociente un número entero positivo; en cuyo caso se supondrá $S. x^s dx\,(a + bx^n)^p = (a + bx^n)^{p+1}(Ax^{m+1} + Bx^{m+n+1} + Cx^{m+2n+1} \ldots + Px^{s-n+1}) + S. Rx^m dx\,(a + bx^n)^p$; y para determinar los coeficientes A, B, C, P, R &c. diferenciaremos, dividiremos por $(a + bx^n)^p dx$, egecutaremos las operaciones que estuvieren indicadas, lo pasaremos todo á un mismo miembro, é igualaremos con

ce-

cero la suma de las cantidades que multiplicaren una misma potencia de x, y tendremos con esto otras tantas equaciones como coeficientes indeterminados hubiere.

627 Se echa de ver que en el supuesto de referirse $S.x^s dx\,(a + bx^n)^p$ á $S.x^m dx(a + bx^n)^p$, esta última se ha de referir igualmente á la primera; pero practicando lo que antes, para reducir $S.\,x^m dx(a + bx^n)^p$ á $S.x^s dx\,(a + bx^n)^p$, hallaríamos que $\frac{m-s}{n}$ ha de ser un número entero positivo, y que habríamos de suponer $S.\,x^m dx\,(a + bx^n)^p = (a + bx^n)^{p+1}\left(Ax^{s+1} + Bx^{s+n+1}\ \&c. + Px^{m-n+1}\right) + S.\,Rx^s dx(a + bx^n)^p$; luego aunque sea s mayor ó menor que m, con tal que $\frac{s-m}{n}$ ó $\frac{m-s}{n}$ sea un número entero positivo, siempre se podrá reducir la una de las dos diferenciales á la otra, substituyendo en lugar del primer esponente de x en la serie $Ax^k + Bx^{k+q}$ &c. el menor de los dos esponentes m y s, despues de añadirle la unidad, y, substituyendo en lugar de q el esponente que llevare x en el binomio.

Por egemplo, si quisiéramos reducir $x^4 dx\,(bb - xx)^{\frac{1}{2}}$ á $dx(bb - xx)^{\frac{1}{2}}$, que pende de la quadratura del círculo, echaríamos de ver que en este caso $s - m$ sería $4 - 0$, que dividido por n, esto es por 2, dá el cociente 2 que es un número entero; luego es posible la reduccion; y porque la fórmula $t = \frac{s-m}{n} - 1$ dá $t = 1$, y el menor esponente $m = 0$, substituiremos 1 en lugar de k; haremos, pues, $S.\,x^4 dx(bb - xx)^{\frac{1}{2}} = (bb - xx)^{\frac{3}{2}}\,(Ax + Bx^3) + S.Rdx(bb - xx)^{\frac{1}{2}}$. Hecho esto, diferenciaremos, dividiremos

por $(bb - xx)^{\frac{1}{2}}dx$, traspasaremos, y saldrá

$$\begin{aligned} 0 = \; & Abb - Ax^2 - 3Bx^4 \\ & + R + 3Bbbx^2 - x^4 \\ & \qquad - 3Ax^2 - 3Bx^4; \end{aligned}$$

de donde inferiremos $-6B - 1 = 0$, $-4A + 3Bbb = 0$, $Abb + R = 0$; luego $B = -\frac{1}{6}$, $A = -\frac{1}{8}bb$, $R = \frac{1}{8}b^4$; luego $S.x^4dx(bb - xx)^{\frac{1}{2}} = (bb - xx)^{\frac{3}{2}}(-\frac{1}{8}bbx - \frac{1}{6}x^3) + \frac{1}{8}b^4 S.dx\sqrt{(bb - xx)} + C.$

Facilita, pues, este método el hallar las diferenciales que se reducen á una diferencial dada, y por consiguiente las que se refieren á la quadratura del círculo, de la elipse, y de la hypérbola; de cuyas diferenciales es facil hallar las diferentes espresiones, por medio de las diferentes equaciones de las mismas curvas.

628 Repararemos de cámino que este método dá tambien las diferenciales binomias integrables; porque lo mismo es indagar entre las diferenciales como esta $hx^s dx (a + bx^n)^p$ quáles son integrables, que buscar quáles son las que se reducen á $Rx^{n-1}dx(a + bx^n)^p$, que por lo dicho (509) se integra inmediatamente. Pero de lo dicho (626) se sigue que $\frac{s-n+1}{n}$ ha de ser un número entero positivo; esto es, que $\frac{s+1}{n}$ ha de ser un número entero positivo, cuya consecuencia quadra con lo que digimos antes (510).

629 Supongamos ahora que sean diferentes los esponentes de los binomios que hay en las diferenciales de que estamos tratando; por manera que la diferencial propues-

puesta sea $bx^s dx(a+bx^n)^r$, y sea $x^m dx(a+bx^n)^p$ la diferencial á la qual nos proponemos reducirla, siendo el valor numérico de p menor que el valor numérico de r. Si fuere r positiva, transformaremos la diferencial $bx^s dx\,(a+bx^n)^r$ en estotra $bx^s dx(a+bx^n)^{r-p} \times (a+bx^n)^p$. Y si fuese $r-p$ un número entero positivo, podremos reducir $bx^s dx\,(a+bx^n)^{r-p} \times (a+bx^n)^p$ á una serie de términos de esta forma $(A'x^s + B'x^{s+n} + C'x^{s+2n}$ &c.$)\,dx(a+bx^n)^p$, y se podrá reducir cada uno de ellos á $x^m dx\,(a+bx^n)^p$ por el método antecedente si $s-m$ fuese divisible por n; y para reducirlos todos juntos, se practicará al pie de la letra quanto manda el espresado método, tomando en lugar de la cantidad que allí llamamos s, el mayor esponente de x, en el valor que tuviere x en $bx^s dx\,(a+bx^n)^{r-p}$ despues de elevado el binomio á la potencia $r-p$.

Si quisiéramos reducir, por egemplo, $S.\,x^2 dx\,(bb-xx)^{\frac{3}{2}}$ á $S.\,dx(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$, transformaríamos $S.\,x^2 dx\,(bb-xx)^{\frac{3}{2}}$ en $S.\,x^2 dx(bb-xx)\,(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$ ó $S.\,(bbx^2 dx - x^4 dx)\,(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$, en cuyo caso en lugar de s habríamos de substituir 4. Supondríamos, pues, arreglándonos al método, $S.\,(bbx^2 dx - x^4 dx)\,(bb-xx)^{\frac{1}{2}} = (bb-xx)^{\frac{3}{2}}(Ax+Bx^3) + S.\,Rdx(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$.

Si al contrario fuese negativo el valor de r, prepararíamos la diferencial á la qual quisiésemos reducir la propuesta, dándola esta forma $x^m\,dx\,(a+bx^n)^{p-r}$ $(a+bx^n)^r$. Si en este caso fuese $p-r$ un número entero, que será indispensablemente positivo, una vez que su-

ponemos r negativa y mayor que p, siendo por otra parte p lo que se quisiere, se podrá reducir $x^m dx(a+bx^n)^{-r}$ $(a+bx^n)^r$ á una serie finita de términos de esta forma $(A'x^m + B'x^{m+n} + C'x^{m+2n} + \&c.)\ (a+bx^n)^r$. Hecho esto, se harán las mismas operaciones que si se hubiese de reducir la última á la forma $x^s dx(a+bx^n)^r$; quiero decir que se practicará lo propio que quando r era positiva.

Supongamos, por egemplo, que se haya de reducir $gx^{-2}dx(aa+xx)^{-2}$ á $dx(aa+xx)^{-1}$ ó $\frac{dx}{aa+xx}$, cuya integral es (589) un arco de círculo cuya tangente es x, y el radio a. Transformaríamos $dx\,(aa+xx)^{-1}$ en $(aa+xx)dx\,(aa+xx)^{-2}$; y como el menor esponente fuera del binomio propuesto es -2, supondriamos $S.\,R(aa+xx)dx\,(aa+xx)^{-2} = (aa+xx)^{-1}\ (Ax^{-1} + Bx) + S.\,gx^{-2}dx\,(aa+xx)^{-2}$, y proseguiríamos del mismo modo que antes para determinar los coeficientes A, B, R. Hecho esto, sacaríamos por medio de la transposicion el valor de $S.\,gx^{-2}dx(aa+xx)^{-2}$, en el qual reduciríamos despues $R(aa+xx)\,dx\,(aa+xx)^{-2}$ á $Rdx(aa+xx)^{-1}$.

De las Fracciones racionales.

630 No hay cantidad alguna diferencial que no se pueda integrar, ó algebráicamente, ó por arcos de círculo, ó por logaritmos, ó por estos tres métodos juntos, ó solo por dos.

Es

Es siempre integrable algebráicamente, quando no lleva denominador variable, á no ser que este denominador sea monomio, excepto sin embargo el caso de no pasar el denominador de la primera potencia, conforme hemos visto (476).

Nos queda, pues, probar que es verdadera la proposicion en los demás casos; esto es quando la diferencial propuesta lleva un denominador racional complexo.

Supondremos que en el numerador de la fraccion diferencial propuesta, la variable esté menos elevada que en el denominador. Si no lo estuviese, sería facil conseguir que lo estuviera dividiendo el numerador por el denominador, hasta que la potencia residua fuese menor que en el denominador. Por egemplo, si hubiéramos de integrar $\frac{x^3dx}{aa+3ax+xx}$, empezaríamos dividiendo x^3dx por $xx+3ax+aa$; sacaríamos el cociente xdx, y la resta $-3ax^2dx-aaxdx$; dividiríamos esta resta por el mismo denominador, y saldria el cociente $-3adx$, y la resta $+8a^2xdx+3a^3dx$. Hecho esto, en lugar de $\frac{x^3dx}{aa+3ax+xx}$, integraríamos $xdx-3adx+\frac{8a^2xdx+3a^3dx}{aa+3ax+xx}$.

A fin de hallar un método que nos dirija en la integracion de las fracciones diferenciales racionales, hemos de tener presente que como la diferencial del logaritmo de una cantidad es la diferencial de dicha cantidad, dividida por la cantidad misma, ó es una fraccion; es natural sospechar que la integracion de las fracciones racionales podrá reducirse en muchos casos á los logaritmos. Sirva de

egemplo $2aL(a+x) - 2aL(2a+x)$; diferenciando tendremos $\frac{2adx}{a+x} - \frac{2adx}{2a+x}$, ó $\frac{2aadx}{2aa+3ax+xx}$ despues de reducidos ambos términos á un mismo denominador. Se viene á los ojos que para integrar esta faccion, no habria otra cosa que hacer sino resolverla en dos fracciones, tales que el denominador de la una fuese $a+x$, y el de la otra $2a+x$; y cuyos numeradores fuesen números constantes multiplicados por dx; estas dos fracciones se integrarian despues por logaritmos.

631 Es, pues, muy natural intentar resolver estas fracciones, para integrarlas, en otras tantas fracciones simples, como factores puede tener el denominador, de las quales cada una tenga por denominador uno de dichos factores; este es con efecto el camino que se puede, y debe seguir, quando son desiguales todos los factores, de cuya multiplicacion puede ser el denominador el resultado.

632 Pero quando el denominador tiene algunos factores iguales unos á otros, no sirve este método; porque no puede entonces reducirse enteramente á los logaritmos la integracion. Con efecto, si la propuesta fuese $\frac{dx}{(a+x)^2}$, cuyo denominador tiene dos factores iguales $a+x$, y $a+x$, hallaríamos (492) que la integral de esta cantidad, ó de su igual $dx(a+x)^{-2}$ es $-(a+x)^{-1}+C$, que no pende de los logaritmos. Pero al mismo tiempo se echa de ver, que si diferenciáramos una cantidad como esta $\frac{aa}{a+x}+2aL(a+x)+2aL(2a+x)-aL(3a+x)$, sacaríamos

mos $\frac{-aadx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{a+x} + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x}$ ó $\frac{(2ax+aa)dx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x}$, ó con reducirlo todo al mismo denominador, $\frac{10a^4dx+26a^3xdx+17a^2x^2dx+3ax^3dx}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)}$; cuya fraccion se integraría con transformarla en $\frac{2ax+aa}{(a+x)^2}dx + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x}$, esto es, con resolverla en tres fracciones, tales que el denominador de la primera constase de todos los factores iguales, llevando su numerador todas las potencias de x menores que la mayor potencia del denominador; por lo que mira á las otras dos fracciones, el denominador de cada una sería uno de los factores desiguales; y no llevarian en el numerador ninguna potencia de x. Este es con efecto el método por el qual se puede integrar qualquiera fraccion racional, y le practicaremos quando el denominador no tuviese factores imaginarios; dejando para despues declarar lo que hay que hacer en este último caso.

Supondremos que $\frac{(a+bx+cx^2+\ldots kx^{n-1})dx}{(M+Nx+Px^2+\ldots Tx^n)}$

representa en general qualquiera fraccion racional; si suponemos que tiene el denominador un número m de factores iguales á $x+g$, un número p de factores iguales á $x+h$, y un número qualquiera de factores desiguales como $x+i$, $x+q$, $x+n$ &c. en cuyos supuestos la fraccion propuesta

será $\frac{(a+bx+cx^2+\ldots kx^{n-1})dx}{(x+g)^m(x+h)^p \times \&c.\ (x+i)\ (x+q)\ (x+n)}$;

para integrar esta fraccion, habremos de suponer

$$\frac{(a+bx+cx^2+\ldots\ldots kx^{n-1})dx}{(x+g)^m\,(x+h)^p \times \&c.\,(x+i)\,(x+q)\,(x+n) \times \&c.}$$

$$=\frac{Ax^{m-1}dx+Bx^{m-2}dx\ldots.+Rdx}{(x+g)^m}+\frac{A'x^{p-1}dx+B'x^{p-2}dx+\ldots.R'dx}{(x+h)^p}\ \&c.$$

$+\frac{Qdx}{x+i}+\frac{Mdx}{x+q}+\frac{Ndx}{x+n}+$ &c. siendo A, B, C &c. coeficientes constantes é indeterminados. Y si consiguiéramos determinarlos por algun camino, tendríamos averiguada la integral. Esto es cierto por lo que toca á las fracciones simples $\frac{Qdx}{x+i}$, $\frac{Mdx}{x+q}$, $\frac{Ndx}{x+n}$ &c. cuya integral es $QL(x+i)$, $ML(x+q)$, $NL(x+n)$ &c. Por lo que mira á las fracciones $\frac{Ax^{m-1}dx+Bx^{m-2}dx+\ldots\ldots Rdx}{(x+g)^m}$, haremos para abreviar $x+g=z$, de donde sacaremos $x=z-g$, y $dx=dz$. Substituyendo estos valores, quedará todo reducido á una serie de monomios fáciles de integrar, y entre los quales no habrá mas que uno de la forma $\frac{dz}{z}$, que se integrará por logaritmos. En quanto á los términos

$$\frac{A'x^{p-1}dx+B'x^{p-2}dx+\ldots T'dx}{(x+h)^p},$$ haremos $x+h=z'$. Por consiguiente no son mas que dos los puntos que nos toca averiguar. 1.° como se hallan los factores del denominador de la fraccion racional. 2° como se hallan los coeficientes indeterminados.

Los

633 Los factores del denominador se hallan buscando las raices de la equacion que resultaría de hacer dicho denominador igual á cero ; porque lo mismo es resolver una equacion que buscar los factores binomios de cuya multiplicacion resulta dicha equacion ; para cuyo fin sirven los métodos declarados (II. 235 y sig.).

634 Para determinar los coeficientes A, B, C, parece natural reducir á un mismo denominador las fracciones en que están ; entonces los dos miembros de la equacion que formare la fraccion propuesta con las nuevas fracciones tendrán un mismo denominador ; se podrá , pues, omitir en ambos miembros este denominador , y pasándolo todo á un mismo miembro , será menester para que se verifique la equacion , sea el que fuere el valor de x , que sea cero la suma de los términos que multiplicaren una misma potencia de x. Con esto se formarán tantas equaciones quantos fueren los coeficientes indeterminados , que servirán para determinarlos.

Propongámonos integrar , por egemplo , $\frac{dx}{aa-xx}$; supondremos $\frac{dx}{aa-xx} = \frac{Adx}{a+x} + \frac{Bdx}{a-x}$, porque los dos factores del denominador $aa - xx$ son $a + x$ y $a - x$. Reduciéndolo todo á un mismo denominador resultará $\frac{dx}{aa-xx} = \frac{(Aa-Ax+Ba+Bx)dx}{aa-xx}$; omitiendo el denominador comun, dividiendo por dx, y traspasando sacaremos

$$\begin{aligned} 1 + Ax &= 0; \\ -Aa - Bx & \\ -Ba & \end{aligned}$$

luego $1 - Aa - Ba = 0$, y $A - B = 0$, de donde re-

resultará $A = \frac{1}{2a}$, $B = \frac{1}{2a}$; luego $\frac{dx}{aa - xx} = \frac{\frac{1}{2a}dx}{a + x} + \frac{\frac{1}{2a}dx}{a - x}$, cuya integral es $S. \frac{dx}{aa - xx} = \frac{1}{2a} L(a + x) - \frac{1}{2a} L(a - x) + C = \frac{1}{2a} L\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$.

Integremos ahora la fraccion $\frac{10a^4dx + 26a^3xdx + 17a^2x^2dx + 3ax^3dx}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)}$ que sacamos (632) diferenciando $\frac{aa}{a+x} + 2aL(a + x) - aL(3a + x)$. Supondremos, pues, $\frac{10a^4dx + 26a^3xdx + 17a^2x^2dx + 3ax^3dx}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)} = \frac{(Ax+B)dx}{(a+x)^2} + \frac{Cdx}{2a+x} + \frac{Ddx}{3a+x}$; si lo reducimos todo al mismo denominador, omitimos despues el denominador comun, dividimos por dx, y traspasamos, sacaremos

$$\left.\begin{array}{llll} 10a^4 & + 26a^3x & + 17a^2x^2 & + 3ax^3 \\ - 6Ba^2 & - 5Bax & - Bx^2 & - Ax^3 \\ - 3Ca^3 & - 6Aa^2x & - 5Aax^2 & - Cx^3 \\ - 2Da^3 & - 7Ca^2x & - 5Cax^2 & - Dx^3 \\ & - 5Da^2x & - 4Dax^2 & \end{array}\right\} = 0;$$

luego $3a - A - C - D = 0$, $17a^2 - B - 5Aa - 5Ca - 4Da = 0$, $26a^3 - 5Ba - 6Aa^2 - 7Ca^2 - 5Da^2 = 0$, $10a^4 - 6Ba^2 - 3Ca^3 - 2Da^3 = 0$, de donde sacaremos $A = 2a$, $B = a^2$, $C = 2a$, $D = -a$. Por consiguiente la diferencial propuesta se transformará en estotra $\frac{(2ax+aa)dx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x}$, la misma cabalmente que hallamos antes. La integral de los dos últimos términos es patentemente $2aL(2a + x) - aL(3a + x)$; y por lo que mira al término $\frac{2ax+aa}{(a+x)^2}dx$, haremos $a + x = z$, y saldrá $x = z - a$, y $dx = dz$; tendremos, pues, $\frac{(2az-aa)dz}{zz}$

ó

ó $\frac{2adz}{z} - \frac{aadz}{zz}$; cuya integral es $2aLz + \frac{aa}{z}$ ó $2aL(a+x)$ $+ \frac{aa}{a+x}$; por consiguiente la integral total es $\frac{aa}{a+x} +$ $2aL(a+x) + 2aL(2a+x) - aL(3a+x)$.

635 Este es el método general; pero hay otros muchos que facilitan la determinacion de los coeficientes. Por egemplo, se pueden hallar los coeficientes de las fracciones simples, sin que sea preciso conocer el valor de los unos para averiguar el de los demas. Sea $\frac{Ndx}{M}$, por egemplo, la fraccion propuesta; $hx+a$ uno de los factores del denominador, y P el cociente de M dividido por hx $+a$. Imaginemos $\frac{Ndx}{M}$ resuelta en $\frac{Adx}{hx+a}$, y $\frac{Qdx}{P}$; tendremos $\frac{Ndx}{M} = \frac{Adx}{hx+a} + \frac{Qdx}{P}$, ó $\frac{N}{M} = \frac{A}{hx+a} + \frac{Q}{P}$; luego reduciendo al mismo denominador, y teniendo presente el supuesto de ser $P = \frac{M}{hx+a}$ ó $P \times (hx+a) = M$, sacaremos $N = AP + Q(hx+a)$. Pero como de la diferenciacion de la equacion $(hx+a)P = M$ sacamos $hPdx + (hx+a)dP$ $= dM$; y se ha de verificar esta equacion igualmente que la equacion $N = AP + Q(hx+a)$ sea el que fuere el valor de x, se verificarán tambien las dos equaciones qualquiera cantidad que se substituya en lugar de x. Substituyamos, pues, en lugar de x el valor que dá el resultado mas sencillo; quiero decir, que substituyamos en lugar de x el valor $-\frac{a}{h}$ que resulta de suponer el denominador $hx+a = 0$; en virtud de esto tendremos $hPdx = dM$, y $N = AP$. Substituyendo en la segunda el valor $P = \frac{dM}{hdx}$, que dá la primera, resultará $A = \frac{hNdx}{dM}$; luego para hallar el numerador A de qualquiera de las fracciones sencillas, se

ha

ha de dividir el numerador Ndx de la propuesta, por la diferencial dM de su denominador, y substituyendo en lugar de x el valor que resultaría de suponer igual á cero el denominador de la fraccion sencilla, se multiplicará el resultado por el coeficiente que llevare x en dicho denominador simple.

Por egemplo, para determinar los numeradores A y B de las fracciones $\frac{Adx}{a+x}$ y $\frac{Bdx}{a-x}$, en que resolvimos antes la fraccion $\frac{dx}{aa-xx}$, diferenciaremos el denominador $aa-xx$, y resultará $-2xdx$. Dividiremos, pues, el numerador dx de la propuesta por $-2xdx$, y sacaremos $-\frac{1}{2x}$; y substituyendo succesivamente en esta espresion en lugar de x las cantidades $-a$ y a, que son los valores de x que resultan de suponer succesivamente iguales á cero los denominadores $a+x$ y $a-x$ de las fracciones parciales, y multiplicando por los valores 1 y -1 de h, sacaremos $\frac{1}{2a}$, y $\frac{1}{2a}$ que serán los valores de A y B, los mismos que hallamos antes.

636 Aunque son generales las reglas que acabamos de dar para integrar las fracciones racionales; no obstante quando son imaginarios algunos de los factores del denominador, se hallan integrales compuestas de imaginarias, cuyas integrales no dejan de ser reales; pero con dificultad se reducen á una forma real. Lo que importa en este caso es sacar todos los factores reales del denominador; hecho esto, se resuelve lo demas, no en factores del primer grado, sino en factores del segundo, que siempre serán

rán (II. 198) reales. Despues se formará respecto de cada factor del segundo grado que podemos representar por $ax^2 + bx + c$, una fraccion como $\frac{Axdx + Bdx}{ax^2 + bx + c}$, y se determinan los coeficientes como antes.

637 Si entre los factores del segundo grado, los hubiese iguales unos con otros, se tomará respecto de cada grupo ó conjunto de factores iguales una fraccion de esta forma $\frac{Ax^{2n-1}dx + Bx^{2n-2}dx + \ldots. Qdx}{(ax^2 + bx + c)^n}$, representando n el número de los factores $ax^2 + bx + c$, que son iguales unos con otros.

638 Ya no nos falta sino declarar cómo se integran estas cantidades. Empecemos por la primera.

Supongamos, para mayor brevedad, que la fraccion parcial esté reducida á esta forma $\frac{A'xdx + B'dx}{x^2 + a'x + b'}$, conforme se puede conseguir siempre que se quiere, con dividir sus dos términos por a.

Hecho esto, eliminaremos el segundo término del denominador, haciendo $x + \frac{1}{2}a' = z$, de donde resulta $x = z - \frac{1}{2}a'$, y $dx = dz$; si substituimos, sacaremos una cantidad de esta forma $\frac{Czdz + Ddz}{zz + qq}$, cuya primera parte $\frac{Czdz}{zz + qq}$ se integra (543) por logaritmos, y la segunda se integra por un arco de círculo cuyo radio $= q$, y la tangente $= z$.

Por lo que mira á las cantidades de esta forma

$\frac{Ax^{2n-1}dx + Bx^{2n-2}dx + \ldots Qdx}{(x^2 + ax + b)^n}$; eliminaremos tambien el segundo término del denominador, y resultará una cantidad de esta forma $\frac{Mz^{2n-1}dz + Nz^{2n-2}dz + \ldots Tdz}{(zz + qq)^n}$, que integraremos con reducir á $\frac{dz}{zz+qq}$ (629) la integral de la suma de los términos en que llevare z esponentes pares. Por lo tocante á los términos cuyos esponentes fuesen impares se integrarán por lo dicho (510), ó reduciéndolos (628) á $\frac{zdz}{(zz + qq)^n}$.

Luego toda fraccion racional, ó se integra cabalmente, ó se integra por arcos de círculo, y logaritmos.

De algunas transformaciones que pueden facilitar las integraciones.

639 No es posible dar acerca de este punto reglas generales; la forma de las cantidades, el egercicio, y el tino del calculador le sugieren en los casos que ocurren las transformaciones mas á propósito.

Las transformaciones que vamos á proponer sirven para hacer que sean racionales las diferenciales propuestas, porque en consiguiendo esto se consigue tambien su integracion. Acerca de esto haremos algunas prevenciones.

640 Si no hubiere sino radicales monomios, se les darán esponentes fraccionarios, reduciéndolos todos á un mismo

mo denominador. Si $x^{\frac{k}{l}}$ representare una de estas cantidades despues de la espresada reduccion, haremos $x^{\frac{1}{l}} = z$, que dará $x = z^l$, y $dx = lz^{l-1}dz$. Se hará la substitucion correspondiente, y saldrá una cantidad enteramente racional. Por egemplo, si fuese la propuesta $\frac{dx\sqrt{x} + adx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}}$, la escribiríamos de este modo $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx + adx}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}$, despues la transformaríamos en $\frac{x^{\frac{3}{6}}dx + adx}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}}}$. Haciendo, pues, $x^{\frac{1}{6}} = z$, sacaríamos $x = z^6$, $dx = 6z^5dz$; y por consiguiente $\frac{6z^8dz + 6az^5dz}{z^4 + z^3}$, que se reduce á $\frac{6z^5dz + 6az^2dz}{z + 1}$, y se integrará facilmente en virtud de lo que hemos dicho acerca de las fracciones racionales.

641 Toda cantidad que no llevare mas que un radical complexo que no pasare del segundo grado, y cuya variable debajo del radical no pasare del segundo grado, se podrá transformar en cantidad racional practicando qualquiera de las dos reglas siguientes. 1.° Despues de despejado el quadrado de la variable que el radical abraza, se igualará dicho radical con la misma variable, mas ó menos otra variable. 2.° Ó se resolverá la cantidad afecta del radical en sus dos factores; y despues de resuelta se la igualará con el uno de sus factores, multiplicado por una nueva variable.

Pon-

Pongo por caso que haya de integrar $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$; puedo hacer $\sqrt{(xx-aa)} = x - z$; y sacaré $x = \frac{zz+aa}{2z}$. Luego $dx = \frac{(zz-aa)dz}{2zz}$, y $\sqrt{(xx-aa)} = \frac{aa-zz}{2z} = -\frac{(zz-aa)}{2z}$; de donde se saca que $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}} = -\frac{dz}{z}$, que es una cantidad facil de integrar.

Tambien podria hacer en el mismo caso $\sqrt{(xx-aa)}$ ó $\sqrt{[(x-a)\ (x+a)]} = (x-a)z$; quadrando y dividiendo despues por $x-a$, sacaría $x+a = (x-a)zz$, que daría $x = \frac{a+azz}{zz-1}$; $\sqrt{(xx-aa)} = \frac{2az}{zz-1}$; $dx = \frac{-4azdz}{(zz-1)^2}$; luego $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}} = \frac{-2dz}{zz-1}$, que se integra por el mismo método que las fracciones racionales.

642 Quando no hay segundo término en lo que coge el radical, se puede igualar el radical con una nueva variable multiplicada por la variable actual. Si la propuesta fuese, por egemplo, $\frac{dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$; podríamos hacer $\sqrt{(aa-xx)} = xz$. Y si la cantidad que el radical abraza llevare segundo término, tambien serviría esta transformacion, con tal que primero se eliminase dicho segundo término.

643 Finalmente, con la mira de hacer que sea racional una diferencial propuesta, se puede igualar la variable, ó una funcion qualquiera de la variable, con una nueva variable, ó con una funcion de una nueva variable, en la qual se dejará alguna cosa indeterminada que pueda servir para el intento del calculador. Pongo por caso que queramos saber en qué casos se podrá hacer que sea racional la cantidad $x^m dx\ (a+bx^n)^p$; haría $(a+bx^n)^p = z^q$, siendo q indeterminada; sacaría $a+bx^n =$

$z^{\frac{q}{p}}$; $x^n = \frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}$; $x = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$; $x^m = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$;

$dx = \frac{q}{npb} z^{\frac{q}{p} - 1} dz \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}\right)^{\frac{1}{n} - 1}$; luego $x^m dx (a + bx^n)^p = \frac{q}{npb} z^{\frac{q}{p} + q - 1} dz \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}\right)^{\frac{m}{n} + \frac{1}{n} - 1}$, que es integrable sea q lo que fuere, quando $\frac{m+1}{n} - 1$ es un número entero positivo ó cero (495); y que conseguiremos que sea racional, haciendo $q = p$, quando $\frac{m+1}{n} - 1$ fuere un número entero negativo. Y si el valor de p fuese $\pm \frac{k}{2}$, siendo k un número entero impar, reduciremos la propuesta al caso espresado (640) con hacer $q = k$, si fuese $\pm \frac{k'}{2}$ el valor de $\frac{m+1}{n}$, siendo k' un número entero impar.

644 No nos detendremos mas en especificar estas transformaciones. Solo prevendremos que se facilitan en muchos casos ciertas integraciones, igualando la variable con una fraccion de esta forma $\frac{1}{z}$. Si se nos propusiera, por egemplo, $\frac{x^{15}dx + adx}{x^{26} + x^{18}}$; con hacer $x = \frac{1}{z}$, sacaríamos $\frac{-z^3dz - az^{18}dz}{1 + zz}$, que por medio de la division se podrá reducir á una serie de monomios, y á una cantidad de la forma $\frac{Adz}{1 + zz}$, cuya integral ya tenemos averiguada.

De la integracion de las cantidades que llevan dos ó mas variables.

645 El que tuviere presente la regla que dimos (326) pa-

para diferenciar las cantidades que llevan muchas variables, echará de ver que para integrar, quando es posible, las diferenciales con muchas variables, se han de juntar todos los términos afectos de la diferencial de una misma variable, é integrarlos como si no hubiera mas variable que esta, esto es, como si todas las demás fuesen constantes. Si despues se diferencia dicha integral considerando succesivamente como variables todas las variables, y se resta el resultado de la diferencial propuesta, la integral que se hubiere hallado, será, añadiéndola una constante, la verdadera integral, en el supuesto de no quedar resta alguna. Si hubiere una resta, no llevará la variable que se consideró al tiempo de integrar; se practicará con èsta resta lo propio que antes, y se proseguirá del mismo modo respecto de cada variable.

Si me tocára integrar $3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$; tomaría los dos términos en que está dx; los integraría como si y fuese constante, y sacaría la integral $x^3y + y^5x$. Y como despues de diferenciada esta cantidad respecto de x é y, y restado el resultado de la diferencial propuesta, no queda nada, inferiré que la integral es $x^3y + y^5x + C$.

Si hubiera de integrar $x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy$; juntaría todos los términos afectos de dx; integraría tratando y y z como constantes, y saldria $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2}$. Pero como despues de restada de la propuesta la diferencial de esta cantidad, sacándola en el

su-

supuesto de ser variables x, y y z, queda la resta y^2dy, añado $\frac{y^3}{3}$, que es la integral de y^2dy, á la que hallé antes, y será por consiguiente $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$ la integral de la propuesta.

646 Pero como hay diferenciales con muchas variables que no se pueden integrar, es muy del caso dar una regla fija para conocer aquellas cuya integracion se puede conseguir.

647 Para esto es de reparar que si en una cantidad Q compuesta, como se quisiere, de otras dos cantidades x é y, se substituye primero en lugar de x una cantidad qualquiera p, y se substituye en el resultado en lugar de y una cantidad q, resultará lo mismo que si se hubiera empezado, substituyendo q en lugar de y, y despues p en lugar de x; esto no tiene dificultad.

648 De aquí se infiere, que si se diferencia una cantidad qualquiera Q compuesta de x, y y constantes, mirando primero sola x como variable, y se diferencia despues el resultado, mirando sola y como variable, se sacará lo propio que si se hubiera diferenciado, mirando primero sola y como variable, y despues el resultado, mirando sola x como variable.

Porque si concebimos que con substituir $x + dx$ en lugar de x, Q se transforme en Q'; será $Q' - Q$ la diferencial. Si concebimos que con substituir $y + dy$ en lugar de y, Q' se transforme en Q'', y Q en Q''', por manera que $Q' - Q$ llegue á ser $Q'' - Q'''$, será $Q'' -$

 Q'''

$Q''' - Q' + Q$ la segunda diferencial.

Hagamos ahora las substituciones al rebes; y una vez que con substituir $y + dy$, en lugar de y en Q, sale Q''', será $Q''' - Q$ la primera diferencial en el supuesto de y variable. Si substituimos ahora en esta cantidad $x + dx$ en lugar de x, Q se transformará en Q', como antes; y Q''' (647) será Q'', por manera que $Q''' - Q$ será $Q'' - Q'$; luego la segunda diferencial será $Q'' - Q' - Q''' + Q$, la misma cabalmente que la primera.

Sentado esto, es evidente que si A representa una cantidad compuesta de x é y, $\frac{dA}{dy} dy$ espresará la diferencial de A, sacada en el supuesto de que sea y la variable, $\frac{dA}{dx} dx$ será la diferencial de A en el supuesto de ser x la variable. Tambien espresará $\frac{ddA}{dxdy} \cdot dxdy$, que se diferenció primero A, mirando como variable sola x, y que despues se diferenció el resultado mirando como variable sola y.

649 Despues de todo este preliminar, sea $Adx + Bdy$ una diferencial cabal, y M su integral; será, pues, $\frac{dM}{dx} dx + \frac{dM}{dy} dy = Adx + Bdy$; luego $\frac{dM}{dx} = A$, y $\frac{dM}{dy} = B$; luego tambien $\frac{ddM}{dxdy} dy = \frac{dA}{dy} dy$, y $\frac{ddMdx}{dydx} = \frac{dBdx}{dx}$, ó $\frac{ddM}{dxdy} = \frac{dA}{dy}$, y $\frac{ddM}{dydx} = \frac{dB}{dx}$; pero hemos probado poco ha (648) que $\frac{ddMdxdy}{dxdy} = \frac{ddMdydx}{dydx}$; luego $\frac{ddM}{dxdy} = \frac{ddM}{dydx}$; luego tambien $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; quiero decir, que si $Adx + Bdy$ es una diferencial completa, la diferencial de A sacada mirando sola y como variable, y dividida por dy, ha de ser igual á la diferencial de B sacada en el supuesto de no haber mas variable que x, y dividida por dx.

Por

Por esto sabemos que $\frac{1}{3}y^3dx + xy^2dy$ es una diferencial completa, porque $\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = \frac{d(xy^2)}{dx}$, porque el primer miembro se reduce á $\frac{y^2dy}{dy}$, y el segundo á $\frac{y^2dx}{dx}$. Al contrario sabemos que $xydx + 2xdy$ no es integrable, porque $\frac{d(xy)}{dy}$ no es igual á $\frac{d(2x)}{dx}$.

650 Si hubiese mas de dos variables en la diferencial propuesta; quiero decir, si fuera de esta forma $Adx + Bdy + Cdz$, sería preciso para que fuese integrable que fuera $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$; con efecto, podremos mirar succesivamente z, y y x como constantes; y aunque en este supuesto tendrá la diferencial dos términos no mas, porque entonces $dz = 0$, ó $dy = 0$, ó $dx = 0$, no dejará por esto de ser una diferencial completa, si lo fuese la propuesta; tendrá, pues, en cada uno de estos dos casos las circunstancias que caracterizan las diferenciales completas con dos variables. Esto mismo manifiesta las condiciones que han de concurrir quando fuere mayor el número de las variables.

651 Acerca de lo que hemos dicho tenemos que hacer una prevencion muy del caso. Supongamos que sea Q una cantidad incógnita compuesta de x, y y constantes, y que conozcamos su diferencial Adx, sacada en el supuesto de ser y constante. Para sacar la diferencia total de Q, supondremos que es $Adx + Bdy$; en cuyo supuesto ha de ser B de tal calidad que sea $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; luego $dB = \frac{dA}{dy}dx$; integremos mirando como variable sola x, pues en B no he-

mos hecho variar mas que x. Tendremos $B = S.\frac{dA}{dy}dx$; luego $Bdy = dyS.\frac{dA}{dy}dx$. Y como suponemos que Adx es la diferencial de Q sacada mirando x como variable, será $Q = S.Adx$, integrando en el supuesto de no haber mas variable que x; luego la diferencial completa de Q, ó de $S.\ Adx$ es $Adx + dy\ S.\frac{dA}{dy}dx$, previniendo que $S.\frac{dA}{dy}dx$ se ha de integrar mirando y como constante.

De las Equaciones diferenciales.

652 Quando en la equacion diferencial propuesta no hay mas que dos variables x é y, y están en el un miembro todas las x y dx, y las y y dy en el otro; la integracion se reduce, respecto de cada miembro, á la práctica de las reglas que hemos dado acerca de las diferenciales con una sola variable.

Así, si hubiéramos de integrar $ax^m y^n dx = by^q x^r dy$, que puede representar todas las equaciones de dos términos, esta equacion cuyas indeterminadas se separan sobre la marcha dividiendo por y^n, y por x^r, se transforma en $ax^{m-r}dx = by^{q-n}dy$, cuya integral es evidentemente

$$\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \frac{by^{q-n+1}}{q-n+1} + C.$$

653 Pero como puede suceder que uno ú otro, ó ninguno de los dos miembros de la equacion diferencial separada, sea integrable algebráicamente, y que no obstante la equacion pueda ser algebráica, ó puesta por lo menos en una forma algebráica; conviene tratar de los casos mas

mas comunes en que esto puede suceder.

Por egemplo, si en la equacion antecedente fuera $m - r = -1$, y $q - n = -1$; la equacion diferencial se reduciría á $\frac{adx}{x} = \frac{bdy}{y}$, cuyos miembros no se pueden integrar sino por logaritmos; por manera que será $aLx = bLy + LC$; porque tambien podemos suponer que la constante es un logaritmo. Pero podemos hacer que esta equacion sea algebráica, escribiéndola de este modo $Lx^a = Ly^b + LC$ ó $Lx^a + LCy^b$; pero se viene á los ojos que si los dos logaritmos fueren iguales, las dos cantidades á que pertenecen lo serán tambien; luego $x^a = Cy^b$, que es una equacion algebráica.

654 Si solo $q - n$ fuera igual á -1; la equacion diferencial sería $ax^{m-r}dx = \frac{bdy}{y}$, cuya integral es $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = bLy + LC$. A esta equacion se la puede dar tambien una forma algebráica, multiplicando el primer miembro por Le, siendo e el número cuyo logaritmo es 1; porque entonces no se alterará en nada el valor de la equacion. Resultará, pues, $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} Le = bLy + LC$, ó con hacer $m - r + 1 = p$, $\frac{ax^p}{Le^p} = LCy^b$, y por consiguiente $\frac{ax^p}{e^p} = Cy$. En adelante llamaremos siempre e el número cuyo logaritmo $= 1$.

655 Servirá de segundo egemplo la equacion $ndx = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$; el segundo miembro representa el elemento de un arco de círculo cuyo seno $= z$, y el radio $= 1$. Es, pues, z el seno de $S. \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, esto es de $S. ndx$ ó de $nx + C$. Será, pues, la integral $z =$ sen $(nx + C)$. Por el mismo camino hallaríamos que de la equacion $ndx = \frac{-dz}{\sqrt{(1-zz)}}$ se podria inferir que $z = \cos(nx + C)$.

656 Ya que $\frac{dz}{1+zz}$ representa el elemento de un arco de círculo cuyo radio $= 1$, y la tangente $= z$; si tuviéramos $ndx = \frac{dz}{1+zz}$, inferiríamos $z =$ tang $(nx + C)$. Pero si tuviéramos $ndx = \frac{bdz}{a+fzz}$; la reduciríamos á la forma de la antecedente con hacer $z = mu$, siendo m un coeficiente constante; de donde sacaríamos $\frac{bmdu}{a+fm^2u^2}$; haciendo, pues, $fm^2 = a$, tendríamos $m = \sqrt{\frac{a}{f}}$, y sacaríamos $ndx = \frac{b\sqrt{\frac{a}{f}}du}{a+uua}$, de donde se saca $\frac{du}{1+uu} = \frac{n}{b}dx\sqrt{af}$; luego u, ó $\frac{z}{m}$, ó $z\sqrt{\frac{f}{a}} =$ tang $\left(\frac{n}{b}x\sqrt{af} + C\right)$. Luego $z = \sqrt{\frac{a}{f}} \times$ tang $\frac{n}{b}x\sqrt{af} + C$.

657 En las espresiones sen $(nx + C)$, tang $(nx + C)$ que acabamos de sacar, $nx + C$ espresa la longitud absoluta del arco en partes del radio 1. Pero como es mas acomodado hacer uso de los números de grados, que de las longitudes mismas, será preciso quando ocurriesen semejantes espresiones valuar los arcos en grados. Esto se consigue (487) con facilidad dividiéndolos por el número de las partes del radio que caben en un arco, esto es, por 0,0174533, ó lo que es lo propio, multiplicán-

do-

dolos por 57,2957795. Así el seno del arco cuya longitud es b; ó el seno de un arco que coge un número de grados $= b \times 57,2957795$, son una misma cosa.

658 Si se nos propusiera $\frac{ndx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$, cuyos miembros espresan los elementos de dos arcos que estan uno con otro en razon de $1 : n$, y cuyos senos son x é y; para integrar empezaríamos haciendo que fuese racional cada miembro, valiéndonos para el primer miembro del supuesto $\sqrt{(1-xx)} = x\sqrt{-1} - z$; y para el segundo del supuesto $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} - t$. La equacion se transformaría en $\frac{ndz}{z} = \frac{dt}{t}$, cuya integral es $nLz = Lt + LC$, de donde sacaríamos $Ct = z^n$; y con substituir en lugar de z y t sus valores, $C\left[y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)}\right] = \left[x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-xx)}\right]^n$, que espresa generalmente la razon que hay entre los senos x é y de dos arcos multiplicados el uno por el otro.

Pero para valerse de esta equacion, es indispensable determinar primero la constante C. Supongamos, conforme es lícito, que es uno mismo el origen de los dos arcos; en este caso x é y llegarán á ser cero á un tiempo; pero entonces la equacion se transforma en $-C\sqrt{1} = (-\sqrt{1})^n$, ó $-C = (-1)^n$; pero $(-1)^n$ es $+1$ ó -1, segun fuere n par ó impar; luego será $-C = \pm 1$, y $C = \mp 1$; sirviendo el signo superior para los casos en que n fuere par; y el inferior para quando n fuere impar; luego finalmente $\mp(y\sqrt{-1}\ \sqrt{(1-yy)}) = \left[x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-xx)}\right]^n$.

En

En cada caso particular se podrán eliminar las imaginarias; pero lo mas facil será igualar con cero, despues de traspasado todo á un solo miembro, la suma de las cantidades reales; hecho esto, será divisible por $\sqrt{-1}$ la equacion restante, y será la misma que se hubiere formado igualando con cero la suma de las cantidades reales. Por egemplo, si hacemos $n = 2$, tendremos $-y\sqrt{-1} + \sqrt{(1-yy)} = -xx - 2x\sqrt{-1}.\sqrt{(1-xx)} + 1 - xx$, ó $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 + 2x\sqrt{-1}.\sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{-1} = 0$; igualando, pues, con cero la suma de las cantidades reales, sacaremos $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 = 0$; y la equacion total quedará reducida á $2x\sqrt{-1}.\sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{-1} = 0$, que despues de dividida por $\sqrt{-1}$ será $2x\sqrt{(1-xx)} - y = 0$, ó $y = 2x\sqrt{(1-xx)}$; pero si quadramos esta equacion, y la equacion $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 = 0$, ó mejor la equacion $\sqrt{(1-yy)} = 1 - 2xx$, sacaremos el mismo resultado.

Por el mismo camino se pueden hallar los cosenos y las tangentes de los arcos múltiplos. Por lo que pertenece á estas últimas, se integraría $\frac{ndx}{1+xx} = \frac{dy}{1+yy}$ (589), resolviendo $1 + xx$ en $(1 + x\sqrt{-1})(1 - x\sqrt{-1})$, y $1 + yy$ en $(1 + y\sqrt{-1})(1 - y\sqrt{-1})$; y se concluiría lo demas por lo que hemos dicho acerca de las fracciones racionales.

659 Esto nos trahe á la memoria un modo de espresar el seno y coseno de un arco, que puede ser de algun uso.

Sea,

Sea, pues, $dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$, la equacion que espresa la relacion entre un arco x, y su seno y. Si hacemos $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} - z$, sacaremos $dx = \frac{-dz}{z\sqrt{-1}}$, ó $\frac{dz}{z} = -dx\sqrt{-1}$, cuya integral es $Lz = -x\sqrt{-1} + LC$, ó $Lz = -x\sqrt{-1}\,Le + LC$ (654), que dá $z = Ce^{-x\sqrt{-1}}$; y substituyendo en lugar de z su valor, resultará $y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)} = Ce^{-x\sqrt{-1}}$. Para determinar la constante C, es de observar que el arco x y su seno han de llegar á ser cero á un tiempo; será, pues, $-\sqrt{1} = C$; luego $y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)} = e^{-x\sqrt{-1}}$, y por consiguiente $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}}$; quadrando, y reduciendo, sacaremos $y = \frac{1-e^{-2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}.e^{-x\sqrt{-1}}}$ $= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; luego una vez que y es seno de x, será sen $x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

Si en el segundo miembro de la equacion $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}}$, substituimos en lugar de y el valor que acabamos de hallar, resultará $\sqrt{(1-yy)}$, esto es, $\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2} + e^{-x\sqrt{1}} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$; luego $\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$. Volvamos á la integracion de las equaciones.

Quan-

660 Quando las indeterminadas no están separadas en la equacion diferencial propuesta, antes de separarlas se ha de indagar si acaso sería integrable la equacion conforme viene propuesta. Esto sucederá (649) quando $\frac{dA}{dx} = \frac{dB}{dy}$, en el supuesto de que $Adx + Bdy = 0$ represente dicha equacion. En este caso se integraría por lo dicho (645).

661 Podria sin embargo ser integrable la equacion, aunque esta condicion no se verificára; pero para esto sería preciso multiplicarla por un factor que hiciese al caso compuesto de x, y y constantes.

Sea P este factor; será, pues, $APdx + BPdy = 0$ una diferencial completa. Es, pues, preciso que $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(BP)}{dx}$. Luego se reduce únicamente la cuestion á hallar en lugar de P una funcion de x, y y constantes, que cumpla con la equacion. Pero como esta investigacion es sumamente penosa, nos ceñiremos á buscar el valor de P para el caso en que no ha de llevar mas que x y constantes, ó y y constantes. Supongamos, pues, que no ha de haber en P mas que x, tendremos $P\frac{dA}{dy} = B\frac{dP}{dx} + P\frac{dB}{dx}$, de donde se saca $\frac{dP}{P} = \frac{\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx}{B}$; se hallará, pues, facilmente el valor de P, si $\frac{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}}{B}$ se redugere á una funcion de x, como es preciso para que sea P, segun suponemos, una funcion de x sola.

662 Por este camino se puede hallar generalmente la

la integral de toda equacion de la forma siguiente : $Xy^q dy + X'y^{q+1}dx + X''y^r dx = 0$, siendo X, X', X'' qualesquiera funciones de x; y q y r qualesquiera esponentes.

Podríamos probar si es integrable multiplicandola por un factor de la forma Py^n, siendo P una funcion de x, y n un esponente indeterminado; y hallaríamos que lo sería con efecto, si hiciéramos $n = -r$. Pero es mas natural reducir sobre la marcha la equacion á esta forma $y^{q-r}dy + Fy^{q-r+1}dx + F'dx = 0$, dividiendo por X, y por y^r, y representando por F y F' los cocientes $\frac{X'}{X}$, $\frac{X''}{X}$. Hecho esto, para integrar la última equacion supondremos que P sea el factor, siendo P una funcion de x. Tendremos, pues, $Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx + F'Pdx = 0$. Pero si fuese P una funcion de x, $F'P$ lo será tambien; se reducirá, pues, $S.F'Pdx$ á la integracion de las cantidades que llevan sola una variable. Solo falta, pues, hacer que $Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx$ sea una diferencial completa; para cuya circunstancia es preciso que $\frac{d(Py^{q-r})}{dx} = \frac{d(FPy^{q-r+1})}{dy}$; esto es, que $y^{q-r}\frac{dP}{dx} = (q-r+1)y^{q-r}FP$; de donde se saca $\frac{dP}{P} = (q-r+1)Fdx$; é integrando $LP = S.(q-r+1)Fdx = S.(q-r+1)Fdx.Le$; luego $P = e^{S.(q-r+1)Fdx}$. Substituyendo este valor de P en la equacion $Py^{q-r}dy +$ &c. é integrando, sacaremos

$$\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1}e^{S.(q-r+1)Fdx} + S.F'dxe^{S.(q-r+1)Fdx} + C = 0.$$

No

No hemos añadido constante alguna despues de integrada la equacion que ha dado P, porque como no hay ninguna condicion para determinarla, está en nuestra mano suponerla nula.

Supongamos, por egemplo, que hayamos de integrar $dy + \frac{aydx}{x} + (bx^2 + cx + f)dx = 0$. Multiplicando por el factor P, sacaremos $Pdy + \frac{ayPdx}{x} + P(bx^2 + cx + f)dx = 0$; es, pues, preciso que $\frac{dP}{dx} = d\frac{\left(\frac{ayP}{x}\right)}{dy} = \frac{aP}{x}$; luego $\frac{dP}{P} = \frac{adx}{x}$; luego $LP = aLx$, ó $P = x^a$. Se transforma, pues, la equacion en $x^a dy + ax^{a-1}ydx + bx^{a+2}dx + cx^{a+1}dx + fx^a dx$, cuya integral es $x^a y + \frac{bx^{a+3}}{a+3} + \frac{cx^{a+2}}{a+2} + \frac{fx^{a+1}}{a+1} + C = 0$.

663 La equacion general que acabamos de integrar, ocurre con bastante frecuencia, y el método que hemos dado se puede aplicar á otros muchos casos, como los que vamos á proponer.

Si hubiéramos de integrar las dos equaciones $dx + ady + (bx + cy)Tdt = 0$, $kdx + a'dy + (b'x + c'y)Tdt = 0$, siendo x, y y t tres variables; a, b, c, a' constantes, y T una funcion qualquiera de t; hallaremos la integral de estas dos equaciones por el método antecedente, practicando lo que sigue. Multiplicaremos una de las dos, pongo por caso la primera, por un coeficiente indeterminado y constante g; y añadiendo el resultado á la segunda, mul-

multiplicaremos el total por un factor P, que supondremos sea una funcion de t; resultará $(gP + kP)dx + (gaP + a'P)dy + \left[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y\right] Tdt = 0$. Supongamos ahora que esta equacion sea una diferencial cabal; será preciso (650) que 1.° $\frac{d(gP+kP)}{dt} = \frac{d[(gbP+b'P)x+(gcP+c'P)y]}{dx}$; 2.° $\frac{d(gaP+a'P)}{dt} = \frac{d[(gbP+b'P)x+(gcP+c'P)y]}{dy}$ 3.° $\frac{d(gP+kP)}{dy} = \frac{d(gaP+a'P)}{dx}$. Y como suponemos que P es una funcion de t, la última equacion se reduce á $0 = 0$. Las otras dos dán $(g+k)\frac{dP}{dt} = (gb + b')P$, y $(ga + a')\frac{dP}{dt} = (gc + c')P$; de donde se saca $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k}dt$, y $\frac{dP}{P} = \frac{gc+c'}{ga+a'}dt$; luego si formamos una equacion con estos dos valores de $\frac{dP}{P}$, y dividimos por dt, sacaremos $\frac{gb+b'}{g+k} = \frac{gc+c'}{ga+a'}$ en cuya equacion asciende g al segundo grado, y de cuya resolucion se sacan dos valores de g.

Por consiguiente, si suponemos g conocida, sacaremos facilmente P; pues la equacion $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k}dt$ dá $P = e^{\frac{gb+b'}{g+k}}$. Como la equacion $(gP + kP)dx +$ &c. es ya una diferencial completa, si la integramos, sacaremos $(gP + kP)x + (gaP + a'P)y + C = 0$; luego si espresare g el primer valor de g que diere la equacion de segundo grado, de que hablamos poca ha, y representare g' el segundo valor de g, y P' lo que es P, despues de substituida g' en lugar de g, tambien tendremos $(g'P' + kP')x + (g'aP' + a'P')\,y + C' = 0$, siendo C una nueva constante. Esto lo prevenimos, porque no hay razon ninguna para hacer uso del uno de los valores de g, y no del otro·

otro. Será facil inferir de estas dos equaciones los valores de x é y, que no llevarán mas que t y constantes.

Si hubiera quatro variables x, y, z y t espresadas por tres equaciones de esta forma $adx + bdy + cdz + (ex + fy + hz)Tdt = 0$; se integrarian del mismo modo multiplicando la segunda y tercera por cantidades indeterminadas y constantes g, g'; añadiendo despues los dos productos á la primera, multiplicaríamos el total por un factor P, que supondríamos ser una funcion de t no mas. Suponiendo entonces que esta nueva equacion fuese una diferencial cabal, hallaríamos por lo dicho (650) las equaciones que han de determinar g, g' y P. La equacion que determinare g, ó la que determinare g', será de tercer grado; se hallarán, pues, tres valores de g, tres correspondientes de g', y tres correspondientes de P; de donde resultarán, mudando la constante en cada valor de g, tres integrales que facilitarán la determinacion de x y, y z en t.

Es facil percibir lo que se deberia practicar respecto de un número mayor de variables, con tal que las equaciones tuviesen la forma de las precedentes. El método sería tambien el mismo, aun quando hubiere uno ó muchos términos compuestos no mas que de t, dt y constantes.

664 Pero si tuviéramos en general un número m qualquiera de equaciones que tuviesen $m + 1$ variables, combinadas unas con otras de qualesquiera modo, se multipli-

ca-

caría la segunda, la tercera &c. hasta la última respectivamente por cantidades g, g', g'' &c. que se supondria que fuesen funciones indeterminadas de dichas variables; se añadirán á la primera, multiplicándolo despues todo por un factor P que tambien se supondrá ser una funcion de las mismas variables, se supondrá que la equacion total es una diferencial completa. Si tuviéramos, por egemplo, las dos equaciones $Adx + Bdy + Cdz = 0$, $A'dx + B'dy + C'dz = 0$; multiplicaríamos la segunda por g; añadiendo el producto á la primera, y multiplicándolo todo por P, resultaría $P(A + A'g)dx + P(B + B'g)dy + P(C + C'g)dz = 0$. Pero para que esta sea una diferencial completa es preciso (650) que $\frac{d[P(A+A'g)]}{dy} = \frac{d[P(B+B'g)]}{dx}$; $\frac{d[P(A+A'g)]}{dz} = \frac{d[P(C+C'g)]}{dx}$; $\frac{d[P(B+B'g)]}{dz} = \frac{d[P(C+C'g)]}{dy}$. Esto es, $\frac{dP}{dy}(A + A'g) + P\frac{d(A+A'g)}{dy} = \frac{dP}{dx}(B + B'g) + P\frac{d(B+B'g)}{dx}$, $\frac{dP}{dz}(A + A'g) + P\frac{d(A+A'g)}{dz} = \frac{dP}{dx}(C + C'g) + P\frac{d(C+C'g)}{dx}$; $\frac{dP}{dz}(B + B'g) + P\frac{d(B+B'g)}{dz} = \frac{dP}{dy}(C + C'g) + P\frac{d(C+C'g)}{dy}$.

Si por medio de las dos últimas equaciones sacámos los valores de $\frac{dP}{dx}$, y de $\frac{dP}{dy}$, y los substituimos en la primera, tendremos, despues de egecutadas las reducciones correspondientes, $(C + C'g)\left(\frac{d(A+A'g)}{dy} - \frac{d(B+B'g)}{dx}\right) + (A + A'g)\left(\frac{d(B+B'g)}{dz} - \frac{d(C+C'g)}{dy}\right) + (B + B'g)\left(\frac{d(C+C'g)}{dx} - \frac{d(A+A'g)}{dz}\right) = 0$, que es una equacion independiente de P. Buscaremos, pues, para g una funcion de x, y y z, la mas general que se pueda, que pueda cumplir con dicha equacion. Despues de determinada g, se buscará para P una

funcion de x, de y, y de z, que cumpla con dos qualesquiera de las tres equaciones que hallamos primero; esto empeña las mas veces en investigaciones muy arduas, pero se puede conseguir.

Hemos de prevenir que si no hubiera mas que una equacion; quiero decir, si tuviéramos $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 0$; la última equacion que acabamos de hallar, se reduciría á $C\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right) + A\left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right) + B\left(\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz}\right) = 0$; que por ser una equacion de condicion entre los coeficientes A, B, C manifiesta que para que sea integral una equacion $Adx + Bdy + Cdz = 0$ con tres variables, es indispensable que los coeficientes A, B, C tengan la relacion que espresa la equacion $C\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right) + \&c. = 0$. Una vez que se ha cumplido con esta condicion, se determina el factor P, de modo que cumpla con dos de las tres equaciones $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(BP)}{dx}$, $\frac{d(AP)}{dz} = \frac{d(CP)}{dx}$, $\frac{d(BP)}{dz} = \frac{d(CP)}{dy}$.

Con esto se echa de ver lo que se ha de hacer quando son mas las equaciones, y las variables; y por el mismo camino se puede hallar quales son las equaciones, en que bastará que sea g una constante, ó una funcion de la una, ó de dos de las variables, &c.

665 Quando la equacion diferencial propuesta no está en ninguno de los casos espresados hasta (664); se ha de procurar separar las indeterminadas. En algunas ocasiones se consigue esto con solo el auxilio de las reglas ordinarias del Álgebra; en otras es preciso acudir á las transformaciones. Pero hay muchas equaciones respecto de las quales

no

no se sabe qual es la transformacion conveniente.

La equacion $ax^n dx + by^q x^n dx = y^k dy(e + fx^h)^r$ se separa inmediatamente por medio de la division, porque es la misma que $(a + by^q)x^n dx = y^k dy(e + fx^h)^r$ que se transforma en $\frac{x^n dx}{(e + fx^h)^r} = \frac{y^k dy}{a + by^q}$, cuya integracion pende de la integracion de las cantidades binomias de una sola variable.

Pero si la propuesta fuese $gxdx = (ax^4 ydy + 2abx^2 y^3 dy + abby^5 dy)$; se echa de ver que se podria escribir de este modo $gxdx = (x^4 + 2bx^2 y^2 + bby^4)aydy$. Se echa de ver tambien que se la podrá dar despues esta forma $gxdx = (x^2 + by^2)^2 \times aydy$. Con tal que se la considere con un poco de cuidado, se echa de ver que se podrá hacer la separacion, haciendo $x^2 + by^2 = z$, porque tendremos $x^2 = z - b^2$, y $xdx = \frac{1}{2}dz - bydy$; luego egecutando las substituciones correspondientes, resultará $\frac{1}{2}gdz - bgydy = azzydy$. De donde se saca $\frac{\frac{1}{2}gdz}{bg + azz} = ydy$, que es facil de integrar.

666 Como no es posible dar reglas generales acerca de las transformaciones, nos ceñiremos á manifestar algunos casos generales en que se puede egecutar la separacion.

Se puede egecutar generalmente en todas las equaciones homogeneas de dos variables; esto es, en aquellas en que las dos indeterminadas x é y tienen en cada término,

 ora

ora estén juntas, ora estén solas, la misma suma de dimensiones.

Con efecto, imaginemos que $Adx + Bdy = 0$ sea una equacion homogenea, y que lo dividamos todo por una potencia de x, cuyo esponente sea igual al número de las dimensiones de la equacion; se echa de ver que no habrá en A y B sino potencias de $\frac{y}{x}$ y constantes; por manera que la equacion será $Fdx + F'dy = 0$, siendo F y F' funciones de $\frac{y}{x}$ y constantes. Sentado esto, ya que $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xx}$, será $dx = \frac{-xx}{y} \times d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{y}dy$; luego si hacemos $\frac{y}{x} = z$, será $dx = -\frac{ydz}{zz} + \frac{dy}{z}$; luego si substituimos en lugar de $\frac{y}{x}$ y dx sus valores, tendremos $-\frac{Fydz}{zz} + \frac{Fdy}{z} + F'dy = 0$, siendo F y F' funciones de z y constantes. Esta equacion dá $\frac{dy}{y} = \frac{Fdz}{Fz + F'zz}$, que es una equacion separada, porque en F y F' no hay mas variable que z.

Si la propuesta fuese, por egemplo, $y^3dx + y^2xdy + bx^3dy = 0$, que es homogenea, y cuyo número de dimensiones es 3; dividiríamos por x^3, y saldria $\frac{y^3}{x^3}dx + \frac{y^2}{x^2}dy + bdy = 0$; haciendo, pues, $\frac{y}{x} = z$, ó $x = \frac{y}{z}$, saldria $dx = \frac{zdy - ydz}{zz}$; substituyendo en la propuesta, sacaríamos $z^2dy + yzdz + z^2dy + bdy = 0$, de donde inferiríamos $\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{2z^2 + b}$, cuya integral es $Ly = \frac{1}{4}L(z^2 + b) + LC$, que dá $y = C(z^2 + b)^{\frac{1}{4}}$, ó $y^4 = C^4(z^2 + b)$, ó finalmente $y^4 = C^4\left(\frac{y^2}{x^2} + b\right)$, despues de substituido en lugar de z su valor $\frac{y}{x}$.

667 Sería, pues, sumamente util poder conseguir fuesen homogeneas las equaciones. Pero para esto no hay mé-

método alguno general, y es preciso acudir á las transformaciones. Las que pueden servir con alguna esperanza de encaminar al fin que se desea, consisten en igualar una de las variables, ó una funcion de dicha variable, ó una funcion de las dos, con una funcion de una nueva variable con esponentes indeterminados. Despues se determinan estos esponentes, en virtud de la condicion de que sea homogenea la equacion transformada.

Si queremos saber, por egemplo, en qué casos la equacion $ax^m dx + by^n x^q dy + cy^k dy = 0$, que puede representar qualquiera equacion de tres términos, puede llegar á ser homogenea; haremos $x = z^h$; y tendremos . . . . . $ahz^{mh+h-1}dz + by^n z^{qh} dy + cy^k dy = 0$. Pero para que esta sea homogenea es preciso que sea $k = qh + n$; y $k = mh + h - 1$, de donde se saca $h = \frac{n+1}{m-q+1}$, y $k = \frac{mn+q+n}{m-q+1}$; así, si los esponentes k, q, m y n fueren tales que se verifique la última equacion, se podrá hacer que sea homogenea la propuesta, y por consiguiente separar.

668 En general, por no haber métodos directos, se procura reducir las equaciones propuestas á otras equaciones cuya integracion sea conocida. Así se practica, por egemplo, con la equacion particular $dy + ay^2 dx = bx^m dx$, llamada la equacion de *Ricati*, y que no se sabe cómo se integra sino quando tiene m ciertos valores determinados.

Si m fuese cero, sería $dy + ay^2 dx = bdx$, que es separable, y dá $\frac{dy}{b - ay^2} = dx$, cuya integral es facil de hallar.

Pero quando son otros los valores de m, es preciso pa-

para integrar la equacion, transformarla en otra, donde ay^2 y b estén multiplicadas por una misma potencia de x; con esto será separable. Para determinar los valores de m que consienten esta transformacion, se practica lo siguiente. Hagamos $y = Ax^p + x^q t$; tendremos $dy = pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt$; substituyendo, sale

$$\left.\begin{array}{l} pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt + ax^{2q}ttdx \\ + aAAx^{2p}dx + 2aAx^{p+q}tdx \end{array}\right\} = bx^m dx.$$

Supongamos $p - 1 = 2p$, $pA + aAA = 0$, $p + q = q - 1$, $q + 2aA = 0$; tendremos $p = -1$, $A = \frac{1}{a}$, $q = -2$, con lo que se transforma la transformada en $x^{-2}dt + ax^{-4}ttdx = bx^m dx$, ó $dt + ax^{-2}ttdx = bx^{m+2}dx$, que será separable, si $m = -4$. Hagamos en esta $t = \frac{1}{z}$, se transformará en $dz + bx^{m+2}zzdx = ax^{-2}dx$. Luego si hacemos $z = A'x^{p'} + x^{q'}t'$, y hacemos lo mismo que antes, resultará

$$\left.\begin{array}{l} p'A'x^{p'-1}dx + q'x^{q'-1}t'dx + x^{q'}dt' + bx^{2q'+m+2}t't'dx \\ + bA'^2x^{2p'+m+2}dx + 2bA'x^{p'+q'+m+2}t'dx \end{array}\right\} = ax^{-2}dx$$

Si suponemos $2p' + m + 2 = p' - 1$, $p'A' + bA'^2 = 0$, $q' + 2bA' = 0$, $q' - 1 = p' + q' + m + 2$, tendremos $p' = -m - 3$, $A' = \frac{m+3}{b}$, $q' = -2m - 6$, y $x^{-2m-6}dt' + bx^{-3m-10}t't'dx = ax^{-2}dx$, ó $dt' + bx^{-m-4}t't'dx = ax^{2m+4}dx$, que será separable si $-m - 4 = 2m + 4$, ó si $m = -\frac{8}{3}$.

Si hacemos $t' = \frac{1}{z}$, despues $z' = A''x^{p''} + x^{q''}t''$, y proseguimos siempre del mismo modo, hallarémos succesivamente que la equacion será separable quando $m = -\frac{12}{5}$,

$m = -\frac{16}{7}$, $m = -\frac{20}{9}$, &c. quiero decir, en general, quando $m = \frac{-4r}{2r-1}$, siendo r un número entero positivo.

Y retrocediendo ácia las substituciones precedentes, hallaremos que la espresion $dy =$

$$Ax^{-1}+x^{-2}\left(\frac{1}{A'x^{-m-3}+x^{-2m-6}\left(\frac{1}{A''x^{-2m-5}+x^{-4m-10}\left(\frac{1}{A'''x^{-3m-7}+\&c.}\right.}\right.}\right.$$

prosiguiendo hasta que el primer término en x en el uno de los denominadores, tenga el esponente $-rm-2r-1$; y entonces el segundo término ha de ser $x^{-2rm-4r-2}t$; siendo t una variable que, despues de la substitucion de este valor de y, se determina por la integracion de la equacion resultante que entonces es separable.

Volvamos á la equacion $dy + ay^2dx = bx^m dx$, é imaginemos que en lugar de substituir primero $y = Ax^p + x^q t$, conforme hicimos antes, hagamos primero $y = \frac{1}{z}$, y despues $z = Ax^p + x^q t$, y prosigamos practicando lo mismo que antes; inferiremos tambien que se podrá egecutar la separacion siempre que $m = \frac{-4r}{2r+1}$, siendo r un número entero positivo. Y el valor de y será

$$y = \frac{1}{Ax^{-m-1}+x^{-2m-2}\left(\frac{1}{A'x^{-2m-3}+x^{-4m-6}\left(\frac{1}{A''x^{-3m-5}+\&c.}\right.}\right.}$$

 pro-

prosiguiendo al mismo tenor hasta que el primer término en x en el último denominador sea $-m(r+1)-2r-1$; y entonces el segundo término ha de ser $x^{-(2m+2)(r+1)-2}t$.

Se reducirá á los mismos casos la equacion $x^q dy + ay^2x^n dx = bx^m dx$, dividiendo por x^q, y haciendo despues $x^{n-q+1} = z$.

Estos son los medios generales que sirven quando las dx y las dy no pasan del primer grado. Por lo que mira á las equaciones en que hubiese diferentes potencias de dx y dy; como no pueden menos de ser homogeneas respecto de dx y dy, se dividirá todo por dx elevada á una potencia igual á la suma de las dimensiones de dx y dy; se resolverá la equacion mirando $\frac{dy}{dx}$ como la incógnita. Como entonces dx y dy no serian mas que del primer grado, se probará si se le pueden aplicar á esta equacion los métodos antecedentes.

TRI-

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA.

Fig.

669 ES escusado prevenir que dá la Trigonometría esférica métodos para calcular los triángulos esféricos. Por triángulo esférico entendemos una porcion de la superficie de la esfera, comprehendida entre tres arcos de círculo, que tienen todos tres sus centros en el centro mismo de la esfera, y que por consiguiente son tres arcos de círculos máximos de la misma esfera. 263.

Si concebimos que desde los tres ángulos A, F, G del triángulo esférico AFG se hayan tirado tres radios AC, FC, GC al centro C de la esfera, podremos considerar el espacio $CAFG$ como una pirámide triangular, cuyo vértice está en el centro C de la esfera, y cuya base AFG es curva, y es una porcion de la superficie de la misma esfera. Los arcos AF, FG, AG, que son los lados curvilineos de la base, son el concurso de la superficie de la esfera con los planos ACF, FCG, GCA, que forman las caras de la espresada pirámide.

La medida del ángulo A comprehendido entre los dos arcos AF, AG es el ángulo rectilineo IAK comprehendido entre las tangentes AI, AK de los dos arcos. Cada una de estas tangentes está en el plano del círculo cuya es, y son ambas perpendiculares al radio CA (I. 346), que es la interseccion de los dos planos ACF, ACG; luego (I. 531) el án-

Fig. ángulo que forman sus dos tangentes es el mismo que forman los dos planos *ACF*, *ACG* de los dos arcos; luego

670 1.° *Un ángulo esférico qualquiera* FAG *no se distingue del ángulo que forman los planos de sus dos lados* AF, AG.

671 2.° *Los ángulos formados por los arcos de círculo máximo que se encuentran en la superficie de la esfera, tienen las mismas propiedades que los ángulos planos*; esto es las propiedades de que hablamos (I. 298, 299 y 302).

672 *Luego dos lados de un triángulo esférico son perpendiculares uno á otro, quando los planos en que están son perpendiculares uno á otro.*

Si imaginamos prolongados ácia todas las direcciones los dos planos *ACG*, *ACF*, es patente que la seccion que cada uno formáre en la esfera, será un círculo máximo, y que estos dos círculos máximos se cortarán mutuamente en dos partes iguales en los puntos *A* y *D* de la interseccion comun *AC* prolongada; porque como los dos planos pasan por el centro, su interseccion comun será un diámetro de la esfera.

673 Luego *dos lados contiguos* AG, AF *de un triángulo esférico no se pueden volver á encontrar sino en el punto* D, *que dista* 180° *de su origen.*

674 Si tomamos los dos arcos *AB*, *AE*, cada uno de 90°, y hacemos que por los dos puntos *B* y *E*, y el centro *C* pase un plano, cuya seccion con la esfera forme el círculo máximo *BENMO*; este círculo será perpendicular á los dos círculos *ABD*, *AED*.

Por-

Porque si tiramos los radios *BC*, *EC*, los ángulos *ACB*, cuya medida es el arco *AB* de 90°, y *ACE* cuya medida es el arco *AE* tambien de 90°, serán rectos; luego la linea *AC* será perpendicular á las dos rectas *CE*, *BC*; luego (I. 537) es perpendicular á su plano; esto es, al círculo *BENMO*; luego los dos círculos *AED*, *ABD*, que pasan por la recta *AD*, son tambien perpendiculares al mismo círculo (I. 532); luego recíprocamente, el mismo círculo es perpendicular á los espresados *AED*, *ABD*. Fig.

Como no le hemos señalado cantidad alguna determinada al ángulo *GAF* ó *EAB*, es evidente que lo mismo se verificará, sea la que fuere la cantidad de dicho ángulo, y que por consiguiente el círculo *BENMO* es perpendicular á todos los círculos que pasan por la recta *AD*.

La recta *AD* se llama el *Ege* del círculo *BENMO*, y los dos puntos *A* y *D*, que están ambos en la superficie de la esfera, se llaman los *Polos* del mismo círculo.

675 Inferamos, pues, 1.º *que los polos de un círculo máximo qualquiera están á igual distancia de todos los puntos de la circunferencia del mismo círculo máximo; y su distancia á cada uno de dichos puntos, cuya medida es un arco de círculo máximo, es un arco de* 90°.

Y recíprocamente, *si un punto qualquiera* A *de la superficie de la esfera, está á la distancia de* 90° *de dos puntos* B *y* E *de un arco de círculo máximo, el punto* A *será el polo de este círculo máximo.*

676 2.º *Que quando un arco* BF *de círculo máximo*

es

Fig. *es perpendicular á otro arco* BE *de círculo máximo, pasa indispensablemente por el polo de este, ó pasaría por lo menos si se prolongára bastante.*

677 3.° *Que si dos arcos* BF, EG *de círculo máximo son perpendiculares á otro arco* BE *de círculo máximo, el punto* A *donde concurren es el polo de este último.*

678 Una vez que las dos rectas *BC*, *EC* son perpendiculares al mismo punto *C* de la recta *AD*, el ángulo *BCE* que forman, será (I. 531) la medida de la inclinacion de los dos planos *ABD*, *AED*, ó del ángulo esférico *EAB* ó *GAF*; luego

Un ángulo esférico GAF *tiene por medida el arco* BE *de círculo máximo, que forman á la distancia de 90 del vértice sus lados, prolongados si fuere menester.*

679 Si imaginamos que el semicírculo *ABD* dé la vuelta al rededor del diámetro *AD*, y que desde los diferentes puntos *R*, *B*, *H* de su circunferencia, se tiren á *AD* las perpendiculares *RQ*, *BC*, *HP*; podremos inferir

1.° *Que cada uno de dichos puntos trazará una circunferencia de círculo, cuyo centro estará en el punto de* AD *donde cae dicha perpendicular, y el radio será la misma perpendicular.*

2.° *Que los arcos* RS, BE, HL *trazados en virtud de este movimiento, é interceptados entre los dos planos* ABD, AED, *serán todos de un mismo número de grados.*

Porque si tiramos las lineas *SQ*, *EC*, *LP*, serán todas perpendiculares á *AD*, pues no son otra cosa que los ra-

radios *RQ*, *BC*, *HP*, que están en el plano *AED*; luego (I. 531) cada uno de los ángulos *RQS*, *BCE*, *HPL*, ó cada uno de los arcos *RS*, *BE*, *HL* mide la inclinacion de los dos planos *ABD*, *AED*; luego todos los espresados arcos son de un mismo número de grados. Fig.

3.° *Las longitudes de dichos arcos* RS, BE, HL *son proporcionales á los senos de los arcos* AR, AB, AH *que miden las distancias á que cada uno de ellos está de un mismo polo* A, *ó, lo que es lo propio, á los cosenos de las distancias á que están del círculo máximo, al qual son paralelos.*

Porque es evidente que siendo semejantes dichos arcos son proporcionales á sus radios *RQ*, *BC*, *HP* que son los senos de los arcos *AR*, *AB*, *AH*, ó los cosenos de los arcos *BR*, o y *BH*.

680 Supongamos que *AFIG*, *BFHG* son dos círculos máximos de la esfera, y *ABDEIH* otro círculo máximo que corta perpendicularmente los dos primeros; resulta de lo dicho (676) que el círculo *ABDEIH* pasa por los polos de los dos círculos *AFIG*, *BFHG*; sean *D* y *E* dichos polos, y *DK*, *EL* los dos eges; una vez que los ángulos *ACD*, *BCE* son rectos, si restamos de cada uno el ángulo comun *BCD*, los ángulos residuos *ACB*, *DCE* serán iguales, y por consiguiente lo serán tambien los arcos *AB*, *DE*; luego *el arco* DE *que mide la mas corta distancia que hay entre los polos de dos círculos máximos, es igual al arco* AB *que mide el menor de los dos ángulos, que el uno de los círculos forma con el otro.* 264.

Pro-

Fig.

Propiedades de los triángulos esféricos.

681 Es evidente que por dos puntos de la superficie de la esfera no puede pasar mas que un arco de círculo máximo. Porque este círculo máximo es la interseccion de la esfera con un plano que ha de pasar precisamente por el centro ; y es evidente que por tres puntos dados no puede pasar mas que un plano.

Pero por dos puntos dados en la superficie de la esfera se pueden tirar una infinidad de arcos de círculos menores de diferentes diámetros. Este es el motivo por que *solo* se consideran en la Trigonometría esférica los arcos de círculos máximos, una vez que la menor distancia que hay entre dos puntos de la superficie de la esfera, es un arco de círculo máximo. Si se consideráran los arcos de círculos menores, no tendríamos ninguna regla fija para averiguar la longitud de los lados, y la cantidad de los ángulos.

Aunque un triángulo esférico pueda tener alguna de sus partes mayor que 180°, no obstante solo consideraremos aquellos que tienen cada una de sus partes menor que 180°; porque siempre se puede conocer el uno de estos triángulos por medio del otro. Por egemplo, si consideramos el triángulo *ABEMV*, que forman los arcos
263. qualesquiera *AB*, *AV*, y el arco *BMV* mayor que 180°, é imaginamos el círculo entero *BMVB*; podremos substituir el triángulo *BOVA*, cuyo arco *BOV* coge menos de 180°,

180°, en lugar del triángulo *ABMEV*; porque las partes del primero son ó iguales á las del segundo, ó su suplemento para 180° ó 360°; por manera que el uno de dichos dos triángulos dá á conocer el otro. Fig.

682 *Cada lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos.* Es evidente.

683 *La suma de los tres lados de un triángulo esférico es siempre menor que* 360°.

Porque es evidente (682) que *FG* es menor que $AG + AF$; pero $AG + AF$ añadidos á $DG + DF$ no valen mas que 360°; luego $AG + AF$ sumados con *FG* 263
valdrán menos de 360°.

684 *Sea* ABC *un triángulo esférico qualquiera*; FED *otro triángulo esférico, tal que el punto* A *sea el polo del arco* 265
DE; *el punto* C, *el polo del arco* FE; *y el punto* B, *el polo del arco* DF; *cada lado del triángulo* FED *será suplemento del ángulo que es su opuesto en el triángulo* ABC, *y cada ángulo del mismo triángulo* FED *será suplemento del lado que es su opuesto en el triángulo* ABC.

Porque ya que el punto *A* es el polo del arco *DE*, el punto *E* ha de estar á la distancia de 90° del punto *A* (675); por la misma razon, ya que *C* es el polo del arco *FE*, el punto *E* estará á la distancia de 90° del punto *C*; luego (675) el punto *E* es el polo del arco *AC*; del mismo modo probaríamos que *F* es el polo de *BC*, y *D* el polo de *AB*.

Sentado esto, prolónguense los arcos *AB*, *AC* hasta

que

Fig. que concurran en *I* y *L* con el arco *DE*. Ya que el punto *D* es el polo de *ABL*, el arco *DL* es de 90; y por ser *E* el polo de *ACI*, el arco *EI* es de 90°; luego $DL + EI$, ó $DL + EL + IL$, ó $DE + IL$ vale 180°. Pero *IL* es la medida del ángulo *A* (678), por ser de 90° los arcos *AL*, *AI*; luego $DE + A$ vale 180°; luego *DE* es suplemento del ángulo *A*. Del mismo modo probarémos que *FD* es suplemento de *B*, y *FE* suplemento de *C*.

Prolonguemos el arco *AC* hasta que concurra en *N* con *FE*. Los dos arcos *AI* y *CN* son cada uno de 90°, pues *A* y *C* son los polos de los arcos *DE*, *FE*; luego $AI + CN$, ó $AI + AC + AN$, ó $IN + AC$ vale 180°; pero *IN* es la medida del ángulo *E* (678), por ser el punto *E* polo de *IN*; luego $E + AC$ vale 180°; luego *E* es suplemento de *AC*. Del mismo modo probaríamos que *D* es suplemento de *AB*, y *F* suplemento de *CB*.

685 De aquí inferiremos que *la suma de los tres ángulos de un triángulo esférico, vale siempre menos que* 540°, *ó que tres veces* 180°, *y mas que* 180°.

Porque la suma de los tres ángulos *A*, *B*, *C* con la suma de los tres lados *DE*, *DF*, *FE* vale tres veces 180° (684): luego 1.º la suma de los tres ángulos *A*, *B*, *C* es menor que tres veces 180°, ó 540°. 2.º la suma de los tres lados *DE*, *DF*, *FE* vale (683) menos que 360°, ó dos veces 180°; luego queda mas de 180° para la suma de los tres ángulos *A*, *B*, *C*.

686 Luego *puede tener un triángulo esférico rec-*

tos,

tos, y aun obtusos sus tres ángulos. Fig.

Se echa, pues, de ver que la suma de los tres ángulos de un triángulo esférico, no es una cantidad constante como en los triángulos rectilineos; y por lo mismo no es posible sacar el valor de uno de sus ángulos, dado el valor de los otros dos.

687 Por ser cada una de las partes del triángulo *FED* suplemento de la que le está opuesta en el triángulo *ABC*, se sigue que el uno de estos triángulos se puede resolver por medio del otro; porque una vez que conozcamos las partes del uno, sabremos qual es el valor de las partes del otro. Esta observacion nos será muy util; y como se nos ofrecerá á menudo hacer uso de los triángulos *ABC*, *FED*, llamaremos para abreviar al triángulo *FED* *Triángulo Suplementario.*

688 *Dos triángulos esféricos trazados en una misma esfera, ó en dos esferas iguales, son iguales* 1.° *quando tienen igual un lado adyacente á dos ángulos iguales cada uno al suyo.* 2.° *quando tienen igual un ángulo comprehendido entre dos lados iguales, cada uno al suyo.* 3.° *quando tienen iguales los tres lados, cada uno al suyo.* 4.° *quando tienen los tres ángulos iguales cada uno al suyo.*

Los tres primeros casos se demuestran al pie de la letra del mismo modo que si fuesen rectilineos los triángulos (I. 407, 408 y 410).

Por lo que mira al quarto, como no se verifica en los triángulos rectilineos, pide una demostracion particular.

 Pa-

Fig. Para darla imaginaremos trazados los triángulos suplemen-
265. tarios *FED*, *fed* de cada uno de los triángulos *ABC*, *abc*.
266. Si los ángulos *A*, *B*, *C* son iguales á los ángulos *a*, *b*, *c*, cada uno al suyo, los lados *DE*, *DF*, *FE* suplementos de los primeros ángulos, serán tambien iguales á los lados *de*, *df*, *fe* suplementos de los últimos; luego en virtud del tercero de los quatro casos de esta proposicion, serán exactamente iguales estos dos triángulos *FED* y *fed*; luego los ángulos *F*, *E*, *D* serán iguales á los ángulos *f*, *e*, *d*, cada uno al suyo; luego los lados *BC*, *AC*, *AB* suplementos de los tres primeros ángulos, serán iguales á los lados *bc*, *ac*, *ab* suplementos de los tres últimos.

689 *En un triángulo esférico isósceles, los dos ángulos opuestos á los lados iguales son iguales; y recíprocamente si dos ángulos de un triángulo esférico son iguales, los lados opuestos á dichos ángulos serán iguales.*

Tómense en los lados iguales *AB*, *AC* los arcos iguales *AD*, *AE*, é imagínense los arcos de círculo máximo
267. *DC*, *BE*; los dos triángulos *ADC*, *AEB*, que con esto tendrán un ángulo comun comprehendido entre dos lados iguales cada uno al suyo, serán (688) iguales. Luego el arco *BE* es igual al arco *CD*; luego los dos triángulos *BDC* y *BEC* son iguales, porque sobre ser *DC* igual á *BE*, conforme acabamos de ver, tienen comun el lado *BC*, y por otra parte son iguales *BD* y *CE*, que son las restas de dos arcos iguales *AB*, *AC* despues de haberles quitado arcos iguales *AD*, *AE*. Una vez que son iguales dichos

dos triángulos, se puede inferir que el ángulo *DBC* ó *ABC* es igual al ángulo *ECB* ó *ACB*. Fig.

Por lo que mira á la segunda parte de la proposicion, es una consecuencia de la primera, con imaginar el triángulo suplementario; porque si los dos ángulos *B* y *C* son 265. iguales, sus suplementos *FD*, *FE* serán iguales; luego el triángulo *FED* será isósceles; luego los ángulos *E* y *D* serán iguales; luego serán iguales sus suplementos *AC* y *AB*.

690 *En todo triángulo esférico* ABC, *el lado mayor está opuesto al ángulo mayor, y recíprocamente.*

Si el ángulo *B* es mayor que el ángulo *A*, se podrá 268. trazar dentro del triángulo un arco *BD* de círculo máximo, que forme el ángulo *ABD* igual al ángulo *BAD*, y entonces *BD* será igual á *AD* (689); pero *BD* + *DC* es mayor que *BC*; luego *AD* + *DC* ó *AC* es tambien mayor que *BC*.

La recíproca se demostrará facilmente, valiéndose del triángulo suplementario, y discurriendo del mismo modo.

Las últimas proposiciones que hemos demostrado sirven para guiarnos en la resolucion de los triángulos esféricos, donde todo lo que se busca se determina por senos ó tangentes; y como estas pertenecen indistintamente á arcos menores que 90°, ó á sus suplementos, puede quedar duda quál de estos dos arcos se ha de escoger. Pero no bastan las espresadas proposiciones para manifestar los casos en que puede ser lo que se busca mayor ó menor que

 90°,

Fig. 90°, y los casos en que puede ser indiferente que sea mayor ó menor.

Medios para conocer en qué casos los ángulos ó lados que buscamos en los Triángulos esféricos rectángulos, han de ser mayores, ó menores que 90°.

691 Aunque dos ángulos, y aun los tres de un triángulo esférico rectángulo pueden ser rectos, y que por consiguiente pueda haber dos ó tres hypotenusas, no obstante solo llamaremos hypotenusa el lado opuesto al ángulo recto que consideraremos; y los otros dos ángulos los llamaremos *Ángulos obliquos.*

692 *Cada uno de los dos ángulos obliquos de un triángulo esférico rectángulo, es de la misma especie que el lado opuesto; quiero decir que será de 90°, si dicho lado fuere de 90°; y mayor ó menor que 90°, segun fuere dicho lado mayor ó menor que 90°.*

269. Supongamos que sea B el ángulo recto; si fuese BC menor que 90°, prolongándole hasta D, de modo que BD sea de 90°, el punto D será el polo del arco AB (676); luego el arco DA de círculo máximo, tirado en el estremo del lado BA, será perpendicular á BA; luego el ángulo DAB será recto; luego CAB será menor que 90°. Los otros dos casos se demostrarán del mismo modo.

693 *Si los dos lados, ó los dos ángulos de un triángulo esférico rectángulo son ambos menores ó mayores que 90°, la hypotenusa será siempre menor que 90°; y al* con-

contrario será mayor que 9 o°, si los dos lados, ó los dos ángulos fueren de distinta especie. Fig.

Porque, guardando la misma construccion que en la proposicion antecedente, si *AB* fuese tambien menor que 9 o°, el ángulo *ADB* que ha de ser (692) de la misma especie que el lado *AB*, será menor que 9 o°; por la misma razon el ángulo *ACB* será menor que 9 o°; luego *ACD* será obtuso, y por consiguiente mayor que *ADC*; luego *AD* será mayor que *AC* (690); y como *AD* es de 9 o°, será *AC* menor que 9 o°. 269.

Si los dos lados *BC* y *AB* del ángulo recto *B* fuesen ambos mayores que 9 o°, la hypotenusa *AC* será tambien menor que 9 o°; porque si tomamos *BD* de 9 o°, siendo *D* el polo del arco *AB*, será *AD* de 9 o°; luego una vez que *AB* es mayor que 9 o°, el ángulo *ACB* (692) será obtuso; lo mismo digo, y por la misma razon del ángulo *ADB*; luego *ADC* será agudo; y por consiguiente menor que *ACD*; luego tambien *AC* será menor que *AD* (690), quiero decir, menor que 9 o°. 270.

Al contrario, si fuese *AB* menor que 9 o°, y *BC* mayor; el ángulo *ACB* que es de la misma especie que *AB* (692), será agudo: lo propio digo del ángulo *ADB*; luego *ADC* será obtuso; y por consiguiente mayor que *ACD*; luego *AC* será mayor que *AD*; esto es, mayor que 9 o°. 271.

Por lo que mira á los ángulos comparados con la hypotenusa, la verdad de esta proposicion se funda en que

Fig. cada uno de dichos ángulos es de la misma especie que el lado opuesto (692).

694 Luego 1.° *segun fuere la hypotenusa menor ó mayor que 90°, serán los lados ambos de una misma especie, ó los dos de distinta especie; lo propio digo de los ángulos obliquos.*

695 *Segun fueren la hypotenusa, y un lado de una misma, ó de distinta especie, el otro lado será menor ó mayor que 90°, y lo propio digo del ángulo opuesto al último lado.*

De la Resolucion de los Triángulos esféricos rectángulos.

272. 696 Sea una pirámide $GBPQ$ formada de quatro triángulos rectángulos GBQ, GBP, GPQ, BPQ, y sean AB, AC y BC tres arcos de círculo trazados desde el centro G, y con el radio GB, cada uno, como se echa de ver, en un triángulo distinto; es evidente que estos tres arcos de círculo formarán un triángulo esférico BAC rectángulo en A, por ser perpendiculares el uno al otro los dos planos GPQ, GBP. Si suponemos el radio $= 1$, consideramos la hypotenusa como el radio en cada uno de los triángulos rectángulos que forman la pirámide propuesta, y tenemos presente que tang $= \frac{\text{sen}}{\text{cos}}$. y cot $= \frac{\text{cos}}{\text{sen}}$, se sacará facilmente la tabla siguiente que espresa los valores de todas las partes del espresado triángulo.

	tiene por seno	por coseno	por tangente
1.° el arco BC, ó el ángulo QGB.	$\frac{BQ}{GQ}$	$\frac{BG}{GQ}$	$\frac{BQ}{BG}$
2.° el arco BA, ó el ángulo BGP.	$\frac{BP}{GP}$	$\frac{GB}{GP}$	$\frac{BP}{BG}$
3.° el arco AC, ó el ángulo PGQ.	$\frac{QP}{GQ}$	$\frac{GP}{GQ}$	$\frac{QP}{GP}$
4.° el ángulo ABC ó QBP.	$\frac{PQ}{BQ}$	$\frac{BP}{BQ}$	$\frac{QP}{BP}$
5.° el ángulo BCA.	$\frac{BP \times GQ}{BQ \times GP}$	$\frac{QP \times BG}{GP \times BQ}$	$\frac{BP \times GQ}{PQ \times BG}$

697 Es facil sacar todas estas espresiones despues de lo dicho (I. 666 y 667), y por esto nos contentaremos con sacar las que forman la primera linea de la tabla. Si consideramos como el radio la hypotenusa GQ, y hacemos $= 1$ el radio de las tablas, tendremos $GQ : QB :: 1 :$ sen QGB, ó sen $BC = \frac{QB}{GQ}$, pues es BC la medida del ángulo QGB, y $GQ : GB :: 1 :$ cos QGB, ó cos $BC = \frac{GB}{GQ}$. De donde sacaremos tang $BC = \frac{BQ}{BG}$, y cot $BC = \frac{BG}{BQ}$. Solo la última linea de la tabla se saca de las dos primeras proposiciones que vamos á sentar, y se demuestran todas con substituir en cada una en particular los valores de los términos de cada proporcion que en ella se espresa, y siempre se hallará una perfecta igualdad entre el producto de los medios y el de los estremos.

698 *En un triángulo esférico qualquiera* BAC *rec-* 273.
tángulo en A, *el seno total es al seno de la hypotenusa, como el seno de un ángulo es al seno del lado opuesto; y recíprocamente.*

Fig. De donde sacaremos R: sen BC :: sen BCA: sen BA, y substituyendo los valores que dá la tabla, calculados en el supuesto de $R = 1$, tendremos $1 : \frac{BQ}{GQ}$ :: sen $BCA : \frac{BP}{GP}$, que dá sen $BCA = \frac{BP \times GQ}{GP \times BQ}$.

273. 699 *En un triángulo esférico* BAC *rectángulo en* A, *se verificará que el radio es al coseno de un ángulo, como la tangente de la hypotenusa es á la tangente del lado adyacente á dicho ángulo; quiero decir que* R : *cos* B :: *tang* BC: *tang* AB; *ó* R : *cos* C :: *tang* BC : *tang* AC.

De esta proposicion inferiremos la espresion del coseno de BCA qual está en la tabla; porque con egecutar en la segunda proporcion las substituciones correspondientes por medio de la tabla, tendremos $1 : \cos C :: \frac{BQ}{BG} : \frac{QP}{GP}$; de donde se saca cos C ó cos $BCA = \frac{QP \times BG}{GP \times BQ}$.

Con esto será facil hallar la espresion de la tangente y cotangente del espresado ángulo.

273. 700 *En todo triángulo rectángulo, el seno total es al coseno del uno de los lados, como el coseno del otro lado es al coseno de la hypotenusa; esto es,* R : *cos* AB :: *cos* AC: *cos* BC.

273. 701 *El radio es al seno de un ángulo, como el coseno del lado adyacente es al coseno del otro ángulo; esto es,* R : *sen* B :: *cos* AB : *cos* C; *ó* R : *sen* C :: *cos* AC : *cos* B.

273. 702 *El radio es al seno de un lado, como la tangente del ángulo adyacente á dicho lado es á la tangente del otro lado, ó* R : *sen* AB :: *tang* B : *tang* AC; *ó* R : *sen* AC :: *tang* C : *tang* AB.

703 *El radio es á la cotangente de un ángulo, como la cotangente del otro ángulo es al coseno de la hypotenusa; ó lo que viene á ser lo mismo, el radio es al coseno de la hypotenusa, como la tangente de un ángulo es á la cotangente del otro ángulo. Quiero decir que* R : *cot* B :: *cot* C : *cos* BC; ó R : *cos* BC :: *tang* B : *cot* C :: *tang* C : *cot* B. Fig. 273.

704 De lo dicho (*699*) inferiremos que si dos triángulos esféricos *ABC*, *ABD* ambos rectángulos en *B* tuvieren un lado *AB* comun, las tangentes de las hypotenusas serán en razon inversa de los cosenos de los ángulos adyacentes al lado comun. 274.

Porque de la proposicion citada se sigue que R : cos CAB :: tang CA : tang AB, y R : cos BAD : tang DA: tang AB. Multiplicando los estremos y medios de las dos proporciones, sacaremos cos $CAB \times$ tang $CA = R \times$ tang $AB =$ cos $BAD \times$ tang DA; luego tang CA : tang DA :: cos BAD : cos CAB.

705 De lo probado (700) resulta que si dos triángulos esféricos rectángulos tuvieren un lado comun, los cosenos de sus hypotenusas serán como los cosenos de los lados no comunes. 274.

Porque en virtud de la proposicion citada será R : cos AB :: cos BC : cos AC, y R : cos AB :: cos BD : cos AD. Luego cos BC : cos BD :: cos AC : cos AD.

706 De lo dicho (701) inferiremos que si dos triángulos esféricos rectángulos tuviesen un lado comun, los cosenos de los ángulos opuestos á dicho lado serán como

los

Fig. los senos de los ángulos adyacentes.

Porque en virtud de la proposicion citada tendremos R : sen CAB :: cos AB : cos C, y R : sen BAD :: cos AB: cos D; ó sen CAB : cos C :: R : cos AB :: sen BAD: cos D; y por consiguiente cos C : cos D :: sen CAB: sen BAD.

707 De lo probado (702) se sigue que si dos triángulos rectángulos tuviesen un lado comun, los senos de los lados no comunes serán recíprocamente como las tangentes de los ángulos de los lados.

274. Porque de la proposicion citada sacaremos R : sen CB :: tang C : tang AB; y R : sen BD :: tang D : tang AB. Luego sen CB × tang $C = R$ × tang AB = sen BD × tang D, y por consiguiente sen CB : sen BD :: tang D : tang C.

275. 708 De lo probado (698 y 702) se sigue que si dos triángulos esféricos ABC, BDC rectángulos el primero en B, y el otro en D, tuviesen un ángulo comun C,

1.º Los senos de sus hypotenusas serán como los senos de los lados opuestos al ángulo comun; porque de lo dicho (698) sacaremos R : sen AC :: sen C : sen AB, ó R : sen C :: sen AC : sen AB; y R : sen CB :: sen C : sen BD, ó R : sen C :: sen CB : sen BD. Luego sen AC : sen CB :: sen AB : sen BD.

2.º Las tangentes de los lados opuestos al ángulo comun serán como los senos de los lados adyacentes al ángulo comun. Porque de lo dicho (702) resulta que R: sen BC :: tang C: tang AB, y R : sen DC :: tang C: tang DB;

n de todos los casos posibles de los triángulos cos rectángulos (709).

Valores.		*Casos en que lo que busco no llega á 90°.*
$= \frac{\textit{sen}\text{ lado dado}}{\textit{sen}\text{ hypot.}}$	(698)	Si los datos son de una misma especie.
$= \frac{\textit{tang}\text{ lad. dado}}{\textit{tang}\text{ hypot.}}$	(699)	Lo mismo.
$= \frac{\textit{cos}\text{ hypot.}}{\textit{cos}\text{ lad. dado.}}$	(700)	Si el lado dado fuere menor que 90°.
$= \frac{\textit{sen}\text{ lad. dado}}{\textit{sen}\text{ áng. dado}}$	(698)	Dudoso.
$= \frac{\textit{tang}\text{ lad. dado}}{\textit{tang}\text{ áng.dado}}$	(702)	Dudoso.
$= \frac{\textit{cos}\text{ áng. dado}}{\textit{cos}\text{ lad. dado}}$	(701)	Dudoso.
$= \frac{\textit{tang}\text{ lad. dado}}{\textit{cos}\text{ áng. dado}}$	(699)	Si los datos son de una misma especie.
= *cos* lad. dado × *sen* áng. dado	(701)	Si el lado dado es menor que 90°.
= *sen* lad. dado × *tang* áng. dado	(702) ...	Si el ángulo dado fuere menor que 90°.
= *tang* hyp. × *cos* áng. dado	(699)	Si el ángulo dado fuere agudo.
= *sen* hyp. × *sen* áng. dado	(698)	Si los datos fueren de una misma especie.
$= \frac{\textit{cot}\text{ áng. dado}}{\textit{cos}\text{ hypot.}}$	(703)	Si la hypot. fuere menor que 90°.
= rectáng. *cos* lados dados	(700)	Si los datos fuesen de una misma especie.
$= \frac{\textit{tang}\text{ lad. opuesto}}{\textit{sen}\text{ lad. adyac.}}$	(702)	Si el lado opuesto fuere agudo.
= rectáng. *cot.* áng. dados	(703)	Si los datos fueren de una misma especie.
$= \frac{\textit{cos}\text{ áng. opuesto}}{\textit{sen}\text{ áng. adyac.}}$	(702)	Si el ángulo opuesto fuere agudo.

Tabla para la resolucion de todos los casos posibles de los triángulos esféricos rectángulos (709).

Datos.	*Busco.*	*Valores.*	*Casos en que lo que busco no llega á 90°.*
A Hypotenusa y un lado.	Angulo opuesto al lado dado.	Su $sen = \frac{sen\ \text{lado dado}}{sen\ \text{hypot.}}$ (698)	Si los datos son de una misma especie.
	Angulo adyac. al lado dado.	Su $cos = \frac{tang\ \text{lad. dado}}{tang\ \text{hypot.}}$ (699)	Lo mismo.
	El otro lado.	Su $cos = \frac{cos\ \text{hypot.}}{cos\ \text{lad. dado.}}$ (700)	Si el lado dado fuere menor que 90°.
B Un lado y el ángulo opuesto.	Hypotenusa.	Su $sen = \frac{sen\ \text{lad. dado}}{sen\ \text{áng. dado}}$ (698)	Dudoso.
	El otro lado.	Su $sen = \frac{tang\ \text{lad. dado}}{tang\ \text{áng. dado}}$ (702)	Dudoso.
	El otro ángulo.	Su $sen = \frac{cos\ \text{áng. dado}}{cos\ \text{lad. dado}}$ (701)	Dudoso.
C Un lado y el ángulo adyacente.	Hypotenusa.	Su $tang = \frac{tang\ \text{lad. dado}}{cos\ \text{áng. dado}}$ (699)	Si los datos son de una misma especie.
	El otro ángulo.	Su $cos = cos\ \text{lad. dado} \times sen\ \text{áng. dado}$ (701)	Si el lado dado es menor que 90°.
	El otro lado.	Su $tang = sen\ \text{lad. dado} \times tang\ \text{áng. dado}$ (702) ...	Si el ángulo dado fuere menor que 90°.
D La hypotenusa y un ángulo.	Lado adyac.	Su $tang = tang\ \text{hyp.} \times cos\ \text{áng. dado}$ (699)	Si el ángulo dado fuere agudo.
	Lado op. al ángulo dado.	Su $sen = sen\ \text{hyp.} \times sen\ \text{áng. dado}$ (698)	Si los datos fueren de una misma especie.
	Otro ángulo.	Su $tang = \frac{cot\ \text{áng. dado}}{cos\ \text{hypot.}}$ (703)	Si la hypot. fuere menor que 90°.
E Los dos lados.	Hypotenusa.	Su cos = rectáng. cos lados dados (700)	Si los datos fuesen de una misma especie.
	Un ángulo.	Su $tang = \frac{tang\ \text{lad. opuesto}}{sen\ \text{lad. adyac.}}$ (702)	Si el lado opuesto fuere agudo.
F Los dos ángulos.	Hypotenusa.	Su cos = rectáng. $cot.$ áng. dados (703)	Si los datos fueren de una misma especie.
	Un lado.	Su $cos = \frac{cos\ \text{áng. opuesto}}{sen\ \text{áng. adyac.}}$ (702)	Si el ángulo opuesto fuere agudo.

DB; de donde será facil sacar tang *AB* : tang *BD* : sen Fig.
BC : sen *DC*.

709 Por medio de las proposiciones que hemos sentado, se resuelven todos los casos posibles de los triángulos esféricos rectángulos, conforme lo manifiesta la tabla adjunta.

De la Resolucion de los Triángulos esféricos obliquángulos.

710 Quando las tres partes de un triángulo esférico están colocadas de manera que dos de ellas tocan inmediatamente la tercera, ó no están separadas de ella sino por el ángulo recto, dichas dos partes se llaman *Adyacentes* á la tercera que llamarémos *Parte media.*

711 Quando las tres partes de un triángulo rectángulo están dispuestas de tal modo que entre una de las tres, que miraremos como parte media, y cada una de las otras dos haya siempre otra parte del mismo triángulo; dichas dos partes se llaman *Partes separadas.* Consideramos el ángulo recto como si no separára las partes entre las quales está.

Si en el triángulo *BAC* rectángulo en *A* 273.

Las partes medias fuesen	las adyacentes serán	y las separadas
AB	*AC* y *B*	*BC* y *C*
AC	*AB* y *C*	*BC* y *B*
BC	*B* y *C*	*AC* y *AB*
B	*AB* y *BC*	*AC* y *C*
C	*AC* y *BC*	*AB* y *B*

712 Es evidente que si *MDA* fuere el suplemento de

Fig. de BM, el seno ME de la mitad de MDA será igual á CF
276. coseno de la mitad BG del arco BM.

277. 713 *En todo triángulo esférico* BAC, *los senos de los ángulos tienen unos con otros la misma razon que los senos de los lados opuestos.*

Bagemos, para probarlo, desde un ángulo qualquiera A del triángulo esférico BAC el arco AD perpendicular á la base BC. En virtud de esto, y de lo dicho (698) tendremos R : sen AB :: sen B : sen AD, y R : sen AC :: sen C: sen AD. De donde sacaremos sen AB × sen B = sen AC × sen C, que dá esta proporcion sen B : sen C :: sen AC: sen AB.

1.° A los ángulos BAD, CAD que forman los lados AB, AC del ángulo BAC con la perpendicular, los llamaremos *Segmentos del ángulo vertical*, ora cayga la perpendicular dentro, ora esté fuera del triángulo BAC.

2.° Llamaremos *Segmentos de la base* las partes BD y DC del lado BC que están entre los puntos B y C, y el punto D donde la perpendicular AD encuentra dicho lado; esté prolongada, ó no la espresada base.

3.° Si consideramos los segmentos BAD, CAD del ángulo BAC, los lados AB, AC de dicho ángulo se llamarán *Partes adyacentes*, porque lo son con efecto. Los ángulos B y C de la base BC serán las partes separadas, porque entre dichos ángulos, y los segmentos están los lados BA y CA.

4.° Si consideramos los segmentos BD y CD de la ba-

base, los ángulos B y C serán las partes adyacentes, y los lados BA y CA serán las partes separadas respecto de los mismos segmentos de la base. Fig.

714 *Si desde un ángulo qualquiera* A *de un triángulo esférico* BAC *bajamos una perpendicular* AD *al lado* BC, *prolongado si fuere menester, siempre se verificará:* 277.

1.° *Que habrá la misma razon entre los senos de los segmentos del ángulo, que entre los cosenos de las partes separadas. Quiero decir, que sen* BAD : *sen* CAD :: *cos* B : *cos* C.

Porque por lo dicho (701) en el triángulo rectángulo BDA tendremos $R : \cos AD :: \text{sen } BAD : \cos B$; y en el triángulo rectángulo CDA tendremos tambien $R : \cos AD :: \text{sen } CAD : \cos C$. Luego $\text{sen } BAD : \text{sen } CAD :: \cos B : \cos C$.

2.° *Habrá entre los cosenos de los mismos segmentos la misma razon que entre las cotangentes de las partes adyacentes; quiero decir que cos* BAD : *cos* CAD :: *cot* AB : *cot* AC.

Porque en virtud de lo dicho (699) será $R : \cos BAD :: \text{tang } BA : \text{tang } AD :: \frac{1}{\cot BA} : \frac{1}{\cot AD} :: \cot AD : \cot BA$; luego $R : \cos BAD :: \cot AD : \cot BA$. Del mismo modo probaríamos que $R : \cos CAD :: \cot AD : \cot CA$. Luego una vez que son unos mismos los antecedentes en ambas proporciones, será $\cos BAD : \cos CAD :: \cot AB : \cot AC$.

3.° *Hay una misma razon entre los senos de los segmentos de la base, que entre las cotangentes de las partes*

ad-

Fig. *adyacentes. Quiero decir que sen* BD : *sen* CD :: *cot* B : *cot* C.

Porque por lo dicho (702) en el triángulo BDA será R : sen BD :: tang B : tang AD :: $\frac{1}{\cot B}$: $\frac{1}{\cot AD}$ :: cot AD: cot B ; y en el triángulo CDA inferiríamos tambien R : sen CD :: cot AD : cot C. Luego ya que son unos mismos los antecedentes en ambas proporciones, resulta que sen BD: sen CD :: cot B : cot C.

4.° *Hay la misma razon entre los cosenos de los segmentos de la base, que entre los cosenos de las partes separadas: quiero decir que cos* BD : *cos* CD :: *cos* AB : *cos* AC.

Porque de lo dicho (700) resulta que en el triángulo BAD tenemos R : cos BD :: cos AD : cos BA. Y por lo mismo tambien tendremos en el triángulo CDA, R : cos CD :: cos AD : cos AC. Luego finalmente cos BD: cos CD :: cos BA : cos AC.

715 *Supongamos que sea* BAC *un triángulo esférico*
278. *qualquiera estando uno de sus lados* AB *en la circunferencia de un círculo máximo* ABREar ; *vamos á enseñar cómo se puede trazar en el plano del espresado círculo máximo la* Proyeccion ortográfica *del triángulo* ACB ; *esto es, la figura que resulta de las lineas tiradas desde los puntos de los lados del triángulo* ABC *perpendicularmente al plano* ABRFr.

Desde los estremos A, B del arco AB tírense al centro G los radios GA y GB. Por el mismo centro G, que lo es tambien de la esfera, concibamos que pase un plano ó círculo máximo $rDRO$ perpendicular al plano $ARar$, cuya comun seccion Rr con el plano del mismo círculo sea

per-

perpendicular al radio GA; finalmente prolónguese el arco Fig. AC hasta que encuentre la circunferencia $rDRO$ en un punto D, desde el qual se tirará tambien al centro G la linea DG, y la linea Dd perpendicular al diámetro Rr.

Sentado esto, es evidente que el ángulo DGR es el mismo que el ángulo BAC formado del concurso de los planos BAG, CAG; por ser ambas lineas DG, RG perpendiculares á la interseccion comun AG; y el ángulo DGr es igual al suplemento del mismo ángulo BAC. Es tambien patente que si por el punto C tiramos una linea Cc perpendicular al mismo plano $ARar$, el punto c será la proyeccion del ángulo C; y si por la linea Cc hacemos que pase un plano lCL paralelo al plano $rDRO$, la interseccion Ll de este círculo menor, y del círculo máximo $ARar$ será tambien perpendicular al radio AG, y determinará arcos AL, Al iguales al arco AC; y la proyeccion del punto C estará en uno de los puntos de dicha linea. Tambien estará por la misma razon en una linea Ff que fuese la interseccion del círculo máximo $ARar$, y de un círculo menor fCF perpendicular al plano del mismo círculo máximo, cuya linea Ff tambien será perpendicular al radio BG, y determinaria los arcos BF, Bf, ambos iguales al arco BC. Esto manifiesta cómo se puede determinar en un instante la proyeccion del ángulo C por medio de la interseccion comun de las lineas Ll, Ff en el plano del círculo $ARar$, siendo conocidos los tres lados del triángulo ABC.

716. De lo que acabamos de probar resulta, que por

ser

Fig. ser semejantes los triángulos rectángulos DdG, CcH, pues son paralelas unas con otras recíprocamente las lineas que los forman, será $DG : CH$ ó $rG : lH :: dG : cH$; esto es, R : sen AC :: cos $BAC : cH$, y como sacaríamos la misma proporcion para cada uno de los puntos proyectados del arco AC, se sigue que la proyeccion de dicho arco en el plano del círculo $ARar$ es (91) una elipse cuyo semiege mayor es AG y dG el semiege menor.

717 Luego la proyeccion ortográfica de un círculo qualquiera, ó de una porcion de círculo es una elipse ó porcion de elipse, cuyo semiege mayor es igual al seno total, y el semiege menor es igual al coseno del ángulo que forman uno con otro el plano en que está el círculo, y el plano en que se ha de trazar su proyeccion ortográfica. Todo esto supuesto digo que

718 *En un triángulo esférico qualquiera* BAC *se verificará siempre esta proporcion. El producto de los senos de los lados* AB, AC *de un ángulo qualquiera* BAC, *es al producto de los senos de las diferencias que ván de cada uno de dichos lados á la semisuma de los tres lados; como el quadrado del radio es al quadrado del seno de la mitad del ángulo. Esto es que* $\text{sen}\,AB \times \text{sen}\,AC : \text{sen}\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AC\right) \times \text{sen}\left(\frac{AB+AC+BC}{2} - AB\right) :: R^2 : \text{sen}^2\left(\frac{1}{2}BAC\right)$.

279. Antes que probemos esta proposicion, se nos hace preciso considerar, que si en el plano del círculo $ABRa$ tomamos al uno y otro lado del punto A los arcos AL, Al cada uno igual al arco AC, y tambien al uno y otro lado

del

del punto B los arcos BF, Bf cada uno igual al arco Fig.
BC, y tiramos las cuerdas Ll, Ff respectivamente perpendiculares á los radios GA, GB; la interseccion C de dichas dos cuerdas será (715) la proyeccion del ángulo C del triángulo BAC. De la misma construccion resultará tambien que $BL = AC - AB$, y $Bl = AC + AB$. Tambien será $LF = BF - BL = BC - AC + AB$; $lf = Bl - Bf = AB + AC - BC$, y $Lf = Bf + BL = BC + AC - AB$. A mas de esto, hagamos esta proporcion $Hl : CH :: Gr : Gd$; ó lo que es lo mismo, tómese en la Gr una parte Gd quarta proporcional á las tres lineas Hl, CH y Gr, que será el coseno del ángulo BAC (como se vé en la fig. 278); por consiguiente si en el punto d levantamos una recta Dd perpendicular al radio Gr; será el seno del ángulo RGD igual al ángulo BAC, y le determinará. Finalmente, tírense desde el punto D á los extremos del diámetro Rr las cuerdas DR, Dr; bágense á esta cuerda desde el centro G las perpendiculares GS, Gs; y desde los puntos S, s las perpendiculares SV, su al diámetro Rr; es evidente que será RS el seno de la mitad del ángulo BAC; y rs será el seno de la mitad del suplemento del ángulo BAC, ó el coseno de la mitad de dicho ángulo (712).

Sentado todo esto, por de contado es constante que habiendo entre los senos de los ángulos de un triángulo rectilineo (I. 671) la misma razon que entre los

Fig. lados, serán tambien los senos de los ángulos del triángulo rectilineo CLF como las mitades de los lados, pues hay entre las mitades la misma razon que entre los todos. Es tambien constante que el ángulo LCF es igual al ángulo AGB, teniendo presente lo dicho (I. 380), y los valores sacados poco ha de los arcos LF, lf. Por consiguiente tendrémos esta proporcion sen C ó sen AB : sen F :: $\frac{1}{2}LF$: $\frac{1}{2}CL$. De la proporcion que hay entre las lineas GR, HL, Gd, CH sacarémos $HL : GR :: CH : Gd$; ó $HL : CH :: GR : Gd$; luego (I. 288) $HL : CH + HL :: GR : Gd + GR$; esto es $HL : GR :: CL : dR :: \frac{1}{2}CL : \frac{1}{2}dR = VR$, porque en los triángulos semejantes RDd, RSV, siendo RS la mitad de RD, será RV la mitad de Rd. Y por estar las lineas GR, RS, RV en proporcion continua (I. 463), tendrémos (I. 220) $GR : RV :: (GR)^2 : (RS)^2$; son, pues, las tres proporciones que hemos sacado

$$\text{Sen } AB : \text{sen } F :: \tfrac{1}{2}LF : \tfrac{1}{2}CL$$

$$HL : GR :: \tfrac{1}{2}CL : VR$$

$$GR : VR :: (GR)^2 : (RS)^2,$$

multiplicándolas ordenadamente, y borrando los términos comunes á los antecedentes, y á los consecuentes resultará sen $AB \times HL$: sen $F \times VR$ :: $\frac{1}{2}LF \times (GR)^2 : VR \times (RS)^2$, ó sen $AB \times HL$: sen $F \times \frac{1}{2}LF$ :: $(GR)^2 : (RS)^2$. Y como $HL =$ sen AC, sen $F =$ sen $\frac{1}{2}LAf =$ sen $\left(\frac{BC + AC - AB}{2}\right)$ $=$ sen$\left(\frac{BC + AC + AB}{2} - AB\right)$, y $\frac{1}{2}LF =$ sen $\frac{1}{2}LRF =$ sen $\left(\frac{BC + AB - AC}{2}\right) =$ sen$\left(\frac{BC + AB + AC}{2} - AC\right)$. Luego si substituimos estos valores, la última proporcion se transformará

 en

en sen AB × sen AC : sen $\left(\frac{BC+AB+AC}{2} - AB\right)$ × sen $\left(\frac{BC+AC+AB}{2} - AC\right)$ :: R^2 : sen^2 $\frac{1}{2}BAC$. Fig.

719 Suponiendo la misma construccion que en la última proposicion, tambien se verificará en un triángulo esférico qualquiera BAC, la siguiente analogía.

El producto de los senos de los lados AB, AC *de un ángulo qualquiera, es al producto del seno de la semisuma de los dos lados y del lado opuesto por el seno de la semidiferencia que vá de dichos dos lados al tercero, como el quadrado del radio es al quadrado del coseno de la mitad del ángulo que forman; quiero decir, que sen* AB × *sen* AC : *sen* $\left(\frac{\mathrm{AC}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}}{2}\right)$ × *sen* $\left(\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}-\mathrm{BC}}{2}\right)$ :: R^2 : $\cos^2 \frac{1}{2}BAC$. 279.

Porque en el triángulo Clf los senos de los ángulos tienen unos con otros la misma razon que las mitades de los lados opuestos; pero es evidente que el ángulo en f tiene por medida la mitad del arco FDl, que es el suplemento de la mitad del arco FAl igual á la mitad de la suma de los tres lados AC, AB, BC. El arco fl, segun probamos antes (718) $= AC + AB - BC$, y por consiguiente la mitad de su cuerda será el seno de la mitad de dicho arco. Sentado esto, una vez que hay entre los senos la misma razon que entre los lados opuestos; y que siendo el ángulo $lCf = LCF$, será tambien igual al ángulo AGB, por lo probado poco ha (718), tendremos sen AB: sen f :: $\frac{1}{2}lf$: $\frac{1}{2}Cl$; por construccion HL : Gr :: $\frac{1}{2}Cl$: $\frac{1}{2}dr$ $=ur$, y por estar en proporcion continua las lineas Gr, rs, ru será Gr : ur :: $(Gr)^2$: $(rs)^2$. Luego multiplicando or-

 de-

Fig. denadamente los términos de estas tres proporciones, sacaremos sen $AB \times Hl$: sen f :: $\frac{1}{2}lf \times (Gr)^2 : (rs)^2$ ó sen $AB \times Hl$: sen $f \times \frac{1}{2}lf$ :: $(Gr)^2 : (rs)^2$; y substituyendo los valores de cada linea sacaremos finalmente sen $AB \times$ sen AC: sen $\left(\frac{AB+AC+BC}{2}\right) \times$ sen $\left(\frac{AB+AC-BC}{2}\right) :: R^2 : \cos^2 \frac{1}{2}BAC$. Es facil probar que $(rs)^2 = \cos^2 \frac{1}{2} BAC$; porque se viene á los ojos que $rs = sD = GS = \cos RGS = \cos \frac{1}{2} RGD = \cos \frac{1}{2} BAC$.

720 Síguese de lo probado (719) que si llamamos s la suma de los tres lados; a, el lado opuesto al ángulo que se pide; b y c respectivamente, los dos lados que forman dicho ángulo será sen $\frac{1}{2}$ ángulo $=$

$$\frac{r\sqrt{\left[\text{sen}\left(\frac{s}{2}-b\right) \times \left(\text{sen}\,\frac{s}{2}-c\right)\right]}}{\sqrt{(\text{sen}\, b \times \text{sen}\, c)}}$$

; y (719) cos $\frac{1}{2}$ ángulo $=$

$$\frac{r\sqrt{\left[\text{sen}\left(\frac{b+c+a}{2}\right) \times \text{sen}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\right]}}{\sqrt{(\text{sen}\, b \times \text{sen}\, c)}} = \frac{r\sqrt{\left[\text{sen}\,\frac{1}{2}s \times \text{sen}\left(\frac{1}{2}s - a\right)\right]}}{\sqrt{(\text{sen}\, b \times \text{sen}\, c)}}.$$

721 Quando los dos lados que forman el ángulo que se pide son iguales, $b = c$, y $AC = AB$. Entonces $\frac{1}{2}s - b = \frac{s-2b}{2} = \frac{BC+2AB}{2} - AB = \frac{1}{2} BC$, y $\frac{1}{2}s - b = \frac{1}{2}s - c$; por consiguiente $\sqrt{\left[\text{sen}\left(\frac{1}{2}s - b\right) \times \text{sen}\left(\frac{1}{2}s - c\right)\right]} = \text{sen}\,\frac{1}{2}BC$, y sen $\frac{1}{2}$ ángulo $= \frac{r \times \text{sen}\,\frac{1}{2}BC}{\text{sen}\, b}$.

En

En el mismo supuesto será cos $\frac{1}{2}$ ángulo $=$ Fig.

$$\frac{r\sqrt{\left[\text{sen}\,(b+\frac{1}{2}a)\times\text{sen}\,(b-\frac{1}{2}a)\right]}}{\text{sen}\,b}.$$

722 De un triángulo esférico qualquiera ABC cuyos tres ángulos son conocidos sacaremos siempre la siguiente analogía. 279.

El producto de los senos de los ángulos adyacentes á un lado es al producto de los cosenos de las diferencias que hay entre cada uno de dichos ángulos y la semisuma de los tres ángulos, como el quadrado del radio es al quadrado del coseno de la mitad del lado que se busca; quiero decir, que sen B $\times$ *sen* C : $cos\left(\frac{A+B+C}{2}-B\right)\times cos\left(\frac{A+B+C}{2}-C\right) :: R^2 : cos^2 \frac{1}{2}BC$,

Y tambien sacaremos estotra analogía.

El producto de los senos de los ángulos adyacentes á un lado, es al producto del coseno de la semisuma de dichos dos ángulos y del tercero, por el coseno de la semidiferencia que vá de dichos dos ángulos al tercero; como el quadrado del radio es al quadrado del seno de la mitad del lado que se busca; quiero decir que sen B $\times$ *sen* C : $cos\left(\frac{B+C+A}{2}\right)\times cos\left(\frac{B+C-A}{2}\right) :: R^2 : sen^2 \frac{1}{2}BC$.

Porque en el triángulo DEF cuyas partes son (684) suplementos de las del triángulo BAC, se verificará por lo dicho (718) sen FD $\times$ sen EF : sen $\left(\frac{DF+FE+DE}{2}-DF\right)\times$ sen $\left(\frac{DF+FE+DE}{2}-FE\right) :: R^2 : \text{sen}^2\,\frac{1}{2}DFE$. 265.

Pero los arcos FD, FE son los suplementos de los

Fig. ángulos B y C del triángulo BAC, serán por consiguiente sus senos los mismos que los de los ángulos B y C. Y como el seno de la mitad del suplemento de un ángulo ó de un arco es (712) igual al coseno de la mitad de dicho arco ó ángulo, con egecutar en el segundo término las substituciones correspondientes, se transformará en $\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right) \times \cos\left(\frac{B+C+A}{2} - C\right)$. Finalmente, por ser el ángulo DFE suplemento del lado BC, su mitad será el complemento de la mitad de dicho lado, y su seno será el coseno de la mitad del lado BC. Luego la proporcion antecedente se transformará en estotra $\text{sen}\, B \times \text{sen}\, C : \cos\left(\frac{B+C+A}{2} - B\right) \times \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right) :: R^2 : \cos^2 \frac{1}{2}BC$.

2.° En el mismo triángulo DEF se verificará en virtud de lo dicho (719) $\text{sen}\, FD \times \text{sen}\, FE : \text{sen}\left(\frac{DF+FE+DE}{2}\right) \times \text{sen}\left(\frac{DF+FE-DE}{2}\right) :: R^2 : \cos^2 \frac{1}{2}DFE$; y si egecutamos en esta proporcion las mismas substituciones que en la antecedente, se transformará en estotra $\text{sen}\, B \times \text{sen}\, C : \cos\left(\frac{B+C+A}{2}\right) \times \cos\left(\frac{B+C-A}{2}\right) :: R^2 : \text{sen}^2 \frac{1}{2}BC$.

723 Luego si llamamos s la suma de los tres ángulos de un triángulo; a, b, c los tres ángulos; suponiendo que los ángulos b, c son adyacentes al lado que se busca; tendremos las siguientes fórmulas

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,\text{lado} = \frac{r\sqrt{\left[\cos\frac{1}{2}s \times \cos\left(\frac{1}{2}s - a\right)\right]}}{\sqrt{(\text{sen}\, b \times \text{sen}\, c)}}, \text{ y}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\,\text{lado} = \frac{r\sqrt{\left[\cos\left(\frac{1}{2}s - b\right) \times \cos\left(\frac{1}{2}s - c\right)\right]}}{\sqrt{(\text{sen}\, b \times \text{sen}\, c)}}, \text{ y}$$

tang

ulos esféricos obliquángulos (725).

segundo segmento del ángulo ó del lado dividido con la perpendicular.

Valores.

como los *senos* de los lados opuestos (713).

: *cos* áng. adyac. × *tang* lado dado (699).

m. × *tang* áng.ady. al lado dado / ng. op. al mismo lado dado (714 3.°).

do dado × *tang* áng. ady. (703).

ng. = *sen* I segm. × *cos* áng. op. al lado dado / *cos* áng.ady. al lado dado (714 1.°).

como los de los áng. op. (713).

ang áng. dado × *cos* lad. ady. (703).

ng. = *cos* I segm. × *tang* lado dado ady. al áng. dado / *tang* lado op. al áng. dado (704).

= *cos* áng.dado × *tang* lado ady. á dicho áng. (699).

do = *cos* I segm. × *cos* lado op. al áng. dado / *cos* lado ady. al áng.dado (714 4.°).

= *cos* áng. dad. × *tang* lad. op. al áng. dado (699).

áng. dado × *sen* I segm. / I segm. del lado dividido (714 3.°).

d. = *cos* áng. dado × *tang* lado no divid. (699).

ado no divid. × *cos* II segm. / I segm. del lado divid. (714 4.°).

= *cos* lado dad. × *tang* áng. op. al lado ped. (703).

lado dad. × *cos* I segm. áng. divid. / *cos* II segm. del mismo áng. (714 2.°).

cos lado dad. × *tang* áng. dado no divid. (703).

ng. no divid. × *sen* II segm. / *n* I segm. del áng. divid. (714 1.°).

ic. al áng. pedido.

-c)] (720).

(720).

ntes al lado pedido.

(723).

)] (723).

Tabla para la resolucion de los triángulos esféricos obliquángulos (725).

I segm. ó II segm. quiere decir primero ó segundo segmento del ángulo ó del lado dividido con la perpendicular.

Datos.	*Se busca.*		*Valores.*
A Dos ángulos y un lado op. al uno de dichos ángulos.	El lado op. al otro áng.	*Por la analogía comun.*	Los *senos* de los áng. son como los *senos* de los lados opuestos (713).
	Tercer lado.	*Bájese una perpendic. al lado que junta los ángulos dados.*	*Tang* I segm. del lado = *cos* áng. adyac. × *tang* lado dado (699). *Sen* II segm. = $\frac{\mathit{sen}\text{ I segm.}\times\mathit{tang}\text{ áng.ady. al lado dado}}{\mathit{tang}\text{ áng. op. al mismo lado dado}}$ (714 3.°).
	Tercer ángulo	*Sirve la misma perpendicular.*	*Cot* I segm. áng. = *cos* lado dado × *tang* áng. ady. (703). *Sen* II segm. del mismo áng. = $\frac{\mathit{sen}\text{ I segm.}\times\mathit{cos}\text{ áng. op. al lado dado}}{\mathit{cos}\text{ áng.ady. al lado dado}}$ (714 1.°).
B Dos lados y un ángul. opuesto al uno de estos lados.	El áng. opuesto al otro lado.	*Por la analogía comun.*	Los *senos* de los lados son como los de los áng. op. (713).
	Ang. comprehend. entre los lados dados.	*Bájese una perpend. desde el áng. que forman los lados dados.*	*Cot* I segm. áng. busc. = *tang* áng. dado × *cos* lad. ady. (703). *Cos* II segm. del mismo áng. = $\frac{\mathit{cos}\text{ I segm.}\times\mathit{tang}\text{ lado dado ady. al áng. dado}}{\mathit{tang}\text{ lado op. al áng. dado}}$ (704).
	Tercer lado.	*Sirve la misma perpendicular.*	*Tang* I segm. de este lado = *cos* áng. dado × *tang* lado ady. á dicho áng. (699). *Cos* II segm. del mismo lado = $\frac{\mathit{cos}\text{ I segm.}\times\mathit{cos}\text{ lado op. al áng. dado}}{\mathit{cos}\text{ lado ady. al áng. dado}}$ (714 4.°).
C Dos lados y el ángulo que forman.	Un áng. op. al uno de los lados dados.	*Bájese una perp. desde el áng. que no se busca*	*Tang* I segm. lad. divid. = *cos* áng. dad. × *tang* lad. op. al áng. dado (699). *Tang* áng. pedido = $\frac{\mathit{tang}\text{ áng. dado}\times\mathit{sen}\text{ I segm.}}{\mathit{sen}\text{ II segm. del lado dividido}}$ (714 3.°).
	El tercer lado.	*Bájese una perp. al uno de los lados dados.*	*Tang* I segm. del lado divid. = *cos* áng. dado × *tang* lado no divid. (699). *Cos* lado pedido = $\frac{\mathit{cos}\text{ lado no divid.}\times\mathit{cos}\text{ II segm.}}{\mathit{cos}\text{ I segm. del lado divid.}}$ (714 4.°).
D Un lado y los dos áng. ady. al mismo lado.	Un lado op. al uno de los ángulos dados.	*Bájese una perpendic. al lado que no se busca.*	*Cot* I segm. del áng. divid. = *cos* lado dad. × *tang* áng. op. al lado ped. (703). *Tang* lado ped. = $\frac{\mathit{tang}\text{ lado dad.}\times\mathit{cos}\text{ I segm. áng. divid.}}{\mathit{cos}\text{ II segm. del mismo áng.}}$ (714 2.°).
	Tercer ángulo.	*Bájese una perp. desde el uno de los áng. dados.*	*Cot* I segm. áng. divid. = *cos* lado dad. × *tang* áng. dado no divid. (703). *Cos* áng. pedid. = $\frac{\mathit{cos}\text{ áng. no divid.}\times\mathit{sen}\text{ II segm.}}{\mathit{sen}\text{ I segm. del áng. divid.}}$ (714 1.°).
E Los tres lados.	Sean a, b, c los tres lados cuya suma $= s$; b y c los adyac. al áng. pedido.		
	Un áng. por el *sen*, ó *cos* de su mitad.		*Sen* $\frac{1}{2}$áng. = $\frac{r\times\sqrt{[\text{sen}(\frac{1}{2}s-b)\times\text{sen}(\frac{1}{2}s-c)]}}{\sqrt{(\text{sen}\,b\times\text{sen}\,c)}}$ (720). *Cos* $\frac{1}{2}$áng = $\frac{r\times\sqrt{[\text{sen}\,\frac{1}{2}s\times\text{sen}(\frac{1}{2}s-a)]}}{\sqrt{(\text{sen}\,b\times\text{sen}\,c)}}$ (720).
F Los tres ángulos.	Sean α, β, γ los tres áng. cuya suma $= s$; β y γ los adyacentes al lado pedido.		
	Un lado por el *sen*, ó *cos* de su mitad.		*Sen* $\frac{1}{2}$ lado = $\frac{r\times\sqrt{[\cos\,\frac{1}{2}s\times\cos(\frac{1}{2}s-\alpha)]}}{\sqrt{(\text{sen}\,\beta\times\text{sen}\,\gamma)}}$ (723). *Cos* $\frac{1}{2}$ lado = $\frac{r\sqrt{[\cos(\frac{1}{2}s-\beta)\times\cos(\frac{1}{2}s-\gamma)]}}{\sqrt{(\text{sen}\,\beta\times\text{sen}\,\gamma)}}$ (723).

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{lado} = \frac{r\sqrt{\left[\cos\tfrac{1}{2}s \times \cos(\tfrac{1}{2}s - a)\right]}}{\sqrt{\left[\cos(\tfrac{1}{2}s - b) \times \cos(\tfrac{1}{2} - c)\right]}}.$$ Fig.

724 Si fuesen iguales los dos ángulos adyacentes, sacaríamos de lo probado en la primera parte de la proposicion (722) $\text{sen}^2 B : \cos^2 \tfrac{1}{2}A :: R^2 : \cos^2 \tfrac{1}{2}BC$; y, sacando las raices, $\cos\tfrac{1}{2}BC = \dfrac{r \times \cos\tfrac{1}{2}A}{\text{sen}\,B}$. La segunda parte de la proposicion nos daria una fórmula menos sencilla que la primera.

De la Resolucion gráfica ó geométrica de los Triángulos esféricos qualesquiera.

725 Resolver gráfica ó geométricamente un triángulo es resolverle por medio de la regla y del compas. Estas resoluciones geométricas no son á la verdad tan exactas como las numéricas, que han llegado á ser sumamente sencillas desde la invencion de los logaritmos; porque la precision de las construcciones que requieren las resoluciones gráficas pende á un tiempo de la destreza del que las egecuta, y de la exactitud de los instrumentos de que se vale. No por esto me ha parecido del caso omitirlas, porque hablan á su favor las razones siguientes.

1.° Las resoluciones geométricas, aunque poco exactas por las razones espresadas, no son por esto menos rigurosas para el entendimiento, por fundarse en las proposiciones mas fundamentales de la geometría. 2.° Ocurren

Fig. casos en que no se necesita toda la precision del cálculo, como quando se trata de orientar un plano, ó una calle de árboles por medio de algunas observaciones hechas de prisa, esto puede ocurrir con bastante frecuencia en la Gnomónica, para servir de preludio á una operacion mas perfecta; siendo por otra parte estas operaciones muy acomodadas para facilitar la práctica. 3.° Hay en la Astronomía teóricas fundadas en estas operaciones; sirven en muchos casos de la Náutica. Finalmente, pueden dirigirnos en algunos cálculos quando corremos algun riesgo de errarlos.

726 Cuestion I. *Dados los dos lados* AB, AC *de un*
279. *triángulo esférico* BAC, *y el ángulo que forman, hallar 1.° el uno de los ángulos de la base. 2. la base misma ó el tercer lado.*

Tómese en el plano del círculo *ABRDr* el arco *AB* igual al uno de los lados dados del ángulo *BAC*; tírense al centro *G* los radios *AG* y *GB*, por el qual se tirará el diámetro *rGR* perpendicular al radio *AG*; tómense tambien al uno y otro lado del punto *A* los arcos *AL*, *Al* cada uno igual al lado dado *AC*, y tírese por los estremos de dichos arcos la cuerda *Ll*. Hágase tambien en el centro *G* el ángulo *DGR* igual al ángulo dado *BAC*; finalmente bágese desde el punto *D* la *Dd* perpendicular al diámetro *Rr*; si tomamos *CH* quarta proporcional á las lineas *rG*, *dG*, *lH*, será el punto *C* (715) la proyeccion del ángulo *C*. Todo esto sentado, para hallar el uno de los ángulos, el ángulo *B* por egemplo; desde el punto hallado *C* ti-

tiraremos al radio *GB* la perpendicular *fCXF*; tirando despues el diámetro *MGm* perpendicular al radio *GB*, haremos *Xf* : *XC* :: *GM* : *Gn*; por el punto *n* determinado de este modo tiraremos la *Nn* perpendicular á *GM*, que remata en el punto *N* de la circunferencia, será el arco *MN* la medida del ángulo *B*. El ángulo *C* se hallaría por una operacion parecida á la que acabamos de proponer, tomando *AC* en el plano del círculo *ABRA* en lugar del arco *AB*. Fig.

2.° Para hallar el tercer lado *BC*, basta reparar que es evidentemente igual al uno de los arcos *BF* ó *Bf*; por ser los arcos *Bf*, *BC*, *BF* todos de un mismo número de grados, pues están entre el mismo punto *B*, y un círculo menor perpendicular al radio *GB*.

La demostracion de esta construccion es una consecuencia evidente de la naturaleza de la proyeccion en que se funda, y que hemos explicado en otro lugar (715).

727 El que no quisiere empezar otra vez la operacion para hallar el ángulo *C*, podrá sacar facilmente su valor practicando lo siguiente. Por los estremos *L*, *F* de los arcos *AL*, *BF* respectivamente iguales á los lados *AC* y *BC*, tirará las tangentes de dichos arcos hasta que rematen en los radios *AG* y *BG* prolongados quanto fuere menester. Desde dichos puntos como centro, y con radios iguales á las mismas tangentes, trazará dos arcos de círculo que se cortarán en un punto, desde el qual tirará á dichos centros radios que formarán uno con otro un ángulo igual al ángulo *C*. Fúndase esta construccion en que el án-

gu-

Fig. gulo de dos planos es el mismo que forman dos lineas perpendiculares á la interseccion comun, como lo son en este caso las tangentes de los dos arcos AC, BC.

728 Despues de tomados como antes los arcos AL, Al cada uno igual al lado AC, se podrá hallar tambien la proyeccion del ángulo C, sin acudir á las proporcionales, practicando lo que sigue. Para cuyo fin desde el punto H como centro y con el radio HL, se trazará un semicírculo Lcl; en el mismo punto H se hará con el radio HL un ángulo LHc igual al ángulo dado BAC; y desde el punto c donde el radio Hc corta la circunferencia, se bajará la perpendicular cC al diámetro lL, y será el punto C la proyeccion del ángulo C del triángulo BAC. Si el ángulo en A fuere obtuso, el punto C estará en la Hl; si fuese agudo, estará dicho punto en la HL. Con igual facilidad se puede hallar el ángulo B tomando $Cx = CX$ en la linea lH prolongada si fuere menester; y tirando desde el punto c al punto x la linea cx que formará el ángulo cxL ó cxl igual al ángulo ABC.

Es facil de percibir la razon de esta construccion, para cuyo fin se ha de tener presente, que en la fig. 278 el ángulo CHL es igual al ángulo BAC, por ser las lineas CH y HL ambas perpendiculares á la interseccion comun AG de los planos GAB, GAC; por consiguiente el ángulo cHL es el mismo que el ángulo CHL. Tambien se echa de ver que en el triángulo CXc rectángulo en c, las lineas cX y CX por ser ambas perpendiculares á la inter-

sec-

seccion *GB* de los planos *BGC*, *BGA*, el ángulo que forman una con otra es el mismo que el ángulo *BAC*. Pero en virtud de nuestra construccion el triángulo rectángulo *cCx* de la fig. 279 es igual de todo punto al triángulo *CcX* de la fig. 278; luego el ángulo *x* es tambien igual en cada triángulo. Fig.

729 Cuestion II. *Dados en un triángulo esférico qualquiera* ABC *dos ángulos* A *y* B, *y el lado adyacente* AB; *hallar* 1.° *los otros dos lados*; 2.° *el tercer ángulo.*

Tomaremos en el círculo *ARDr* el arco *AB* igual al lado dado, y tiraremos al centro *G* los radios *AG* y *BG*; tiraremos las lineas *Gr*, *GM* respectivamente perpendiculares á los mismos radios; tomaremos despues los arcos *MN*, *RD* respectivamente iguales á los ángulos *B* y *A*; despues de tirados los senos *Nn*, *Dd*, trazaremos con los semieges *GB*, *Gn*; *GA*, *Gd* las semielipses *Bnb*, *Ada*, que se cortarán en un punto *C*, donde estará la proyeccion del ángulo *C* del triángulo esférico *BAC*. Por dicho punto *C* tiraremos las cuerdas *lCL*, *fCF* perpendiculares á los radios *GA*, *GB*, y resultarán los arcos *AL*, *Al* iguales al lado *AC*, y los arcos *BF*, *Bf* iguales al lado *BC*. 279.

2.° Una vez determinados los lados *AC*, *BC*, determinaremos el ángulo *C* por lo dicho (726).

730 Cuestion III. *Dados en un triángulo esférico* BAC *dos lados qualesquiera* AB, AC, *y el uno de los ángulos opuestos á dichos lados*; *hallar* 1.° *el tercer lado*; 2.° *los otros dos ángulos.* 279.

Su-

Fig. Supongamos que los lados conocidos son *AB*, *AC* con el ángulo *B*, y que se sabe tambien de qué especie es el ángulo *A* que forman los dos lados conocidos. Tomaremos primero en el plano del círculo *ARBr* un arco *AB* igual al lado *AB*, y tiraremos los radios *GA*, *GB*. Por el punto *G* tiraremos la *MGm* perpendicular al radio *GB*, y tomaremos en ella la *Gn* igual al coseno del ángulo *B*, ácia *M* si el ángulo *ABC* fuere obtuso, ó *Gv* igual al mismo coseno ácia *m* si el ángulo *ABC* fuere agudo; y con los eges *Bb*, *nv* trazaremos la elipse *Bnbv*. Tomaremos despues en la circunferencia del círculo *ABar* al uno y otro lado del punto *A* los arcos *AL*, *Al* cada uno igual al lado dado *AC*, y tiraremos la cuerda *Ll* que cortará la elipse *Bnbv* en dos puntos *C*, *C'* que servirán para determinar el tercer lado *BC*, tirando por dichos dos puntos las lineas *fCX*, *φC'x'* perpendiculares al radio *BG*, que darán los arcos *Bf*, *Bφ* iguales al tercer lado, segun fuere el ángulo *A* opuesto obtuso ú agudo.

2.° Para determinar el ángulo *A*, trazaremos el semicírculo *lKL* sobre la cuerda *lL* como diámetro, y tiraremos las ordenadas *Cc*, *C'c'*, despues tiraremos desde el punto *H* las lineas *Hc*, *Hc'* que darán los ángulos *LHc*, *LHc'* iguales al ángulo *A*, segun hubiere de ser obtuso ú agudo. El ángulo *C* se determinará por la construccion indicada (727).

731 Cuestion IV. *Dados dos ángulos qualesquiera*
279. A *y* B *de un triángulo* ABC, *y el lado* AC *opuesto al uno de*

de dichos ángulos ; hallar 1.º *el lado opuesto al otro ángulo*; Fig.
2.º *el tercer lado* ; 3.º *el tercer ángulo.*

Desde un punto qualquiera *A* del círculo *ABRa* tírese el diámetro *AGa*, y perpendicularmente á este el diámetro *rGR*. Tómense al uno y otro lado del punto *A* los arcos *AL*, *Al* cada uno igual al lado dado *AC*, y tírese la cuerda *Ll*. Sobre esta cuerda como diámetro trácese el semicírculo *lKL*, y desde el punto *H* tírense los radios *Hc*, *Hc'*, que formen con *LH* un ángulo igual al uno de los ángulos dados *A*, segun fuere este ángulo obtuso ú agudo. Desde los puntos *c*, *c'* bágense las perpendiculares *cC*, *c'C'* que determinarán los puntos *C*, *c'* que son las proyecciones del ángulo *C* ó *C'*. Se tirarán despues desde los puntos *c*, *c'* las lineas *cx*, *c'x'* que formen con las ordenadas *Cc*, *C'c'* los ángulos *Ccx*, *C'c'x'* iguales al complemento del ángulo dado *B*. Por lo que hemos dicho (728), la linea *Cx* es igual á *CX*, cuya posicion determina el lado *AB* y el lado *BC*. Para hallarla, tírese la linea *GCP*, y sobre *CG* trácese un círculo *GHCb* : finalmente desde el punto *C* como centro trácese con un radio $=$ *Cx* una porcion de círculo que cortará al último en dos puntos *d*, *X* que determinarán el lado *AB* tirando el radio *GXB*, y la cuerda *fCXF* tirada por el punto *X*, y el punto *C* dará los arcos *Bf*, *BF* cada uno igual al tercer lado ; el tercer ángulo se hallaria siempre por la construccion indicada (727).

732 Si el ángulo *A* fuere agudo, y lo fuese tambien el ángulo *B*, el punto *X* hallado en el quadrante de cír-

Fig. círculo *AGr* dará el lado *AB*, que tambien servirá para hallar el lado *BC*. Es escusado prevenir que si imaginamos un círculo trazado con el radio $C'G$, en el qual se inscriba la linea $C'x'$, resultarán igualmente dos resoluciones de la misma cuestion, segun fuere agudo el ángulo *A* del triángulo *ABC*, y el ángulo *B* obtuso, ó segun fueren agudos los ángulos en *A* y *B*, y obtuso el ángulo *C*.

733 Cuestion V. *Dados los tres lados de un triángulo esférico qualquiera* BAC, *hallar un ángulo qualquiera de dicho triángulo.*

Tómese en el plano del círculo *ARa* el arco *AB* igual
279. á uno de los lados dados, y tírense desde los estremos *A* y *B* de dicho arco los radios *AG*, *BG*; tómense despues al uno y otro lado del punto *A* los arcos *AL*, *Al* iguales al lado *AC*, y los arcos *Bf*, *BF* iguales al tercer lado *BC*; tiránse despues las cuerdas *Ll*, *Ff* que se cortarán en un punto *C*, que será la proyeccion del ángulo *C*. Finalmente desde el centro *G* se tirarán á los radios *GA*, *GB* las perpendiculares *rGR*, *mGM*, y se buscará una quarta proporcional *Gn* á las lineas *fX*, *CX*, *MG*; y por el punto *n* que determinará en la *MG*, se tirará la perpendicular *nN* hasta que remate en la circunferencia en *N*, y será el arco *MN* la medida del ángulo *B*; se buscará tambien una recta *Gd* quarta proporcional á las lineas *lH*, *CH*, *rG*, que determinará en la *rG* un punto *d*, en el qual se levantará la perpendicular *dD* que dará el arco *RD* igual al ángulo *A*; el ángulo *C* se hallaria por el mismo camino, tomando el lado

do AC en la circunferencia en lugar del lado AB. Fig.

734 Cuestion VI. *Dados los tres ángulos de un triángulo, hallar cada uno de los tres lados.*

Se trazará un triángulo DEF cuyos tres lados sean 265. suplementos de los ángulos del triángulo dado; despues se acudirá á una de las construcciones de la cuestion antecedente para hallar los ángulos de este último triángulo, que serán los suplementos de los lados que se piden.

735 Cuestion VII. *Dada la elipse que es la proyeccion ortográfica de un círculo máximo, hallar en el plano de proyeccion la apariencia de los polos del mismo círculo; y recíprocamente, dada la proyeccion de los polos de un círculo máximo, hallar la elipse que es la proyeccion de dicho círculo.*

Imaginemos que la recta Aa representa el plano del círculo máximo de la esfera, en el qual se hace la proyeccion ortográfica de todos los puntos de la superficie esférica; 280. y que Pp perpendicular á GL es el ege del círculo que se ha de proyectar, cuyo círculo será por consiguiente representado por GL. Es tambien evidente que el círculo $ABab$ que pasa por los polos P, p del círculo proyectable, ó que se ha de proyectar, será perpendicular al plano de proyeccion. Sentado esto, si tiramos las perpendiculares Pp', Gg, se viene á los ojos que p' será la proyeccion del polo P, y g la del estremo G del círculo proyectable; pero por razon del ángulo recto GCP, el ángulo GCA es complemento del ángulo aCP que señala la ele-

va-

Fig. vacion del polo respecto del plano de proyeccion; luego la distancia Cp' de la proyeccion del polo P de un círculo máximo es igual al coseno de la elevacion del polo sobre el plano de proyeccion; ó lo que es lo mismo, al seno de la elevacion del círculo proyectable sobre el mismo plano de proyeccion; y el semiege menor de la elipse, que es la proyeccion del espresado círculo, es igual al seno de la elevacion del polo sobre el plano de proyeccion.

736 Cuestion VIII. *Hallar las dimensiones de la elipse que es la proyeccion ortográfica de un círculo menor de la esfera.*

Supongamos que la linea MON represente el diámetro del círculo menor cuya proyeccion ortográfica se pide. Como esta linea es perpendicular al ege Pp, el círculo menor que representa será paralelo al círculo GL cuyo ege es Pp. Sentado esto, desde los puntos M, O, N tírense las perpendiculares MM, Oo, Nn á la linea Aa; es evidente
280. que el punto o será el centro de la elipse que ha de ser la proyeccion del círculo menor MN paralelo á GL, y que mn será el ege menor de la misma elipse. Hechas estas consideraciones, los triángulos semejantes CPp', COo dán $CP : CO :: Cp' : CO$; esto es, *el radio es al seno de la distancia que hay desde el círculo menor al círculo máximo que le es paralelo, como el coseno de la altura del polo sobre el plano de proyeccion es á la distancia* Co *que hay desde el centro* o *de la elipse que se ha de trazar al centro* C.

Los triángulos semejantes GCg, MOR dan tambien

GC

$GC : Cg :: MO : OR$ ó $om = on$. Esto es, *el seno total es al seno de la elevacion del polo sobre el plano de proyeccion, como el seno de la distancia que hay desde el círculo menor al polo, es al semiege menor de la elipse que se ha de trazar*, y cuyo ege mayor será patentemente igual á MN. De aquí se infiere Fig.

737 1.° Que para determinar en una elipse qualquiera que es la proyeccion de un círculo máxîmo, un arco de un número qualquiera de grados empezando desde un punto dado de dicha elipse, se ha de tirar desde dicho punto una perpendicular al ege mayor prolongada hasta la circunferencia del círculo trazado sobre dicho ege mayor como diámetro, y tomar despues en la circunferencia del mismo círculo empezando desde el punto donde dicha ordenada corta la circunferencia, un arco igual al número dado de grados; despues se bajará desde su extremo otra ordenada al ege mayor de la elipse, que determinará en la circunferencia de esta curva un arco del número dado de grados. 281

738 2.° Si el arco dado fuese de 90°; se bajará desde el punto dado una perpendicular al ege de la elipse; se tomará en el mismo ege al otro lado del centro una linea igual al seno del arco entre el extremo del ege el mas inmediato al punto dado, y la perpendicular ú ordenada que pasare por el punto dado. Por egemplo, para determinar un arco de 90° en la elipse $ACda$ empezando desde el punto C, se tomará la linea $G\lambda$ igual al seno lH del arco $Al = AC$, que remata en la ordenada que pasa por el punto dado; 281

Fig. y por el punto λ determinado de este modo, se tirará despues la perpendicular $\lambda l'$ que determinará en dicha elipse el arco Cl' de 90^{o}. Si tomáramos en el semiege mayor Gb de la elipse BCb la linea $G\varphi$ igual al seno fX del arco $BF = BC$, y tiráramos la perpendicular $\varphi f'$, determinaríamos en dicha elipse el arco Cf' de 90^{o}.

281 739 3.º De lo que acabamos de decir se sigue que se nos hará muy facil hallar en el plano del círculo $ABRar$ la medida del ángulo C ó BCA; porque como un ángulo esférico qualquiera tiene por medida el arco de círculo máxîmo que abrazan sus lados, y trazado desde su vértice como polo, se viene á los ojos que toda la operacion se reduce á trazar la elipse Qgq, que es la proyeccion del círculo máxîmo cuyo polo está en C, cuya operacion se egecutará del modo siguiente. Tiraráse por el punto C y el centro G el diámetro $PCGp$, y por los puntos G, C le tirarémos las perpendiculares QGq, $G'Cg'$; tomaráse despues en la Gp una parte GS igual á $G'C$ que es el seno de la elevacion del punto C sobre el plano de proyeccion; esta linea será el semiege menor de la elipse que es la proyeccion del círculo máxîmo cuyo polo está en C. Luego los puntos l', f' donde esta elipse corta las elipses Ada, Bnb determinarán el arco $f'\ l'$ cuyo correspondiente $\beta\gamma$ en el círculo $ABRr$ comprehendido entre las ordenadas $\gamma\Lambda$, $\beta\Phi$ será la medida del ángulo en C.

281 740 4.º Tambien se echa de ver que para hallar la medida del ángulo en C, no es menester trazar la elipse que

es

es la proyeccion del círculo máxîmo cuyo polo es dicho ángulo. Porque despues de determinados como antes los puntos l', f' en las elipses *ACa*, *Bnb*; si desde estos puntos bajamos al diámetro *QGq* perpendicular á *GCP*, las ordenadas $l'\lambda$, $f'\varphi$, sus prolongaciones hasta la circunferencia del círculo *ARar* determinarán el arco $\beta\gamma$ igual á la medida del ángulo *C*. Fig.

741 Cuestion IX. *Hallar en la superficie del círculo* ABRr 1.º *la proyeccion del arco* Aδ *bajado desde el ángulo* A *perpendicularmente al lado* BC. 2.º *la cantidad de los segmentos* Bδ, Cδ *del lado* BC. 3.º *los segmentos del ángulo* BAC. 4.º *el valor de la perpendicular* Aδ. 281

Una vez que el arco cuya proyeccion buscamos, es un arco de círculo máxîmo de la esfera que pasa por el punto *A*, es evidente que la linea *AGa* será el ege mayor de la elipse que ha de ser su proyeccion. A mas de esto, ya que, segun suponemos, dicho círculo es perpendicular al lado *BC*, ha de pasar por el polo del mismo arco *BC*, y por consiguiente la elipse que buscamos ha de pasar tambien por la proyeccion de dicho polo. Pero si tomamos en el radio *Gm* una parte $GZ = Nn$, el punto *Z* será el polo del arco *BC* (735); luego será dicho punto uno de los de la elipse que se ha de trazar. Tirarémos, pues, por el punto *Z* una linea $Z\zeta$ perpendicular al diámetro *Aa*, y la prolongarémos hasta que encuentre el círculo *ARar* en un punto θ. Tomarémos en la *GR* una linea $G\rho$ quarta proporcional á las lineas $\theta\zeta$, ζZ, *RG*; trazarémos sobre

 los

los dos semieges GA y $G\rho$ la elipse $A\delta\rho\alpha$ que será la proyeccion del círculo perpendicular á BC.

2.º Por el punto δ donde dicha elipse corta el lado BC, tirarémos la perpendicular $\nu\delta\omega\mu$ al radio GB, y los arcos $F\mu$, $B\mu$ serán los segmentos del lado BC.

3.º Si por el punto ρ tiramos la $\rho\sigma$ perpendicular al radio GR, los arcos $R\sigma$, $D\sigma$ serán las medidas de los segmentos $BA\delta$, $CA\delta$ del ángulo BAC.

4.º Finalmente, si por el punto δ tiramos la ordenada $\epsilon\delta\eta$ perpendicular al radio GA, el arco $A\eta$ será el valor de la perpendicular $A\delta$.

742 Si se nos pidiera que determinásemos la proyeccion del círculo que divide el ángulo BAC en dos ángulos iguales, lo conseguiríamos por medio de una construccion del todo parecida á la antecedente; tomando en el radio GR una linea Gk igual al coseno de la mitad del ángulo BAC; y trazando una elipse sobre los dos semieges GA, Gk: tambien se echa de ver que la construccion (738) daria del mismo modo la resolucion de la cuestion, con suponer que desde el ángulo C se ha bajado una perpendicular al lado AB prolongado quanto fuere menester. Finalmente, en la construccion de la última cuestion se echa de ver que el arco $R\theta$ es igual al arco $A\delta$ perpendicular al lado BC, porque los arcos AR, $\eta\theta$ cada uno de 90º tienen comun una parte ηR.

743 Cuestion X. *Dados los tres lados de un triángulo* ABC, *hallar uno qualquiera de sus ángulos, resolviendo sus partes.*

So-

Sobre un círculo qualquiera *ABC* tomarémos los tres Fig.
arcos *AB*, *AC* y *BC'* respectivamente iguales á cada uno 282.
de los lados del triángulo que se ha de resolver. Despues de tirado el radio *GA*, quando quisiéremos sacar el ángulo *A*, tirarémos la tangente *dAD* terminada en *d* y *D* por la prolongacion de los radios *GC* y *GB*. En el radio *GC'* prolongado quanto fuere menester, tomarémos una linea *Gd'* igual á la secante *Gd* del lado *AC*; finalmente desde los puntos *D*, *A* como centros, y con los radios *Dd'*, *Ad* trazarémos dos arcos de círculo que se cortarán en un punto δ, y darán el ángulo δAD igual al ángulo *A* del triángulo *BAC*. Por medio de una construccion parecida á esta hallaríamos los otros dos ángulos del mismo triángulo. Esta construccion trae consigo su demostracion; porque las dos lineas *AD*, *Ad*, ó $A\delta$ son las tangentes de los arcos *AB*, *AC*, y son por construccion perpendiculares á la interseccion comun *AG* de los planos *BAG*, *CAG*, y el ángulo que forman quando rematan en la linea $D\delta = Dd'$, es evidentemente igual al ángulo *A* del triángulo *BAC*.

744 Es patente que podria servir esta construccion para resolver un triángulo cuyos tres ángulos fuesen dados, aplicando la resolucion á un triángulo, cuyas partes fuesen todas suplemento de las del triángulo que se hubiere de resolver (684).

745 Es tambien patente que podria servir igualmente la misma construccion para resolver un triángulo, dados dos de sus lados, y el ángulo que forman. Porque si

Fig. hiciéramos los dos arcos AB, AC respectivamente iguales
282. á los lados del ángulo dado, y tiráramos las tangentes AD, Ad que rematasen en los radios GB, y GC prolongados quanto fuere menester; solo faltaría hacer el ángulo $DA\delta$ igual al ángulo dado, y tirar $D\delta$, despues de tomada $A\delta$ igual á la tangente Ad. Finalmente, desde los puntos G, D como centros, y con los radios $Gd' = Gd$, $Dd' = D\delta$ se trazarian dos arcos de círculo cuya interseccion determinaría un punto d', desde el qual tiraríamos al centro G el radio $d'G$, y resultaría el arco BC' igual al tercer lado, por cuyo medio se sacarian los demás ángulos.

Demuéstranse algunas propiedades mas de los triángulos esféricos.

283. 746 En un triángulo esférico ABC, siempre se verificarán las equaciones siguientes.

$$\text{Sen } A = \frac{\text{sen } BC \,.\, \text{sen } C}{\text{sen } AB} = \frac{\text{sen } BC \,.\, \text{sen } B}{\text{sen } AC}.$$

747 $$\text{Sen } B = \frac{\text{sen } AC \,.\, \text{sen } A}{\text{sen } BC} = \frac{\text{sen } AC \,.\, \text{sen } C}{\text{sen } AB}.$$

748 $$\text{Sen } C = \frac{\text{sen } AB \,.\, \text{sen } B}{\text{sen } AC} = \frac{\text{sen } AB \,.\, \text{sen } A}{\text{sen } BC}.$$

749 $$\text{Sen } AB = \frac{\text{sen } BC \,.\, \text{sen } C}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } AC \,.\, \text{sen } C}{\text{sen } B}.$$

750 $$\text{Sen } AC = \frac{\text{sen } AB \,.\, \text{sen } B}{\text{sen } C} = \frac{\text{sen } BC \,.\, \text{sen } B}{\text{sen } A}.$$

751 $$\text{Sen } BC = \frac{\text{sen } AC \,.\, \text{sen } A}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } AB \,.\, \text{sen } A}{\text{sen } C}.$$

752 $$\text{Cos } A = \frac{\cos BC - \cos AC \,.\, \cos AB}{\text{sen } AC \,.\, \text{sen } AB} = \cos BC \,.\, \text{sen } B \,.\, \text{sen } C - \cos B \,.\, \cos C.$$

753 $$\text{Cos } B = \frac{\cos AC - \cos AB \,.\, \cos BC}{\text{sen } AB \,.\, \text{sen } BC} = \cos AC \,.\, \text{sen } C \,.\, \text{sen } A - \cos C \,.\, \cos A.$$

Cos

754 $\text{Cos } C = \frac{\cos AB - \cos AC \cdot \cos BC}{\text{sen } AC \cdot \text{sen } BC} = \cos AB \cdot$ $\text{sen } A \cdot \text{sen } B - \cos A \cdot \cos B.$

755 $\text{Cos } AB = \text{sen } AC \cdot \text{sen } BC \cdot \cos C + \cos AC \cdot$ $\cos BC = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\text{sen } A \cdot \text{sen } B}.$

756 $\text{Cos } AC = \cos B \cdot \text{sen } AB \cdot \text{sen } BC + \cos AB \cdot$ $\cos BC = \frac{\cos B + \cos C \cdot \cos A}{\text{sen } C \cdot \text{sen } A}.$

757 $\text{Cos } BC = \cos A \cdot \text{sen } AC \cdot \text{sen } AB + \cos AB \cdot$ $\cos AC = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\text{sen } B \cdot \text{sen } C}.$

758 $\text{Tang } A = \frac{\text{sen } B}{\cot BC \cdot \text{sen } AB - \cos B \cdot \cos AB} =$ $\frac{\text{sen } C}{\cot BC \cdot \text{sen } AC - \cos AC \cdot \cos C}.$

759 $\text{Tang } B = \frac{\text{sen } C}{\cot AC \cdot \text{sen } BC - \cos C \cdot \cos BC} =$ $\frac{\text{sen } A}{\cot AC \cdot \text{sen } AB - \cos AB \cdot \cos A}.$

760 $\text{Tang } C = \frac{\text{sen } B}{\cot AB \cdot \text{sen } BC - \cos B \cdot \cos BC} =$ $\frac{\text{sen } A}{\cot AB \cdot \text{sen } AC - \cos AC \cdot \cos A}.$

761 $\text{Tang } AB = \frac{\text{sen } BC}{\cot C \cdot \text{sen } B + \cos B \cdot \cos C} =$ $\frac{\text{sen } AC}{\cot C \cdot \text{sen } A + \cos AC \cdot \cos A}.$

762 $\text{Tang } AC = \frac{\text{sen } BC}{\cot B \cdot \text{sen } C + \cos C \cdot \cos BC} =$ $\frac{\text{sen } AB}{\cot B \cdot \text{sen } A + \cos AB \cdot \cos A}.$

763 $\text{Tang } BC = \frac{\text{sen } AC}{\cos AC \cdot \cos C - \text{sen } C \cdot \cot A} =$ $\frac{\text{sen } AB}{\cos B \cdot \cos AB - \text{sen } B \cdot \cot A}.$

764 $\text{Cot } A = \frac{\cot BC \cdot \text{sen } AB}{\text{sen } B} - \cos AB \cdot \cot B =$ $\frac{\cot BC \cdot \text{sen } AC}{\text{sen } C} - \cos AC \cdot \cot C.$

765 $\text{Cot } B = \frac{\cot AC \cdot \text{sen } BC}{\text{sen } C} - \cos BC \cdot \cot C =$ $\frac{\cot AC \cdot \text{sen } AB}{\text{sen } A} - \cos AC \cdot \cot A.$

766 $\text{Cot } C = \frac{\cot AB \cdot \text{sen } AC}{\text{sen } A} - \cos AC \cdot \cot A =$ $\frac{\cot AB \cdot \text{sen } BC}{\text{sen } B} - \cos BC \cdot \cot B.$

767 $\text{Cot } AB = \frac{\cot C \cdot \text{sen } B}{\text{sen } BC} + \cos B \cdot \cot BC$

 $=$

Fig. $= \frac{\text{sen } A \,.\, \cot C}{\text{sen } AC} + \cot AC \,.\, \cos A.$

768 Cot $AC = \frac{\cot B \,.\, \text{sen } C}{\text{sen } BC} + \cos C \,.\, \cot BC = \frac{\cot B \,.\, \text{sen } A}{\text{sen } AB} + \cot AB \,.\, \cos A.$

769 Por la misma razon $\cot BC = \frac{\cot A \,.\, \text{sen } C}{\text{sen } AC} + \cos C \,.\, \cot A = \frac{\cot A \,.\, \text{sen } B}{\text{sen } AB} + \cot AB \,.\, \cos B.$

770 *Un arco tirado dentro de un ángulo esférico muy*
284. *pequeño, perpendicularmente á los lados, es igual al mismo angulillo multiplicado por el seno de la distancia del arco al vértice del ángulo.*

Supongamos dos círculos máxîmos ADB, AEC que formen uno con otro en A un ángulo muy pequeño, que AC sea de $90°$, de modo que BC sea la medida del angulillo A; á una distancia qualquiera del vértice A tírese otro arco de círculo máxîmo DE perpendicular á ADB, tan pequeño que se le pueda considerar como una linea recta, siendo al mismo tiempo AD sensiblemente igual con AE. Del triángulo ADE, rectángulo en E y D, sacarémos (698): El radio es al seno de la hipotenusa AE, como el seno del ángulo A es al seno del arco pequeño DE, ó como el ángulo A es al arco DE (por ser los arcos pequeños iguales con sus senos), ó como el arco BC es al arco DE. Por consiguiente si tomamos por radio la unidad, tendremos $1 : \text{sen } AE :: BC : DE$; luego $DE = BC \,.\, \text{sen } AE$.

771 La demostracion de las seis primeras fórmulas (746 .... 751) se funda en lo demostrado (713); pasarémos, pues, á demostrar las fórmulas 752 ..... 757.

Con

Con esta mira baxarémos una perpendicular CX al uno de los lados adyacentes al ángulo A, de donde resulta esta proporcion (714. 4.°) $\cos BX : \cos AX :: \cos BC : \cos AC$; luego $\cos BC = \frac{\cos AC \,.\, \cos BX}{\cos AX}$. Pero $\cos BX = \cos(AB - AX) = \cos AB \,.\, \cos AX + \text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, AX$ (I. 656); luego $\cos BC = \frac{\cos AC \,.\, \cos AB \,.\, \cos AX + \text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, AX \,.\, \cos AC}{\cos AX} = \cos AC \,.\, \cos AB + \text{sen}\, AB \,.\, \frac{\text{sen}\, AX}{\cos AX} \,.\, \cos AC$. Pero $\frac{\text{sen}\, AX}{\cos AX} = \text{tang}\, AX$ (II. 367) $= \text{tang}\, AC \,.\, \cos A$ (699) $= \frac{\text{sen}\, AC}{\cos AC} \,.\, \cos A$; luego $\cos BC = \cos AC \,.\, \cos AB + \text{sen}\, AB \,.\, \frac{\text{sen}\, AC \,.\, \cos A \,.\, \cos AC}{\cos AC} = \cos AC \,.\, \cos AB + \text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, AC \,.\, \cos A$, que es la primera parte de la fórmula 757. Del mismo modo se demostrarian las fórmulas 755 y 756. Fig. 285.

De esta equacion se saca $\cos A = \frac{\cos BC - \cos AC \,.\, \cos AB}{\text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, AC}$, primera parte de la fórmula 752: por el mismo camino hallaríamos la primera parte de las fórmulas 753 y 754.

772 Si eliminamos el denominador de la fórmula (771) $\cos A = \frac{\cos BC - \cos AC \,.\, \cos AB}{\text{sen}\, AC \,.\, \text{sen}\, AB}$, añadimos despues á cada miembro $\text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, AC$, y trasladamos del uno al otro miembro las cantidades correspondientes, la expresada fórmula se convertirá en estotra; $\text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, AC - \text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, AC \,.\, \cos A = \text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, AC + \cos AB \,.\, \cos AC - \cos BC$. Si reflexîonamos que el primer miembro es $\text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, AC \times (1 - \cos A)$, que en el segundo $\text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, AC + \cos AB \,.\, \cos AC =$ (I. 656) $\cos(AB - AC)$, sacarémos con hacer la substitucion correspondiente esta proporcion: sen AB.

sen

Fig. sen AC : 1 :: cos$(AB - AC)$ — cos BC : 1 — cos A, ó sen AB . sen AC : 1 :: sen verso BC — sen verso$(AB - AC)$: sen verso A. El quarto término es qual digo, porque cos$(AB - AC)$ — cos BC es lo mismo que 1 — cos BC menos 1 — cos $(AB - AC)$, y 1 — cos BC = sen verso BC, y 1 — cos$(AB - AC)$ = sen verso $(AB - AC)$.

773 Para demostrar la segunda parte de la fórmula 752, en que cos A = cos BC . sen B . sen C — cos B.
285 cos C; llamarémos h la tangente de BCX, y siendo el radio = 1, el triángulo rectángulo que forman la secante, y la tangente de un arco qualquiera con el radio, dará para el valor de la secante del ángulo BCX la expresion $\sqrt{(1+hh)}$; y de la semejanza del triángulo que formen el radio, la secante, y la tangente de un ángulo, con el que forman el radio, el seno y el coseno del mismo ángulo, sacarémos que el seno del ángulo BCX será $\frac{h}{\sqrt{(1+hh)}}$, y su coseno $\frac{1}{\sqrt{(1+hh)}}$; llamarémos a el seno del ángulo C, y b su coseno. Por lo dicho (I. 655) sacarémos sen XCA = sen ACB . cos XCB — sen XCB. cos $ACB = \frac{a-bh}{\sqrt{(1+hh)}}$ con substituir en lugar de las lineas trigonométricas sus valores literales; pero (714. 1.°) sen BCX : sen XCA :: cos B : cos A, ó $\frac{h}{\sqrt{(1+hh)}} : \frac{a-bh}{\sqrt{(1+hh)}}$ :: cos B : cos A; luego cos $A = \frac{a-bh}{h}$. cos $B = \frac{\text{sen } ACB \text{ . cos } B}{\text{tang } BCX}$ — cos B . cos C. Pero $\frac{\text{cos } B}{\text{tang } BCX}$ = cos BC . sen C; porque en el triángulo CBX tenemos cos BC : 1 :: cot B : tang BCX (703); luego tang $BCX = \frac{\text{cot } B}{\text{cos } BC} = \frac{\text{cos } B}{\text{cos } BC \text{ . sen } B}$, substituyendo en lugar de cot B su valor $\frac{\text{cos } B}{\text{sen } B}$ (II. 367);

lue-

luego $\frac{\cos B}{\text{tang}\, BCX} = \cos BC \,.\, \text{sen}\, B$, substituyendo este valor en la expresion de $\cos A$, se transformará en $\text{sen}\, ACB \,.\, \cos BC \,.\, \text{sen}\, B - \cos B \,.\, \cos C$.

774 Por este mismo rumbo se demostraría la segunda parte de las fórmulas 753 y 754.

775 Para demostrar la segunda parte de la fórmula 755, basta despejar $\cos AB$ en la segunda parte del núm. 754; porque como $\cos C = \cos AB \,.\, \text{sen}\, A \,.\, \text{sen}\, B - \cos A \,.\, \cos B$, será $\cos AB = \frac{\cos C + \cos A \,.\, \cos B}{\text{sen}\, A \,.\, \text{sen}\, B}$. Del mismo modo se probaría la segunda parte de las fórmulas 756 y 757.

776 Las fórmulas 758, 759 y 760 se demuestran todas de un mismo modo, por lo que bastará demostrar la primera.

Por lo probado (714. 3.° y II. 368) $\text{tang}\, A = \frac{\text{tang}\, B \,.\, \text{sen}\, BX}{\text{sen}\, AX}$; pero $\text{sen}\, AX = \text{sen}(AB - BX) = \text{sen}\, AB \,.\, \cos BX - \text{sen}\, BX \,.\, \cos AB$, luego $\frac{\text{sen}\, AX}{\text{sen}\, BX} = \frac{\text{sen}\, AB \,.\, \cos BX}{\text{sen}\, BX} - \cos AB = \text{sen}\, AB \,.\, \cot BX - \cos AB = \frac{\text{sen}\, AB}{\text{tang}\, BX} - \cos AB$. Pero $\frac{1}{\text{tang}\, BX} = \frac{1}{\cos B \,.\, \text{tang}\, BC}$, porque de lo probado (699) sale $1 : \cos B :: \text{tang}\, BC : \text{tang}\, BX$, y $\text{tang}\, BX = \text{tang}\, BC \,.\, \cos B$; luego $\frac{\text{sen}\, AX}{\text{sen}\, BX} = \frac{\text{sen}\, AB}{\cos B \,.\, \text{tang}\, BC} - \cos AB = \frac{\text{sen}\, AB - \cos AB \,.\, \cos B \,.\, \text{tang}\, BC}{\cos B \,.\, \text{tang}\, BC}$. Por consiguiente $\frac{\text{sen}\, BX}{\text{sen}\, AX}\, \text{tang}\, B$, esto es $\text{tang}\, A = \frac{\cos B \,.\, \text{tang}\, B \,.\, \text{tang}\, BC}{\text{sen}\, AB - \cos AB \,.\, \cos B \,.\, \text{tang}\, BC}$. Si en lugar de $\text{tang}\, B \,.\, \cos B$ substituimos su valor $\text{sen}\, B$, y lo dividimos todo por $\text{tang}\, BC$, sacarémos finalmente $\text{tang}\, A = \frac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\, AB \,.\, \cot BC - \cos B \,.\, \cos AB}$.

777 Las fórmulas 761, &c. se demuestran por los nú-

Fig. núm. 758, &c. acudiendo al triángulo suplementario. Porque si nos figuramos al rededor del triángulo ABC un triángulo polar abc, cuyo ángulo b esté del mismo lado que el ángulo B del triángulo ABC; entonces en lugar de
283 $\text{tang}\, A = \frac{\text{sen}\, B}{\cot BC \,.\, \text{sen}\, AB - \cos B \,.\, \cos AB}$ (758) tendrémos $\text{tang}\, bc = \frac{\text{sen}\, ac}{\cot a \,.\, \text{sen}\, c - \cos ac \,.\, \cos c}$ que es la fórmula 763. Solo se han de mudar los signos del denominador, porque en el triángulo suplementario los lados son los suplementos de los ángulos del triángulo dado, por cuyo motivo los cosenos mudan de signo (II. 361).

778 La fórmula 764 $\cot A$ &c. es la inversa de 758, poniendo $\cot B$ en lugar de $\frac{\cos B}{\text{sen}\, B}$; porque $\cot A = \frac{1}{\text{tang}\, A} = \frac{\cot BC \,.\, \text{sen}\, AB}{\text{sen}\, B} - \frac{\cos B \,.\, \cos AB}{\text{sen}\, B} = \frac{\cot BC \,.\, \text{sen}\, AB}{\text{sen}\, B} - \cos AB \,.\, \cot B$. Del mismo modo demostraríamos las fórmulas 765 y 766.

779 La fórmula 767 es la inversa de 761, substituyendo $\cot BC$ en lugar de $\frac{\cos BC}{\text{sen}\, BC}$. Tambien se le podrá dar á la fórmula 767 la forma siguiente: $\cot AB = \frac{\text{sen}\, A \,.\, \cos C \,.\, \cos A \,.\, \text{sen}\, C \,.\, \cos AC}{\text{sen}\, C \,.\, \text{sen}\, AC}$, substituyendo en lugar de $\cot C$ su valor $\frac{\cos C}{\text{sen}\, C}$, y en lugar de $\text{sen}\, AC \,.\, \cot AC$ su valor $\cos AC$.

De las Analogías diferenciales.

Las analogías que resuelven los casos de ambas Trigonometrías suponen constantes las seis partes que en todo triángulo se consideran, y por consiguiente no salen exâctos los resultados que en ellas se fundan, quando alguno de los datos de la cuestion padece algun incremento ó de-

decremento que sea preciso llevar en cuenta. Esto sucede particularmente en muchos cálculos astronómicos, por cuyo motivo solo tratarémos de las analogías diferenciales correspondientes á la Trigonometría esférica. Fig.

780 *Si suponemos constantes un ángulo y su lado adyacente, la diferencial del otro lado adyacente al ángulo constante es á la diferencial del lado opuesto, como el radio es al coseno del ángulo opuesto al lado constante.*

Supongamos constantes en el triángulo BAC el ángulo A, y el lado adyacente CA; la diferencial de AB será á la de CB, como el radio es al coseno de B. Con efecto, quando el lado AB crece una corta cantidad BD, el triángulo ACB se transforma en otro triángulo ACD; si hacemos $CE = CB$, y tiramos el arco BE perpendicular á CED, será DE la diferencial del lado CB, porque DE es el exceso que CD le lleva á CB. Fuera de esto, el ángulo EDB es igual con el ángulo CBA, porque suponemos infinitamente pequeño, y por consiguiente rectilineo el triángulo EDB; el arco EB es perpendicular á CB y á CE, y por lo mismo el ángulo CBE es recto. Luego $EBD + DBF = 90°$, y como $DBF = CBA$ será EBD el complemento de CBA. Pero en el triangulillo rectilineo EBD, el ángulo EBD es el complemento de EDB; luego el ángulo EDB es igual con el ángulo CBA. Sentado esto, demostrarémos facilísimamente que $BD : DE :: R : \cos EDB$ ó CBA. Sabemos que en un triángulo rectilineo BED rectángulo 285

en

en E, la hipotenusa BD es á un lado DE como el radio es al coseno del ángulo D adyacente á dicho lado. Luego si llamamos dCB la diferencial ED del lado CB, resultará la misma proposicion que hemos sentado.

781 Luego $dAB : dCB :: R : \cos B$, de aquí inferirémos las analogías siguientes por medio de las propiedades que dexamos sentadas de los triángulos esféricos; por exemplo, si en lugar de $\cos B$ substituimos succesivamente sus dos valores (753), sacarémos

782 $dAB : dCB ::$ sen AB . sen $CB : R . \cos CA -$ $\cos AB . \cos CB$. Sácase esta proporcion, substituyendo en lugar de $\cos B$ su valor sacado, siendo el radio $= R$, porque entonces $\cos B = \frac{RR . \cos AC - R . \cos AB . \cos BC}{\text{sen } AB . \text{sen } BC}$.

783 $dAB : dCB :: R : \cos CA$. sen C . sen $A -$ $\cos C . \cos A$.

784 Si el ángulo A fuere de 90^{o}, tendrémos dAB: $dCB ::$ tang BC : tang AB. Porque siendo recto el ángulo A se verifica (699) $R : \cos B ::$ tang BC : tang AB; luego &c.

785 Si el arco BC fuere de 90^{o}, tambien se verificará la proporcion de antes (781), por grandes que sean las diferenciales de BC y AB, esto es, los arcos ED y BD, con tal que apelemos á los senos, y digamos sen dAB : sen $dBC :: R : \cos B$.

Porque en el triángulo BDE rectángulo en E (698) R : sen $BD ::$ sen DBE : sen ED; y como $BD = dAB$, $ED = dCB$, y DBE es complemento de BDE, por cuyo mo-

motivo sen $DBE = \cos BDE = \cos B$, la proporcion Fig.
será $R : \text{sen}\, dAB :: \cos B : \text{sen}\, dBC$, ó $\text{sen}\, dAB : \text{sen}\, dBC :: R : \cos B$.

786 *Quando un ángulo y el lado adyacente son constantes, la diferencial del ángulo adyacente al lado constante es á la diferencial del ángulo opuesto, como el radio es al coseno del lado opuesto al ángulo constante.*

Supongamos constantes en el triángulo esférico ABC 286
el ángulo A, y el lado AC. Desde los puntos A, B, C como polos se trazarán los arcos FE, FD, DE que formarán el triángulo suplementario FED, cuyo ángulo F será el suplemento del lado AB, el lado FD será el suplemento del ángulo B, el lado FE será el suplemento del ángulo A &c. por lo qual podrémos considerar en el triángulo suplementario EFD el ángulo E, y el lado adyacente FE como constantes. Si contrahemos á este caso lo demostrado (780), sacarémos que la diferencial del lado DE es á la del lado FD, como el radio es al coseno del ángulo D; luego si en lugar de los términos de esta proporcion substituimos los que les corresponden en el triángulo ABC, y tienen los mismos senos, y las mismas diferenciales, sacarémos que la diferencial del ángulo C es á la diferencial del ángulo B, como el radio es al coseno del lado BC.

787 Luego $dB : dC :: \cos BC : R$.

788 $dB : dC :: \cos A + \cos B \,.\, \cos C : \text{sen}\, B \,.\, \text{sen}\, C$.

789 $dB : dC :: \cos A \,.\, \text{sen}\, AC \,.\, \text{sen}\, AB + \cos AC$.

cos

Fig. cos $AB : R$, con substituir en lugar de cos BC sus valores (757).

790 Si $A = 90^o$, $dB : dC :: \cot C : \tang B$, porque en un triángulo rectángulo cos $BC = \frac{\cot C}{\tang B}$ (703).

791 Si $B = 90^o$, la variacion del ángulo B será nula.

792 *Quando un ángulo, y el lado adyacente son constantes, la diferencial del ángulo adyacente al lado constante será á la diferencial del lado opuesto al ángulo constante, como la tangente del ángulo opuesto al lado constante es al seno del lado opuesto al ángulo constante.*

285 Sean A y AC constantes; prolónguense el lado CB hasta que sea $CF = 90^o$, y CD hasta que CG sea tambien $= 90^o$. El pequeño arco FG será la medida del ángulo ECB, y será por consiguiente la diferencial del ángulo C, siendo así que DE es la diferencial del lado CB. Nos toca, pues, demostrar que $FG : DE :: \tang B : \sen BC$. Para cuyo fin considerarémos que (770) que $FG : BE :: R : \sen BC$ (I.667); $DE : BE :: R : \tang BDE$ ó CBA; luego $FG . \sen BC = DE . \tang CBA$, de donde se saca $FG : DE :: \tang B : \sen BC$.

793 Esto es, $dBC : dC :: \sen BC : \tang B$.

794 $dBC : dC :: \sen A . \sen AC : \tang B . \sen B$, con substituir en lugar de sen BC su primer valor (751).

795 $dBC : dC :: \sen^2 BC . \cot AC — \sen BC . \cos BC . \cos C : \sen C$, con substituir en lugar de tang B su primer valor (759).

Si

796 Si $BC = 90°$, será $dB : dC :: R : \text{tang}\, B$ por ser $R = \text{sen}\, 90° = \text{sen}\, BC$ en este caso. Fig.

797 *Quando son constantes un ángulo, y uno de los lados adyacentes á dicho ángulo, la diferencial del lado variable adyacente al ángulo constante será á la diferencial del ángulo opuesto al lado constante, como la tangente del lado opuesto al ángulo constante es al seno del ángulo opuesto al lado constante.*

Supongamos en el triángulo ABC constantes el ángulo A y el lado AC. La misma proporcion manifiesta que en el triángulo suplementario FDE el ángulo E y el lado EF son constantes, y las variaciones del ángulo F y del lado DF serán respectivamente las mismas que las del lado AB y del ángulo B del triángulo ABC. Pero por lo probado (792) $dDF : dF :: \text{sen}\, DF : \text{tang}\, D$. Y porque los suplementos uno de otro tienen una misma tangente y un mismo seno, con substituir á estas cantidades sus correspondientes en el triángulo ABC, sacarémos por lo dicho (793) $dAB : dB :: \text{tang}\, BC : \text{sen}\, B$. 286

798 Es, pues, $dAB : dB :: \text{tang}\, BC : \text{sen}\, B$.

799 Y substituyendo en lugar de sen B su primer valor (747), resultará $dAB : dB :: \text{tang}\, BC . \text{sen}\, BC : \text{sen}\, AC . \text{sen}\, A$.

800 *Quando fueren constantes en un triángulo esférico un ángulo y un lado adyacente á este ángulo, la diferencial del ángulo adyacente al lado constante será á la del lado adyacente al ángulo constante, como el seno del ángulo*

Fig. *opuesto al lado constante es al seno del lado opuesto al ángulo constante.*

285 Hemos de demostrar que quando en el triángulo esférico ABC fueren constantes el ángulo A y el lado AC, $FG : BD :: \text{sen } B : \text{sen } BC$. Con efecto, sabemos (770) que $BE = FG \cdot \text{sen } BC$, y que en el triángulo rectilineo BED se verifica, llamando 1 al radio, $BE : BD :: \text{sen } B = 1$, por ser el ángulo CBA igual al ángulo EDB, segun probamos (780); luego $BE = BD \cdot \text{sen } B$. Si igualamos uno con otro los dos valores de BE, sacarémos $FG \cdot \text{sen } BC = BD \cdot \text{sen } B$, y de aquí la proporcion $FG : BD :: \text{sen } B : \text{sen } BC$ que habíamos de demostrar.

801 Es, pues, $dAB : dC :: \text{sen } BC : \text{sen } B$.

802 $dAB : dC :: \text{sen}^2 BC : \text{sen } AC \cdot \text{sen } A$, substituyendo en lugar de sen B su primer valor $\frac{\text{sen } AC \cdot \text{sen } A}{\text{sen } BC}$ (747).

803 $dAB : dC :: \text{sen } AC \cdot \text{sen } A : \text{sen}^2 B$, substituyendo en lugar de sen BC su primer valor $\frac{\text{sen } AC \cdot \text{sen } A}{\text{sen } B}$ (751).

804 $dAB : dC :: \text{sen } BC \cdot \text{sen } AB : \text{sen } AC, \text{sen } C$, si en lugar de sen B substituimos su segundo valor $\frac{\text{sen } C \cdot \text{sen } AC}{\text{sen } AB}$ (747).

805 $dAB : dC :: \text{sen } A \cdot \text{sen}^2 AB : \text{sen } AC \cdot \text{sen}^2 C$, con substituir en lugar de sen BC su valor $\frac{\text{sen } A \cdot \text{sen } AB}{\text{sen } C}$ (747), y en lugar de sen B su valor $\frac{\text{sen } AC \cdot \text{sen } C}{\text{sen } AB}$.

806 Si $B = 90^\circ$, $dAB : dC :: \text{sen } BC : R$; pero (702) en un triángulo esférico ABC rectángulo en B, $R : \text{sen } BC :: \text{tang } C : \text{tang } AB$; luego $dAB : dC :: \text{tang } BA : \text{tang } C$.

807 *Si suponemos constantes un ángulo* A , *y el lado* CA *adyacente al mismo ángulo , la diferencial del ángulo* B *opuesto al lado constante será á la diferencial del lado* BC *opuesto al ángulo constante , como la tangente del ángulo* B *opuesto al lado constante* AC *es á la tangente del lado* BC *opuesto al ángulo constante* A. Fig.

Porque nos consta (713) que sen A : sen BC :: 285
sen B : sen AC ; y como los dos extremos de esta proporcion son constantes , el seno del ángulo B será tanto menor ó mayor , quanto mayor ó menor fuere el seno del lado BC , porque sin esto no podria el producto de los extremos ser igual al producto de los medios ; esto quiere decir que el seno del ángulo B estará en razon inversa del seno del lado BC ; luego sus diferenciales estarán tambien en la misma razon ; quiero decir que la diferencial del seno de B será á la del seno de BC , como sen B es á sen BC. Pero d sen $B = dB$. cos B (352) , y d sen $BC = dBC$. cos BC ; luego dB . cos B : dBC . cos BC :: sen B : sen BC ; y dB . cos B . sen $BC = dBC$. cos BC . sen B ; luego $dB : dBC$ :: cos BC . sen B : cos B . sen BC :: sen B : $\frac{\cos B \,.\, \text{sen}\, BC}{\cos BC}$ (con dividir los dos últimos términos por cos BC :: $\frac{\text{sen}\, B}{\cos B} : \frac{\text{sen}\, BC}{\cos BC}$ (con dividir los dos últimos términos por cos B) ; luego $dB : dBC :: \frac{\text{sen}\, B}{\cos B} : \frac{\text{sen}\, BC}{\cos BC}$ :: tang B : tang BC.

808 Es , pues , $dBC : dB$ :: tang BC : tang B.

809 Si $B = 90^o$, será nula la variacion de BC y B.

810 *En qualquiera triángulo esférico* ABC *que tenga*

Fig. *constantes un lado* BC , *y el ángulo* A *opuesto á dicho lado, la diferencial del uno de los otros ángulos* C *será á la del lado* AB *opuesto al mismo ángulo* C , *como la tangente de este mismo ángulo* C *es á la tangente del mismo lado* AB *opuesto á dicho ángulo.*

287 Supongamos el triángulo ABC transformado en otro triángulo ADE que discrepe del primero infinitamente poco, y tal que DE sea igual con BC, esto es, que el lado opuesto al ángulo constante A sea constante; sacarémos esta proporcion : sen C : sen AB :: sen A : sen BC (713); y como los dos últimos términos de la proporcion son constantes, el seno de C será al seno de AB en razon constante, Y porque lo mismo se verifica respecto de sus diferenciales, será d sen C : d sen AB :: sen C : sen AB. Pero d sen C $= dC \cdot \cos C$, y d sen $AB = dAB \cdot \cos AB$ (352), tendrémos $dC \cdot \cos C : dAB \cdot \cos AB ::$ sen C : sen AB; $dC \cdot \cos C \cdot$ sen $AB = dAB \cdot \cos AB \cdot$ sen C; luego $dC : dAB :: \cos AB \cdot$ sen $C : \cos C \cdot$ sen AB; dividiendo los dos últimos términos por $\cos C \cdot \cos AB$, resulta por último $dC : dAB :: \frac{\text{sen } C}{\cos C} : \frac{\text{sen } AB}{\cos AB} ::$ tang C : tang AB.

811 Es, pues, $dAB : dC ::$ tang AB : tang C.

812 Si $A = 90^\circ$, será $dAB : dC ::$ sen $AC : R$; porque en este caso R : sen AC :: tang C : tang AB (702).

813 Si $B = 90^\circ$, $dAB : dC ::$ sen $BC : R$, porque entonces R : sen BC :: tang C : tang AB (702).

814 Si en lugar del lado AB, y del ángulo C su opuesto, consideráramos el lado AC, y el ángulo opuesto

B,

B, sacaríamos discurriendo del mismo modo $dAC : dB ::$ tang AC : tang B. Fig.

815 Si $A = 90^o$, $dAC : dB ::$ sen $AB : R$.

816 Si $C = 90^o$, $dAC : dB ::$ sen $BC : R$.

817 *Si un lado* BC, *y el ángulo opuesto* A *fuesen constantes, la diferencial del uno de los lados variables* AB *será á la diferencial del otro lado* AC, *como el coseno del ángulo* C *opuesto al primer lado* AB *es al coseno del ángulo* B *opuesto al segundo lado* AC. 287

Una vez que segun supusimos (810) el lado BC es igual con el lado DE, estos dos lados no podrán menos de cortarse en un punto H dentro del triángulo, ó fuera, con tal que se prolonguen. Desde el punto de interseccion H tirarémos por los puntos B y C unos arcos pequeños BF y CG, que cortarán en la DE los arcos $HG = HC$, $HF = HB$. Las diferencias FD, GE son iguales, porque por la construccion $FG = BC$, y como $DE = BC$, por el supuesto, será $FG = DE$, y si de cada arco quitamos la parte comun FE, quedará $DF = GE$. Esto supuesto, el triangulillo rectilineo BDF nos dará $BD : FD :: R :$ sen FBD, ó cos BDF, ó cos ABC; y el triangulillo GCE, $CE : GE$ ó $FD :: R :$ sen GCE, ó cos ACB; de donde se sacan las dos equaciones $FD = BD$. cos ABC, y $FD = CE$. cos ACB; luego BD . cos $ABC = CE$. cos ACB.

818 Quiero decir que $dAB : dAC ::$ cos C : cos B.

819 $dAB : dAC ::$ cos AB . sen AB — cos AC.

 cos

Fig. cos BC . sen AB : cos AC . sen AC — cos AB . cos BC . sen AC, substituyendo en lugar de coseno C y cos B sus primeros valores (753 y 754).

286 820 *Quando un lado* BC, *y el ángulo opuesto* A *sean constantes, la diferencial del ángulo* B *será á la diferencial del ángulo* C; *como el coseno del lado* AC *opuesto al ángulo* B *es al coseno del lado* AB *opuesto al ángulo* C.

Si trazamos el triángulo suplementario DEF (684), los ángulos E y F serán los suplementos de los lados AC y AB del triángulo dado ABC; serán, pues, constantes el ángulo D, y el lado FE, y tendrémos (817) la proporcion siguiente $dFD : dED :: \cos E : \cos F$, substituyendo en lugar de estos quatro términos los que les corresponden en el triángulo ABC, se sacará la proporcion que nos propusimos demostrar.

821 Es, pues, $dB : dC :: \cos AC : \cos AB$.

822 $dB : dC :: \cos B \,.\, \text{tang}\, AB \,.\, \text{sen}\, BC + \cos BC : R$, despues de substituir en lugar de cos AC su primer valor (756), y en lugar de $\frac{\text{sen}\, AB}{\cos AB}$ su valor tang AB.

823 *Quando son constantes un lado* BC *y el ángulo* A

287 *opuesto á dicho lado, la diferencial del uno de los lados variables* AB *es á la diferencial del ángulo* B *adyacente á dicho lado, como el seno de dicho lado* AB *es á la tangente del ángulo* C *opuesto á dicho lado, multiplicada por el coseno del tercer lado* AC.

Porque $dAB : dB :: dAB \,.\, dC : dB \,.\, dC$; pero $dAB : dC ::$ tang AB : tang C (811), y $dC : dB :: \cos AB : \cos AC$ (821); luego multiplicando ordenadamente las

las dos últimas proporciones, saldrá $dAB \,.\, dC : dC \,.\, dB$ :: tang AB . cos AB : tang C . cos AC :: sen AB : tang C . cos AC (substituyendo en lugar de tang AB su valor $\frac{\text{sen } AB}{\cos AB}$); luego $dAB : dB$ :: sen AB : tang C . cos AC.

824 $dAB : dB$ :: cos C . tang AC : sen B. Porque $dAB : dB :: dAB \,.\, dAC : dB \,.\, dAC$; pero (818) dAB: dAC :: cos C : cos B , y (814) $dAC : dB$ :: tang AC: tang B ; luego multiplicando ordenadamente las dos últimas proporciones, tendrémos $dAB \,.\, dAC : dB \,.\, dAC$ :: cos C . tang AC : cos B . tang B , ó sen B ; luego por último $dAB : dB$ :: cos C . tang AC : sen B.

825 $dAB : dB$ :: sen AB : tang C . cos AC. Se demuestra considerando que el tercer término de la última analogía (824) cos C . tang $AC = \frac{\text{sen } C}{\text{tang } C} \,.\, \frac{\text{sen } AC}{\cos AC}$; y que el segundo valor (747) de sen B es $\frac{\text{sen } AC \,.\, \text{sen } C}{\text{sen } AB}$, y haciendo en la última analogía las correspondientes substituciones.

826 Si $A = 90°$, tendrémos $dAB : dB$ :: tang AC. cos AB : R. Para demostrarlo hemos de tener presente, que tang $C = \frac{\text{tang } AB}{\text{sen } AC}$ (702), y que haciendo en la última analogía (825) la substitucion correspondiente, saldrá $dAB : dB$ :: sen AB : $\frac{\text{tang } AB \,.\, \cos AC}{\text{sen } AC} = \frac{\text{tang } AB}{\cot AC}$, porque $\frac{\cos AC}{\text{sen } AC} = \cot AC = \frac{1}{\text{tang } AC}$; luego $dAB : dB$ :: sen AB: $\frac{\text{tang } AB}{\text{tang } AC}$ :: sen AB . tang AC : tang AB :: $\frac{\text{sen } AB \,.\, \text{tang } AC}{\text{tang } AB}$: R , dividiendo los dos últimos términos por tang AB. Y porque $\frac{\text{sen } AB}{\text{tang } AB} = \cos AB$, sale por último haciendo la substitucion, $dAB : dB$ :: tang AC . cos AB : R.

Fig. 827 Si en la analogía fundamental (823) substituimos en lugar de cos AC su valor $\frac{\text{sen}\,AC}{\text{tang}\,AC}$, sacarémos $dAB : dB :: \text{tang}\,AC \,.\, \text{sen}\,AB : \text{tang}\,C \,.\, \text{sen}\,AC$.

828 $dAB : dB :: \text{tang}\,AC \,.\, \cos AB - \text{sen}\,AC \,.\, \cos BC : \text{sen}\,B \,.\, \text{sen}\,AC - \text{sen}\,BC$, con substituir en la fórmula (824) en lugar de cos C su primer valor (754), y sen AC en lugar de tang AC . cos AC en el segúndo término del segundo antecedente que resulta de la primera substitucion.

829 Si al lado AB, y su ángulo adyacente B substituimos respectivamente en lo dicho (823) el lado AC, y su lado adyacente C, sacarémos $dAC : dC :: \text{sen}\,AC : \text{tang}\,B \,.\, \cos AB$.

830 $dAC : dC :: \text{tang}\,AB \,.\, \cos B : \text{sen}\,C$, substituyendo en lugar de cos AB su valor $\frac{\text{sen}\,AB}{\text{tang}\,AB}$, en lugar de tang B su valor $\frac{\text{sen}\,B}{\cos B}$, y últimamente en lugar de $\frac{\text{sen}\,B \,.\, \text{sen}\,AB}{\text{sen}\,AC}$ su primer valor sen C (748).

831 Si $A = 90^\circ$, $dAC : dC :: \frac{1}{2}\text{sen}\,2AC : \cot C$. Porque en este supuesto tang $B = \frac{\text{tang}\,AC}{\text{sen}\,AB}$ (702); luego (829) $dAC : dC :: \text{sen}\,AC : \frac{\text{tang}\,AC \,.\, \cos AB}{\text{sen}\,AB}$ ó $\frac{\text{tang}\,AC}{\text{tang}\,AB} ::$ $\text{sen}\,AC : \frac{\text{sen}\,AC}{\cos AC \,.\, \text{tang}\,AB} :: \text{sen}\,AC \,.\, \cos AC : \frac{\text{sen}\,AC}{\text{tang}\,AB}$; pero $\frac{\text{sen}\,AC}{\text{tang}\,AB} = \cot C$ (702); luego $dAC : dC :: \text{sen}\,AC \,.\, \cos AC : \cot C :: \frac{1}{2}\text{sen}\,2AC : \cot C$, como se infiere de lo dicho (II. 378).

288 832 *Quando en un triángulo esférico* ABC *hay dos lados* AB, AC *constantes, la diferencial del ángulo* A *que forman es á la diferencial del uno de los otros ángulos* B, *co-*

mo

mo el seno del tercer lado BC *opuesto al ángulo* A *es al seno del lado* AC *opuesto al ángulo* B, *multiplicado por el coseno del tercer ángulo* C.

Supongamos que el triángulo ABC se transforme en otro triángulo ABD que tenga el mismo lado AB, y cuyo lado $AD = AC$; la diferencial del ángulo A será el ángulo CAD, ó el arco FG tirado 90° lejos del punto A, y la diferencial del ángulo B será DBC, ó el arco IH tirado 90° lejos del punto B. Si tiramos el arco CE perpendicular á BCH, será $FG : HI :: FG . CD . CE : HI . CD . CE$, porque los dos últimos términos son los dos primeros multiplicados uno y otro por una misma cantidad; luego $FG = \frac{HI . FG . CD . CE}{HI . CD . CE}$; pero $\frac{FG}{CD} = \frac{1}{\text{sen } AC}$ (770); $\frac{CD}{CE} = \frac{1}{\cos DCE} = \frac{1}{\cos ACB}$, y $\frac{CE}{HI} = \text{sen } BC$; luego $FG = \frac{HI . \text{sen } BC}{\text{sen } AC . \cos ACB}$, lo mismo que hemos sentado.

833 Es, pues, $dA : dB :: \text{sen } BC : \text{sen } AC . \cos C$.

834 $dA : dB :: \text{sen } A : \text{sen } B . \cos C$, porque $\text{sen } BC = \frac{\text{sen } AC . \text{sen } A}{\text{sen } B}$ (713).

835 $dA : dB :: \text{sen } BC . \text{tang } C : \text{sen } AC . \text{sen } C$. Se saca multiplicando el segundo antecedente de la analogía (833) por tang C, y el segundo consecuente por $\frac{\text{sen } C}{\cos C} = \text{tang } C$.

836 $dA : dB :: \text{tang } C . \text{sen } A : \text{sen } B . \text{sen } C$, substituyendo en la proporcion (835) el valor de sen BC sacado de $\text{sen } BC : \text{sen } AC :: \text{sen } A : \text{sen } B$ (713).

837 $dA : dB :: \text{sen } BC . \text{tang } C : \text{sen } B . \text{sen } AB$, substituyendo en la fórmula (835) en lugar de sen AC.

sen

Fig. sen C su igual sen AB . sen B, porque (713) sen B: sen C :: sen AC : sen AB.

838 $dA : dB ::$ sen$^2 BC$: cos AB — cos AC . cos BC, substituyendo en lo dicho (833) en lugar de cos C su primer valor (754).

839 $dAB : dB ::$ sen AB . sen A: sen AC . $\frac{1}{2}$sen $2C$. Porque sen BC : sen AC . cos C :: $\frac{\text{sen } AB \text{ . sen } A}{\text{sen } C}$ (751) :: sen AC . cos C :: sen AB . sen A : sen AC . sen C . cos C ó sen AC . $\frac{1}{2}$sen $2C$ (II. 378).

840 $dA : dB :: R$: sen$^2 B$. cos AB — sen B . cos B. cot A, substituyendo en la fórmula (834) el segundo valor de cos C (754), y dividiendo por sen A los dos últimos términos de la proporcion.

841 $dA : dB ::$ sen$^2 BC$: cos AB — cos BC . cos AC. Porque si en la analogía (834) substituimos en lugar de cos C su primer valor (754) sacarémos $dA : dB ::$ sen A : $\frac{\text{sen } B \text{ . cos } AB \text{ — sen } B \text{ . cos } AC \text{ . cos } BC}{\text{sen } AC \text{ . sen } BC}$; multiplicando los dos últimos términos por sen AC . sen BC, y dividiéndolos despues por sen A . sen AC, saldrá dA: dB :: sen BC : $\frac{\text{sen } B \text{ . cos } AB \text{ — sen } B \text{ . cos } AC \text{ . cos } BC}{\text{sen } A \text{ . sen } AC}$, substituyendo en el último término en lugar de $\frac{\text{sen } B}{\text{sen } A \text{ . sen } AC}$ su valor $\frac{1}{\text{sen } BC}$, sacado de lo dicho (751) saldrá $dA : dB ::$ sen$^2 BC$: cos AB — cos AC . cos BC.

842 Si en vez de considerar en lo dicho (833) el ángulo B, y su lado opuesto AC, consideráramos el ángulo C, y el ángulo opuesto AB, sacaríamos del mismo modo las siguientes analogías.

dA

$dA : dC :: \text{sen}\, BC : \text{sen}\, AB \,.\, \cos B.$ Fig.

843 $dA : dC :: \text{sen}\, A : \text{sen}\, C \,.\, \cos B.$

844 $dA : dC :: \text{sen}\, BC \,.\, \text{tang}\, B : \text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, B.$

845 $dA : dC :: \text{tang}\, B \,.\, \text{sen}\, BC : \text{sen}\, AC \,.\, \text{sen}\, C.$

846 $dA : dC :: \text{tang}\, B \,.\, \text{sen}\, A : \text{sen}\, C \,.\, \text{sen}\, B.$

847 $dA : dC :: \text{sen}^2 BC : \cos AC - \cos AB \,.\, \cos BC.$

848 *Quando son constantes dos lados* AB , AC , *la diferencial del ángulo* A *que forman es á la diferencial del* 288 *lado opuesto* BC, *como el radio es al seno de uno ú otro de los otros dos ángulos* , *de* C *por egemplo* , *multiplicado por el seno del lado constante* AC , *contiguo al mismo ángulo.*

Hemos de probar que $FG : ED :: 1 : \text{sen}\, C \,.\, \text{sen}\, AC$. Con esta mira considerarémos que $FG = \frac{ED \,.\, FG \,.\, CD}{CD \,.\, ED}$, porque borrando las cantidades comunes al numerador y al denominador no queda mas que FG. Pero $\frac{FG}{CD} = \frac{1}{\text{sen}\, AC}$ (770), y $\frac{CD}{ED} = \frac{1}{\text{sen}\, ECD} = \frac{1}{\text{sen}\, ACB}$; luego $FG = \frac{ED}{\text{sen}\, ACB \,.\, \text{sen}\, AC}$; quiero decir, que $FG : ED :: 1 : \text{sen}\, C \,.\, \text{sen}\, AC$.

849 Es, pues, $dA : dBC :: 1 : \text{sen}\, AC \,.\, \text{sen}\, C$.

850 $dA : dBC :: 1 : \text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, B$, porque (713) $\text{sen}\, AC : \text{sen}\, AB :: \text{sen}\, B : \text{sen}\, C$.

851 $dA : dBC :: 1 : \text{sen}\, BC \,.\, \text{sen}\, C : \text{sen}\, A \,.\, \text{sen}\, B \,.\, \text{sen}^2 AB$, con multiplicar en la analogía (850) el tercer término por $\text{sen}\, BC \,.\, \text{sen}\, C$, y el quarto por $\text{sen}\, A \,.\, \text{sen}\, AB$ que vale lo mismo (713).

852 Si el lado $BC = 90^{\circ}$, saldrá esta equacion $dA = \frac{dBC}{\sqrt{(\text{sen}^2 AC - \cos^2 AB)}}$.

Para demostrarlo levantarémos un arco CL perpendicu-

Fig. cular á BC y á BL, cuyo polo sea B, por manera que $BL = 90^o$. Sabemos (698) que en el triángulo ACL, sen AC : 1 :: sen AL ó cos AB : sen ACL ó cos ACB, luego cos $C = \frac{\cos AB}{\text{sen } AC}$; luego sen $ACB = \sqrt{\left(1 - \frac{\cos^2 AB}{\text{sen}^2 AC}\right)}$; si en la fórmula (849) substituimos esta cantidad en lugar de sen C, sacarémos dA : dBC :: 1 : sen AC. $\sqrt{\left(1 - \frac{\cos^2 AB}{\text{sen}^2 AC}\right)}$, de donde sacamos $dA = \frac{dBC}{\text{sen } AC \sqrt{\left(1 - \frac{\cos^2 AB}{\text{sen}^2 AC}\right)}}$

$$= \frac{dBC}{\frac{\text{sen } AC \sqrt{(\text{sen}^2 AC - \cos^2 AB)}}{\sqrt{\text{sen}^2 AC}}} = \frac{dBC}{\frac{\text{sen } AC}{\text{sen } AC} \sqrt{(\text{sen}^2 AC - \cos^2 AB)}};$$

luego $dA = \frac{dBC}{\sqrt{(\text{sen}^2 AC - \cos^2 AB)}}$.

853 Esta fórmula se puede simplificar y poner de modo que sea mas facil de valuar por logaritmos en esta forma $dA = \frac{dBC}{\text{sen } AC \sqrt{\left(1 - \frac{\cos^2 AB}{\text{sen}^2 AC}\right)}}$; porque si se toma un arco X, cuyo seno sea $= \frac{\cos AB}{\text{sen } AC}$, y se busca de repente su coseno, la fórmula será $dA = \frac{dBC}{\text{sen } AC \cdot \cos X}$.

288 854 *Quando son constantes dos lados* AB, AC, *la diferencial del uno ú otro de los ángulos opuestos á los lados constantes, por egemplo* B, *será á la diferencial del tercer lado* BC, *como el radio es á la tangente del otro ángulo* C *opuesto al uno de los lados constantes* AB, *multiplicada por el seno del tercer lado, ó del lado variable* BC.

Sabemos por lo dicho muchas veces que la diferencial

cial del ángulo B es el angulillo CBD, ó el arco HI que le mide, y la diferencial del lado BC es el arco DE; la diferencial $HI = \frac{ED \,.\, HI \,.\, Ec}{ED \,.\, Ec}$. Pero $\frac{HI}{Ec} = \frac{R}{\text{sen}\, Bc}$ (770), $\frac{Ec}{ED} = \frac{R}{\text{tang}\, EcD} = \frac{R}{\text{tang}\, ACB}$, y por ser $R = 1$, sacarémos $HI = \frac{ED}{\text{sen}\, BC \,.\, \text{tang}\, ACB}$; esto es, $HI : ED :: 1 \,.\, \text{sen}\, BC \,.$ $\text{tang}\, C$.

855 Es, pues, $dB : dBC :: 1 : \text{sen}\, BC \,.\, \text{tang}\, C$.

856 $dB : dBC :: \cot C : \text{sen}\, BC$, substituyendo en la última analogía $\frac{1}{\cot C}$ en lugar de tang C.

857 $dB : dBC :: \cos C : \text{sen}\, A \,.\, \text{sen}\, AB$, con substituir en la última analogía $\frac{\cos C}{\text{sen}\, C}$ en lugar de cot C, y considerar que (713) $\text{sen}\, BC \,.\, \text{sen}\, C = \text{sen}\, A \,.\, \text{sen}\, AB$.

858 Si $BC = 90^\circ$, será $dB = \frac{dBC \,.\, \cos AB}{\sqrt{(\text{sen}^2 AC - \cos^2 AB)}}$; porque (857) $dB = \frac{dBC \,.\, \cos C}{\text{sen}\, A \,.\, \text{sen}\, AB}$. Si consideramos que por ser BC de 90°, $\cos BC = 0$, y $\text{sen}\, BC = 1$ (II. 361), sacarémos del primer valor de la fórmula (754) $\cos C = \frac{\cos AB}{\text{sen}\, AC}$; luego $dB = \frac{dBC \,.\, \cos AB}{\text{sen}\, A \,.\, \text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, AC}$; pero ya que (713) $\text{sen}\, A : 1 :: \text{sen}\, B : \text{sen}\, AC$, será $\text{sen}\, A \,.\, \text{sen}\, AC = \text{sen}\, B$; luego $dB = \frac{dBC \,.\, \cos AB}{\text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, B}$; y porque $\text{sen}\, AC : \text{sen}\, B :: \text{sen}\, AB :$ $\text{sen}\, C$, será $\text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, B = \text{sen}\, AC \,.\, \text{sen}\, C$; luego $dB = \frac{dBC \,.\, \cos AB}{\text{sen}\, AC \,.\, \text{sen}\, C}$. Y como por lo demostrado (852) $\text{sen}\, C = \sqrt{\left(1 - \frac{\cos^2 AB}{\text{sen}^2 AB}\right)} = \frac{1}{\text{sen}\, AC} \sqrt{(\text{sen}^2 AC - \cos^2 AB)}$, síguese que $\text{sen}\, AC \,.\, \text{sen}\, C = \sqrt{(\text{sen}^2 AC - \cos^2 AB)}$, y que $dB = \frac{dBC \,.\, \cos AB}{\text{sen}\, AC \,.\, \text{sen}\, C} = \frac{dBC \,.\, \cos AB}{\sqrt{(\text{sen}^2 AC - \cos^2 AB)}}$.

859 A esta fórmula se la puede dar esta forma

$$dB = \frac{dBC \,.\, \cos AB}{\text{sen}\, AC \sqrt{\left(1 - \frac{\cos^2 AB}{\text{sen}^2 AC}\right)}}.$$ Por consiguiente si buscamos

Fig. mos un arco X cuyo seno sea $\frac{\cos AB}{\text{sen } AC}$, y sacamos su coseno, tendrémos $dB = \frac{dBC . \cos AB}{\text{sen } AC . \cos X}$.

860 Del triángulo ABC tambien sacarémos $dB : dBC :: \cot C . \text{sen } B : \text{sen } A . \text{sen } AC$, substituyendo en lo dicho (855) en lugar de sen BC su valor $\frac{\text{sen } A . \text{sen } AC}{\text{sen } B}$ (751).

861 $dB : dBC :: \frac{\cot AB}{\text{sen } B} - \frac{\cot BC}{\text{tang } B} : R$, si en lo dicho (856) substituimos en lugar de cot C la unidad dividida por el primer valor de tang C (760); en lugar de $\frac{\cos B}{\text{sen } B}$ su valor $\frac{1}{\text{tang } B}$, dividimos los dos últimos términos por sen BC, y substituimos finalmente en lugar de $\frac{\cos BC}{\text{sen } BC}$ su valor cot BC.

862 $dB : dBC :: \cot AB - \cos B . \cot BC : \text{sen } B$, multiplicando los dos últimos términos de la última fórmula por sen B, y teniendo presente que siendo $R = 1$, $\cos B = \frac{\text{sen } B}{\text{tang } B}$.

863 $dB : dBC :: \cos AB . \text{sen } B - \cot A . \cos B : \text{sen } AB$, substituyendo en lo probado (857) en lugar de cos C su segundo valor (754), y dividiendo despues por sen A los dos últimos términos de la proporcion.

864 Si $AC = 90°$, sacarémos de lo probado (860) $dB : dBC :: \cot C . \text{sen } B : \text{sen } A$.

865 Si en vez de considerar el ángulo B opuesto al lado constante AC, consideramos el otro ángulo C opuesto al lado constante AB, sacarémos las analogías siguientes.

$dC : dBC :: 1 : \text{sen } BC . \text{tang } B$.

866 $dC : dBC :: \cot B : \text{sen } BC$.

867 $dC : dBC :: \cos B : \text{sen } A . \text{sen } AC$.

dC

868 $dC : dBC :: \cot B \,.\, \text{sen}\, C : \text{sen}\, AB \,.\, \text{sen}\, A.$ Fig.

869 $dC : dBC :: \frac{\cot AC}{\text{sen}\, C} - \frac{\cot BC}{\text{tang}\, B} : 1.$

870 $dC : dBC :: \cos AC \,.\, \text{sen}\, C - \cos C \,.\, \cot A :$ $\text{sen}\, AC.$

871 Si $AB = 90^\circ.$ $dC : dBC :: \cot B \,.\, \text{sen}\, C :$ $\text{sen}\, A.$

872 *Quando son constantes dos lados como* AB, AC, *las diferenciales de los ángulos opuestos á los lados constantes son entre sí como las tangentes de los mismos lados.* 286

Los senos de los lados opuestos á ángulos constantes son en razon constante, por consiguiente entre las diferenciales de dichos senos hay la misma razon que entre los mismos senos; quiero decir, que $d\, \text{sen}\, B : d\, \text{sen}\, C :: \text{sen}\, B : \text{sen}\, C$; pero $d\, \text{sen}\, B = dB \,.\, \cos B$ (352), y $d\, \text{sen}\, C = dC \,.\, \cos C$; luego $dB \,.\, \cos B : dC \,.\, \cos C :: \text{sen}\, B : \text{sen}\, C$, y $dB : dC :: \frac{\text{sen}\, B}{\cos B} : \frac{\text{sen}\, C}{\cos C} :: \text{tang}\, B : \text{tang}\, C.$

873 Luego $dB : dC :: \text{tang}\, B : \text{tang}\, C.$

874 $dB : dC :: \text{sen}\, B \,.\, \cos C : \text{sen}\, C \,.\, \cos B$, porque $\text{tang}\, B : \text{tang}\, C :: \frac{\text{sen}\, B}{\cos B} : \frac{\text{sen}\, C}{\cos C}.$

875 $dB : dC :: \text{sen}\, AC \,.\, \cos C : \text{sen}\, AB \,.\, \cos B.$ Sácase con substituir en el tercer término de la analogía antecedente en lugar de sen B su valor $\frac{\text{sen}\, AC \,.\, \text{sen}\, C}{\text{sen}\, AB}$ (746), dividir despues los dos últimos términos por sen C, y multiplicarlos últimamente por sen AB.

876 *Quando hay dos ángulos constantes, la diferencial del lado que está entre los dos ángulos constantes es á la diferencial del uno de los otros lados, como el seno del tercer* 286

cer

Fig. *cer ángulo es al producto del seno del ángulo opuesto á dicho lado por el coseno del tercer lado.*

Supongamos que en el triángulo ABC sean constantes los ángulos A y B, es evidente que en el triángulo suplementario EFD serán constantes los lados FE y FD. En virtud de lo dicho (832) la diferencial del ángulo F es á la del ángulo D. como el seno del tercer lado ED es al producto del seno del lado EF por el coseno del tercer ángulo E. Substituyendo en esta proporcion las cantidades correspondientes que dá el triángulo ABC, quedará probada la proposicion.

877 Es, pues, $dAB : dBC :: \text{sen } C : \text{sen } A . \cos AC$.

878 $dAB : dBC :: \text{sen } AB : \text{sen } BC . \cos AC$, substituyendo en la última analogía en lugar de sen C su valor $\frac{\text{sen } A . \text{ sen } AB}{\text{sen } BC}$ sacado de sen C : sen A :: sen AB : sen BC.

879 Si $A = 90^\circ$, $dAB : dBC :: \text{sen } C : \cos AC$, porque entonces seno $A = 1$ se puede omitir en lo dicho (877).

880 Si $A = 90^\circ$, $dAB : dBC :: \text{sen } B . \text{ sen } AB : \frac{1}{2} \text{ sen } 2AC$. Porque si en lo dicho (878) substituimos en lugar de sen BC su valor (751), y borramos sen A, que entonces $= 1$, sacarémos $dAB : dBC :: \text{sen } AB : \frac{\text{sen } AC . \cos AC}{\text{sen } B} :: \text{sen } AB . \text{ sen } B : \text{sen } AC . \cos AC$, ó $\frac{1}{2}\text{sen } 2AC$ (II. 378).

881 Si en lugar del lado BC consideramos el lado AC, sacarémos tambien

dAB

$dAB : dAC :: \text{sen}\, C : \text{sen}\, B \,.\, \cos BC.$ Fig.

882 $dAB : dAC :: \text{sen}\, AB : \text{sen}\, AC \,.\, \cos BC.$ 286

883 *Si fueren constantes los ángulos* A *y* B. *la diferencial del lado* AB *que cogen dichos dos ángulos es á la diferencial del ángulo* C *opuesto al lado* AB, *como el radio es al seno del uno de los lados* BC *multiplicado por el seno del ángulo constante* B *adyacente á dicho lado.*

Porque suponiendo trazado el triángulo suplementario *EFD*, serán constantes los lados *FD* y *FE* suplementos de los ángulos *A* y *B*, tendremos, pues, (848) la diferencial del ángulo *F* que forman los dos lados constantes, es á la diferencial de su lado opuesto *DE*, como el radio es al seno de uno de los ángulos multiplicado por el seno del lado constante *FD* adyacente á dicho ángulo. Substituyendo en esta proporcion las cantidades correspondientes del triángulo *ABC*, se convertirá en la que hemos dicho.

884 Es, pues, $dAB : dC :: R : \text{sen}\, BC \,.\, \text{sen}\, B.$

885 $dAB : dC :: R : \text{sen}\, AC \,.\, \text{sen}\, A$, porque sen B : sen A :: sen AC : sen BC.

886 Si $A = 90^{\circ}$, la última analogía se convertirá en $dAB : dC :: R : \text{sen}\, AC$, porque entonces sen $A = 1$.

887 *Si dos ángulos* A *y* B *fuesen constantes*, *la diferencial de uno de los lados* BC *opuesto al uno de los dos ángulos constantes* A, *será á la diferencial del tercer ángulo* C, *como el radio es á la tangente del otro lado* AC *opuesto*

al otro lado constante B, *multiplicada por el seno del tercer ángulo* C.

Si trazamos el triángulo suplementario EFD, los lados FE y FD serán constantes, luego (854) $dB : dED :: R : \text{tang } E . \text{sen } DE$, y si en lugar del ángulo D, del lado ED, y del ángulo E substituimos sus correspondientes BC, C, AC, la analogía se convertirá en la que nos tocaba demostrar.

888 Es, pues, $dBC : dC :: R : \text{tang } AC . \text{sen } C$.

889 $dBC : dC :: R \cot AC : \text{sen } C$.

890 $dBC : dC :: R . \cos AC : \text{sen } AB . \text{sen } B$, substituyendo en la última analogía $\frac{\text{sen } AB . \text{sen } B}{\text{sen } AC}$ en lugar de sen C (748), y cos AC en lugar de cot AC. sen AC.

891 Si en lugar del lado BC, consideramos el otro lado AC opuesto al otro ángulo constante, hallaríamos por el mismo camino

$$dAC : dC :: R : \text{tang } BC : \text{sen } C.$$

892 $dAC : dC :: R \cot BC : \text{sen } C$.

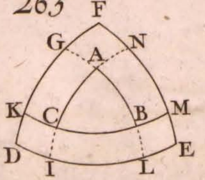
893 $dAC : dC :: R \cos BC : \text{sen } AB . \text{sen } A$.

894 *Quando son constantes dos ángulos* A *y* B, *las diferenciales de los lados opuestos á los ángulos constantes serán entre sí como las tangentes de los mismos lados.*

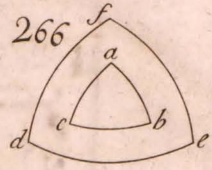
Trazarémos el triángulo suplementario EDF, y las diferenciales de los ángulos D y E serán las mismas que las de los lados BC y AC. Por lo probado (873) tendrémos $dD : dE :: \text{tang } D : \text{tang } E$, de donde se sigue la siguiente proporcion que nos tocaba demostrar.

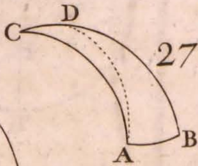
dBC

265

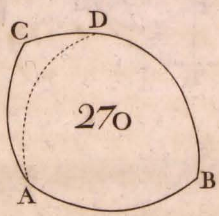


266



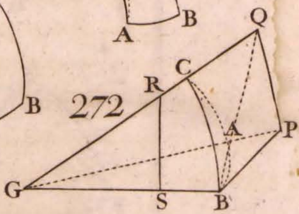


271

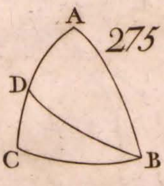


270

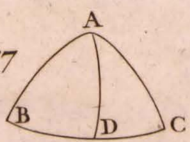
269



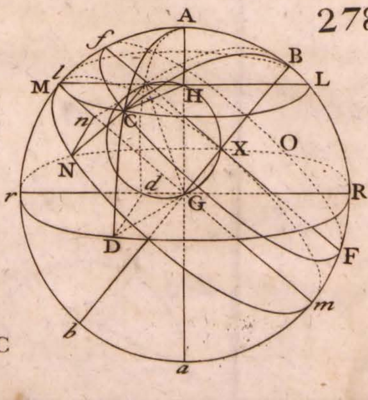
272



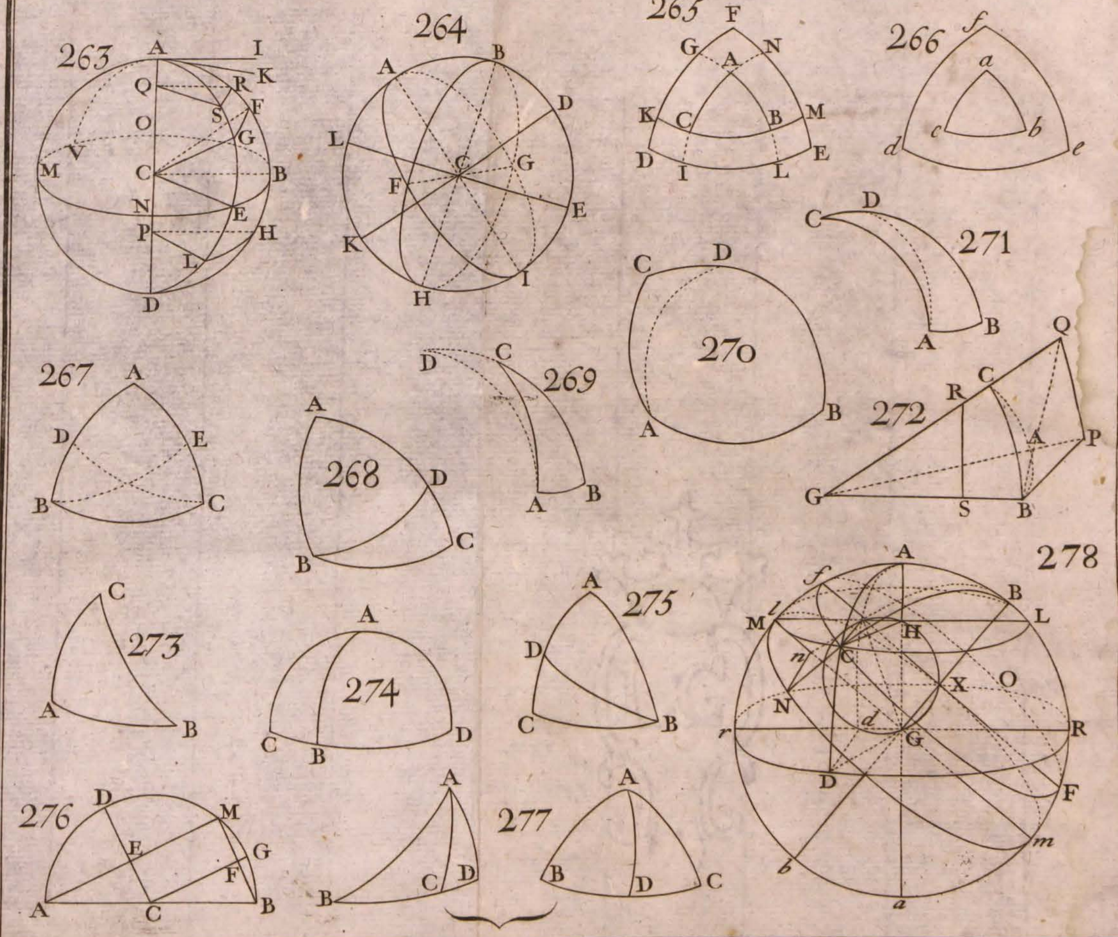
275



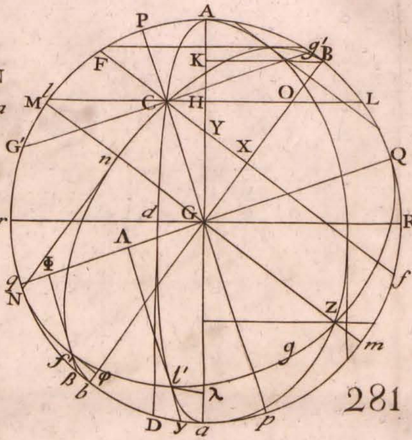
277



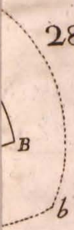
278


263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278

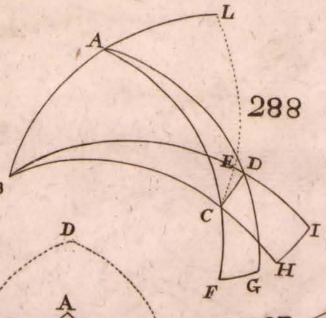
80



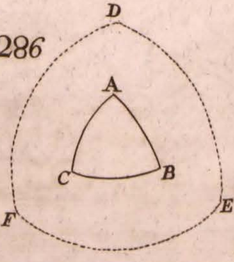
281



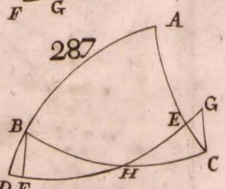
283



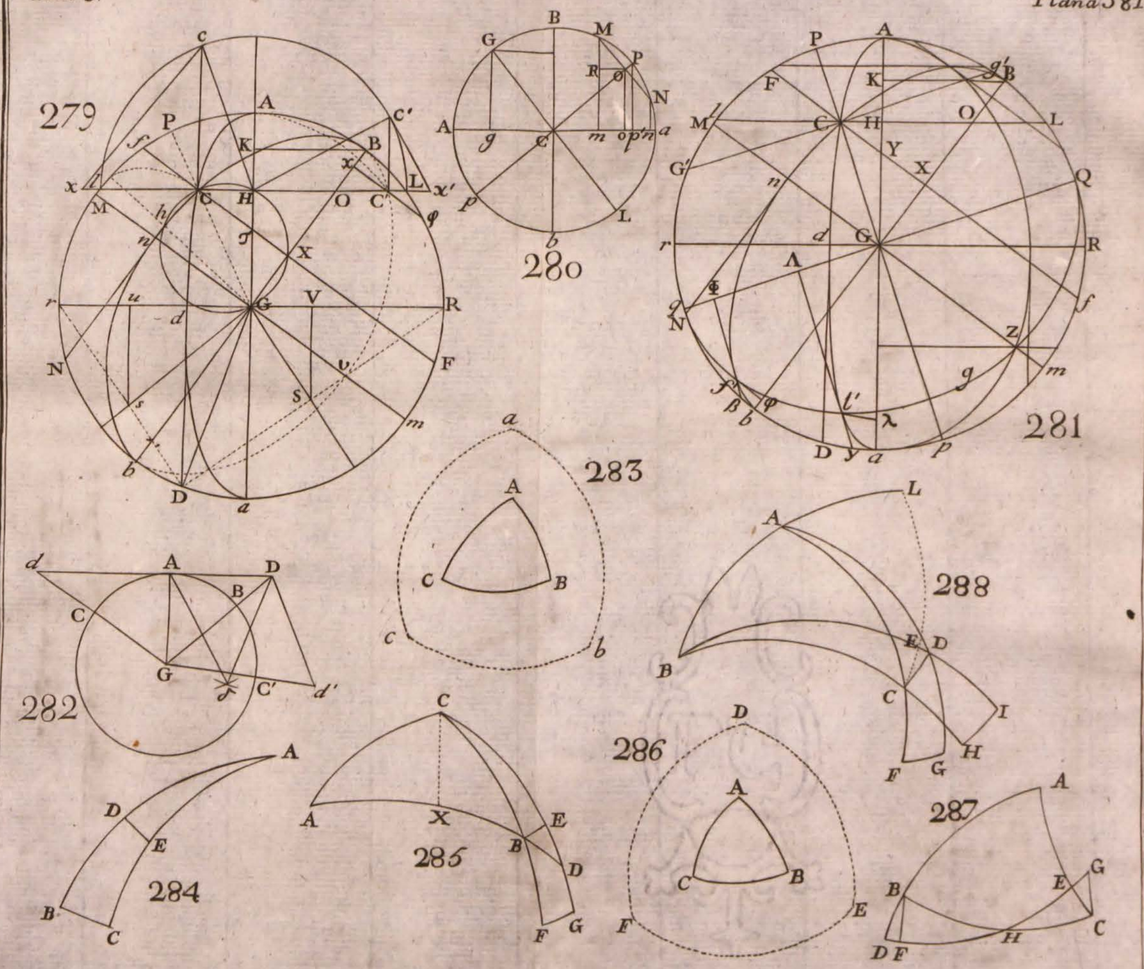
288



286



287


279
280
281
282
283
284
285
286
287
288

895 $dBC : dAC :: \text{tang } BC : \text{tang } AC.$

896 Si $A = 90°$, $dBC : dAC :: R : \cos C$; porque

(699) $R : \cos C :: \text{tang } BC : \text{tang } AC.$

FIN

DEL TOMO TERCERO.